MÓDULO 3
ANÁLISIS COGNITIVO

María José González y Pedro Gómez

Una vez realizado el análisis de contenido, en el que el foco de atención es el tema matemático que se va a enseñar, pasamos a realizar el análisis cognitivo, en el que el foco de atención es el aprendizaje del estudiante. En MAD, hemos asumido la visión funcional de las matemáticas escolares que fundamenta el proyecto PISA 2012. Bajo esta perspectiva, el currículo pone el énfasis en la utilidad de los conceptos matemáticos para resolver problemas en distintos contextos. Desde el punto de vista del aprendizaje, dicha consideración funcional de las matemáticas es coherente con una posición constructivista del aprendizaje de los escolares, en virtud de la cual, los individuos aprenden matemáticas al abordar problemas o situaciones que requieren usar conceptos, procedimientos y representaciones matemáticas.

1. PROPÓSITOS Y ESTRUCTURA DEL ANÁLISIS COGNITIVO

Los planteamientos anteriores —la visión funcional de las matemáticas y la posición constructivista del aprendizaje— deben concretarse cuando abordamos la dimensión cognitiva del currículo en el nivel de planificación del profesor; es decir, cuando nos centramos en la planificación de un tema matemático concreto. El análisis cognitivo guía esa concreción, ya que nos permite hacer una descripción de lo que el profesor espera que el estudiante aprenda sobre el tema matemático en cuestión y sobre sus previsiones acerca del modo en que el estudiante va a desarrollar ese aprendizaje. En este sentido, el análisis cognitivo da respuesta a las siguientes cuestiones.

1. Establecer las expectativas de aprendizaje que se desean desarrollar en el tema matemático, al considerar distintos niveles en la formulación de expectativas, y diferenciar el ámbito cognitivo y el afectivo.

2. Caracterizar las expectativas de aprendizaje del tema de modo que sean operativas y orienten el diseño de tareas para el aula. Para ello, se presentarán distintas herramientas que permitirán expresar las hipótesis del profesor sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje al abordar tareas matemáticas. Estas herramientas tendrán en cuenta las capacidades que activen los estudiantes al resolver problemas, las dificultades y los errores que surjan, y los elementos afectivos que intervengan en el proceso de aprendizaje.

Tras realizar el análisis cognitivo, el profesor habrá redactado y caracterizado unos objetivos de aprendizaje para su unidad didáctica. La caracterización suficientemente detallada de los objetivos de aprendizaje se convertirá en la información de referencia para los siguientes dos análisis del análisis didáctico. Con base en esa información, en el análisis de instrucción, el profesor podrá analizar, reformular y seleccionar las tareas que configurarán su unidad didáctica. Esa información también servirá de referencia para el diseño de los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información que se producirán en el análisis de actuación (figura 1).

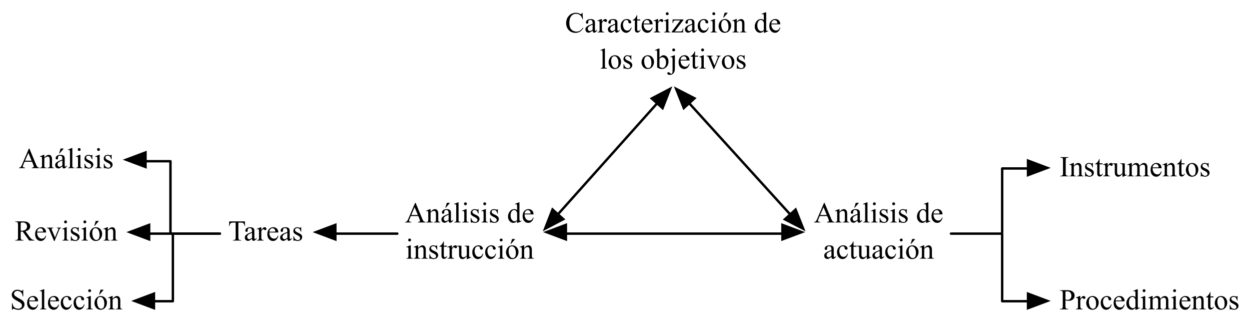

Figura 1. Caracterización de objetivos y otros análisis

La redacción de los objetivos de aprendizaje no es una tarea sencilla. Es necesario tener unos criterios que permitan centrar el foco de atención de las expectativas del profesor y revisar las propuestas que él haga. El proceso es cíclico: el profesor redacta una propuesta de objetivos de aprendizaje que después analiza, con base en unos criterios, para revisarlos y, si es el caso, reformular aquellos que lo requieran. Nosotros centraremos la atención en tres criterios para la redacción y análisis de los objetivos de aprendizaje: (a) los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales propuestos por PISA 2012, como expectativas de aprendizaje de nivel superior; (b) la información que surgió del análisis de contenido del tema; y (c) las características de los contextos sociales, institucionales y académicos en los que se va a implementar la unidad didáctica (figura 2).

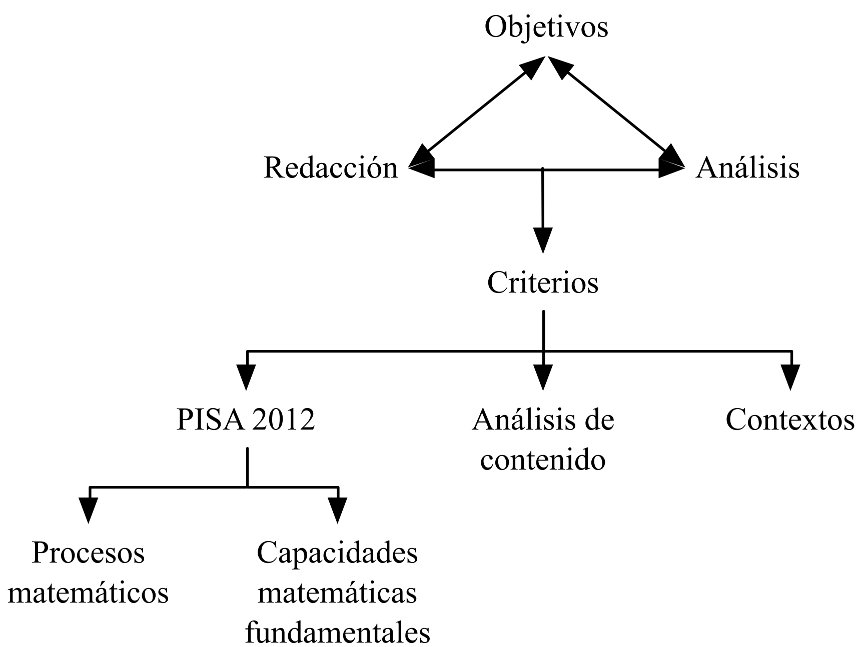

Figura 2. Criterios para la redacción y análisis de objetivos de aprendizaje

Al análisis de los objetivos de aprendizaje se fundamentará en la información que surja de su caracterización. Este proceso de caracterización de los objetivos de aprendizaje se encuentra en el centro del análisis cognitivo. Propondremos un procedimiento sistemático para ese propósito que nos permitirá producir, para cada objetivo de aprendizaje, un grafo de secuencias de capacidades con el que el profesor puede expresar sus previsiones acerca de cómo los estudiantes progresarán en su aprendizaje cuando aborden las tareas relacionadas con el tema. Esta descripción se fundamentará en la identificación y organización secuencial de las capacidades que los estudiantes pueden activar y de los errores en los que ellos pueden incurrir cuando aborden las tareas (figura 3).

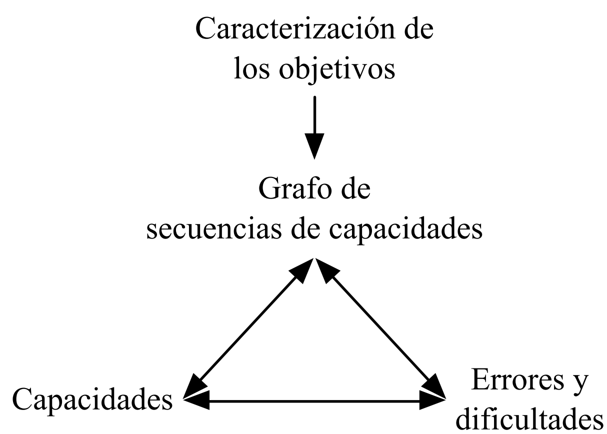

Figura 3. Caracterización de los objetivos de aprendizaje

Las reflexiones anteriores ponen de manifiesto la importancia y la complejidad del análisis cognitivo. Cuando terminemos el análisis cognitivo, tendremos un conjunto de objetivos de aprendizaje para nuestro tema que habremos caracterizado en términos de sus grafos de secuencias de capacidades. Estos grafos serán la información de referencia para los demás análisis del análisis didáctico. La redacción y caracterización de los objetivos de aprendizaje requiere que profundicemos en diversas ideas y cuestiones. En primera instancia, debemos concretar nuestra posición con respecto al papel que el marco conceptual de PISA 2012 va a jugar en el análisis cognitivo (apartado 2). Esto nos llevará a constatar que podemos organizar las expectativas de aprendizaje en tres niveles. La propuesta de PISA 2012 sugiere unas expectativas de aprendizaje que corresponden al nivel superior, mientras que los objetivos de aprendizaje pertenecen al nivel medio y las capacidades al nivel inferior (apartados 3, 4 y 5). Para caracterizar los objetivos de aprendizaje tendremos también que atender a la idea de limitación de aprendizaje que incluye las nociones de dificultad y error (apartado 6). El procedimiento de construcción de los grafos de secuencias de capacidades con los que caracterizamos los objetivos de aprendizaje implica la noción de camino de aprendizaje de una tarea. Presentamos este procedimiento en el apartado 7. La información que surge de los grafos de los objetivos de aprendizaje nos permitirá analizar y revisar el trabajo realizado (apartado 8). A continuación, y teniendo en cuenta que, en el rendimiento de los estudiantes en matemáticas, intervienen numerosos factores afectivos, en los apartados 9 y 10, nos centramos en la motivación. Finalmente, en el último apartado, resumimos el proceso para llevar a cabo el análisis cognitivo de un tema de matemáticas escolares. Este proceso será realizado por los alumnos de MAD a través de las cuatro actividades del módulo 3.

2. PISA 2012 COMO MARCO DE REFERENCIA

En el módulo 1, se analizaron y compararon dos documentos curriculares: los *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006) y el marco conceptual del estudio PISA 2012 (Ministerio de educación cultura y deporte, 2013). Ese trabajo puso de manifiesto las similitudes y diferencias entre esos dos documentos. Establecimos que los dos documentos abordan con diferentes aproximaciones el contenido de las matemáticas escolares y proponen, con estructuras diferentes, un conjunto de expectativas de aprendizaje. El documento de los estándares describe los procesos generales que caracterizan al individuo matemáticamente competente e identifica un conjunto de estándares de competencia para grupos de grados, organizados de acuerdo con los cinco tipos de pensamiento. El marco conceptual del estudio PISA 2012 no pretende ser un documento curricular; su propósito es fundamentar el diseño de las preguntas que se incluyen en la prueba con la que se evalúa la competencia matemática (alfabetización matemática) de los estudiantes de 15 años de los países que participan en el estudio. No obstante, este documento asume una posición en relación con el contenido de las matemáticas escolares y propone una definición concreta de la noción de competencia matemática (alfabetización matemática) que da indicaciones sobre lo que se espera que los estudiantes aprendan y sean capaces de hacer a lo largo de su formación matemática en las instituciones educativas.

En este módulo, y en el resto de MAD, nos basaremos en las ideas propuestas por el proyecto PISA 2012. En los apuntes de este módulo, no repetiremos el análisis que ya se realizó en el módulo 1. Sin embargo, queremos centrarnos en la definición de competencia matemática y en la aproximación que propone sobre la resolución de problemas, de cara a la definición y análisis de las expectativas de aprendizaje que se establecerán para cada tema. La competencia matemática se define como "la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos" (p. 9). Esta definición implica que la competencia matemática se refiere a la capacidad del individuo para realizar las cuatro etapas de la construcción de modelos en la resolución de problemas: formular, emplear, interpretar y evaluar (p. 8, figura 4).

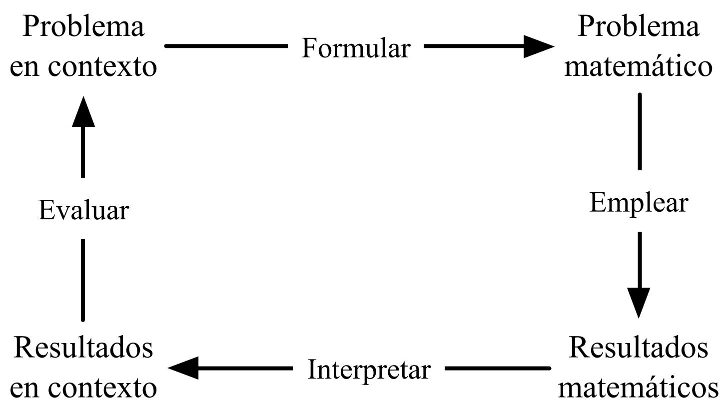

Figura 4. Procesos matemáticos de resolución de problemas (OECD, 2013 p. 26)

El proyecto PISA 2012 fundamenta la evaluación de la competencia matemática en tres ideas: los procesos matemáticos, el contenido y los contextos. El propósito de la prueba es "determinar de qué manera los alumnos pueden utilizar lo que han aprendido, obligándoles a emplear el contenido que conocen participando en procesos y aplicando las capacidades que poseen para resolver los problemas que surgen de las experiencias del mundo real" (p. 33). Para ser capaces de realizar los procesos matemáticos al abordar un problema, los individuos debe aplicar el pensamiento y la acción matemática. El marco conceptual de PISA 2012 caracteriza estas dos ideas en términos de (a) la puesta en juego de diferentes conceptos, conocimientos y destrezas matemáticas específicos al contenido matemático que está implicado en el problema y (b) el desarrollo y aplicación de siete capacidades matemáticas fundamentales. El documento describe la relación entre los procesos matemáticos, los contextos, el conocimiento del contenido matemático y las capacidades matemáticas fundamentales de la siguiente manera: "A medida que el sujeto trabaja en el problema —lo que puede suponer la formulación del mismo, el empleo de conceptos o procedimientos matemáticos, o la interpretación de una solución matemática— las capacidades fundamentales se activan de forma sucesiva y simultánea, recurriendo a contenidos matemáticos de temas apropiados para generar una solución" (p. 10).

Gómez, Castro, Mora, Pinzón, Torres y Villegas (2014) esquematizan la relación de estas ideas como se muestra en la figura 5.

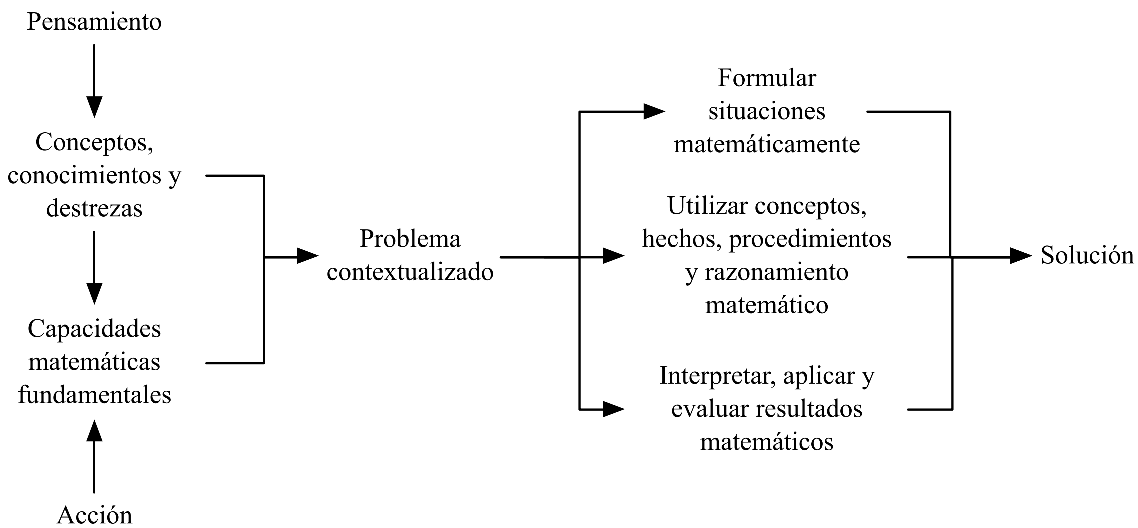

Figura 5. Conceptualización en PISA 2012 (p. 10)

Más adelante, cuando abordemos el problema de establecer las expectativas de aprendizaje para un tema concreto de las matemáticas escolares, tomaremos estas ideas como referencia. Con base en este marco conceptual, a la hora de enunciar una expectativa de aprendizaje, podemos formular preguntas como las siguientes.

1. ¿A qué procesos matemáticos se refiere?
2. ¿Qué conceptos, conocimientos y destrezas matemáticas específicos al contenido matemático están implicados?
3. ¿Qué capacidades matemáticas fundamentales se espera que se pongan en juego o se desarrollen?
4. ¿En qué contextos se pone en juego lo anterior?

Las ideas anteriores ponen de manifiesto la importancia que el marco conceptual de PISA 2012 da a la capacidad del individuo para resolver problemas en contextos diversos. El proceso de resolución de problemas se puede abordar desde diferentes perspectivas curriculares. Hasta ahora, los hemos considerado desde el punto vista de la formulación de expectativas de aprendizaje para un tema concreto de las matemáticas escolares. Es decir, nos hemos centrado en el papel de la resolución de problemas como núcleo de lo que se espera que los estudiantes sepan y sean capaces de hacer a lo largo de su formación matemática en las instituciones educativas. Pero, ¿cómo se puede lograr que los estudiantes desarrollen su competencia matemática en el sentido descrito anteriormente? La resolución de problemas también puede jugar un papel en este propósito. Para ello, debemos reflexionar sobre el papel de la resolución de problemas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

2. Resolución de problemas: aprendizaje y enseñanza

La visión funcional de la matemática se concreta, desde el punto de vista cognitivo, en el propósito general de que el estudiante sea matemáticamente competente; es decir, que aprenda y sea capaz de resolver problemas en diversos contextos. Puede pensarse que la resolución de problemas siempre ha estado presente en los currículos de matemáticas. En efecto, podemos constatar que cualquier currículo reciente y casi cualquier propuesta docente de secundaria incorpora tareas en las que se aplican las matemáticas escolares a la resolución de problemas de la vida real. En un enfoque que algunos autores llaman formalista, el profesor introduce las definiciones y propiedades de los contenidos matemáticos, los acompaña de ejemplos y finalmente los aplica a la resolución de situaciones construidas ad-hoc para dichos contenidos. En la figura 6, este enfoque se representa mediante la flecha que va de las matemáticas a las situaciones y contextos en el mundo real, y que se resume en la máxima "aprender a aplicar las matemáticas para resolver problemas". Sin embargo, el enfoque que pretendemos fomentar aquí, y que surge de las ideas de Freudenthal (1983), asume que las matemáticas emergen de los problemas. En términos cognitivos, esto significa que, para aprender matemáticas, el estudiante debe realizar procesos cognitivos asociados a experiencias del mundo real. La novedad de esta perspectiva es que pone el énfasis en los procesos y deja en segundo plano los contenidos. Este enfoque, que está representado en la figura 6 por la flecha que va desde las situaciones y contextos en el mundo real a la matemática académica, se resume en la máxima "aprender matemáticas resolviendo problemas".

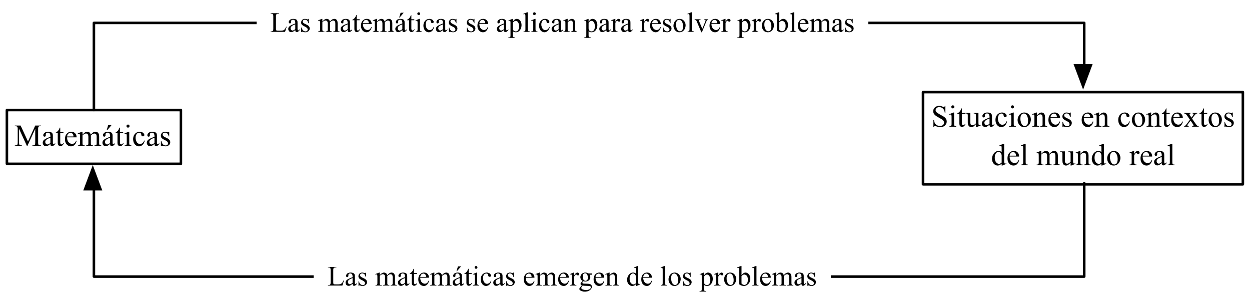

Figura 6. Representación de dos enfoques en la resolución de problemas

Veamos un ejemplo concreto en el que se perciben las diferencias entre estos dos enfoques. El siguiente problema, planteada a un estudiante de secundaria, corresponde al enfoque en el que las matemáticas surgen de los problemas.

> *Problema: En el desierto*[1]
>
> En el desierto: En la figura 7 se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay dos pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas este mapa contigo.
>
> a) ¿A cuál de los pozos irías a tomar agua?

[1] Adaptación de (Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013 p. 211) de una propuesta de (Goddijn, Kindt y Reuter, 2004 p. parte I, p. 5).

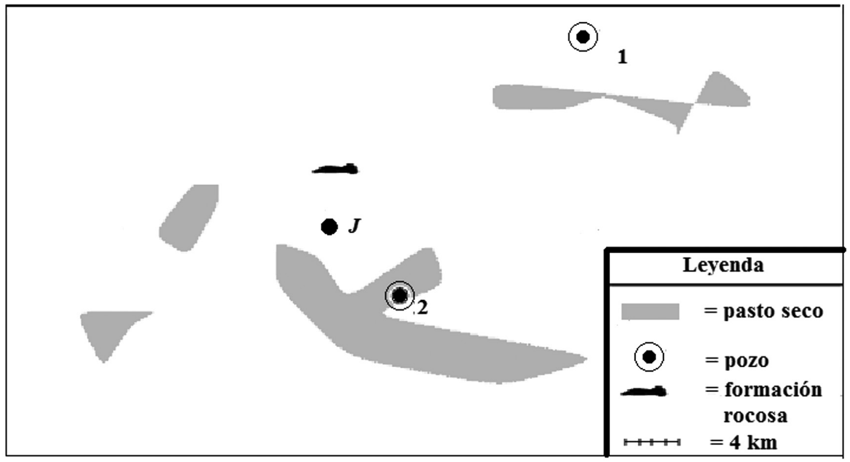

Figura 7. Mapa del desierto

b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro.

c) Ahora, esboza una división del desierto en dos partes o regiones de manera que siempre tengas más cerca un pozo que el otro pozo. ¿Si estás en la frontera a qué pozo irías y por qué?

d) ¿Qué clase de línea es la frontera? ¿Recta o curva?

e) Encuentra un procedimiento para dibujar esta línea. Describe los pasos de este procedimiento.

f) Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte corresponde a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de un pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos.

g) ¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos diferentes dominios?

h) ¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos? 0: trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos.

i) En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)?

j) La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras?

k) ¿Qué clase de líneas son las fronteras? ¿Rectas o curvas?

Al resolver este probelma, el estudiante se implica en un proceso de resolución de problemas en el que los conceptos matemáticos que se manejan son elementales y prácticamente no se hacen explícitos durante el proceso de resolución de la tarea. Una vez terminado el proceso, se pone de manifiesto el contenido matemático principal: la partición de un área de acuerdo con el principio del vecino más próximo.

Bajo el enfoque en el que la matemática se aplica a la resolución de problemas, el profesor comienza introduciendo la definición de Diagrama de Voronoi de una nube de puntos y muestra cómo calcularlo usando las mediatrices (ver figura 8).

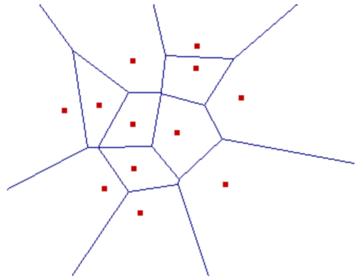

Figura 8. Nube de puntos

Y finalmente propone a los estudiantes una tarea del siguiente tipo.

> En un bosque hay un conjunto de torres de observación que están distribuidas como se indica en la figura 9. Cada guardia es responsable de extinguir el fuego más cercano a su torre que al resto. Determina la zona que le corresponde a cada guardia.

Figura 9. Torres en el bosque

El estudiante resuelve esta tarea una vez que conoce el contenido matemático que debe aplicar. El enunciado del problema hace referencia a un contexto del mundo real, pero el estudiante puede obviarlo, puesto que realmente no juega un papel relevante en el proceso de resolución del problema.

3. Resolución de problemas, construcción de modelos, modelización y matematización

PISA 2012 denomina el proceso que presentamos en la figura 4 como el ciclo de construcción de modelos matemáticos. Este ciclo implica los tres procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar y evaluar. El proceso de formular implica la capacidad del sujeto para "reconocer e identificar oportunidades para utilizar las matemáticas y, posteriormente, proporcionar la estructura matemática a un problema presentado de forma contextualizada" (p. 13). Este proceso implica la capacidad del sujeto para traducir una situación descrita en términos no matemáticos al área de las matemáticas, al dotar el problema de una estructura, representación y especificidad matemáticas. Este proceso de formular se asemeja a la idea de la matematización horizontal propuesta por la escuela holandesa en el marco de la Educación Matemática realística (Treffers, 1986). PISA 2012 sugiere que la tarea conocida como La pizza pone en juego particularmente este proceso matemático.

La pizza

Una pizzería ofrece dos pizzas redondas del mismo grosor en diferentes tamaños. La pequeña tiene 30 cm de diámetro y cuesta 30 zeds. La grande tiene 40 cm de diámetro y cuesta 40 zeds.

¿Qué pizza es la mejor opción en relación con su coste? Escribe tu razonamiento.

Aunque, como veremos más adelante, el proceso de formular puede implicar todas las capacidades matemáticas fundamentales, este proceso pone el foco de atención en la capacidad para "transformar un problema definido en el mundo real en una forma estrictamente matemática (que puede incluir la estructuración, conceptualización, elaboración de suposiciones y/o formulación de un modelo)" (p. 16) que es uno de los aspectos de la capacidad matemática fundamental que PISA 2012 denomina Matematización.

Por otro lado, la escuela holandesa también ha introducido la idea de matematización vertical que se refiere a la formalización de las construcciones particulares asociadas a problemas concretos hacia generalidades de contenido y de método. Esta idea compleja se asemeja en algunos aspectos al proceso matemático de emplear propuesto por PISA 2012. Este proceso matemático "hace referencia a la capacidad del individuo para aplicar conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos en la resolución de problemas formulados matemáticamente con el fin de llegar a conclusiones matemáticas" (p. 14). PISA 2012 sugiere que la tarea denominada Andar es una pregunta que pone particularmente en juego este proceso matemático.

Andar

La figura 10 muestra las pisadas de un hombre. La longitud del paso, P, es la distancia que media entre el extremo posterior de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{p} = 140$ ofrece una relación aproximada entre n y P donde

n = número de pasos por minuto, y

P = longitud del paso en metros.

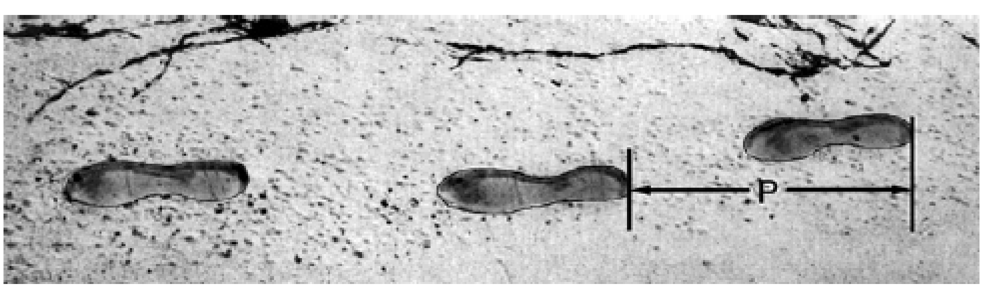

Figura 10. Pisadas de un hombre

> Si se aplica la fórmula a la forma de andar de Heiko y Heiko da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Heiko?
>
> Muestra tus cálculos.

Aunque el marco conceptual de PISA 2012 está inspirado en las ideas de la escuela holandesa, el texto no menciona las ideas de matematización horizontal y vertical. Por esa razón, nosotros tampoco las utilizaremos de aquí en adelante. Centraremos la atención en los procesos matemáticos de formular y emplear que comparten aspectos relevantes con esas otras dos ideas. Por otro lado, el término modelización se utiliza con frecuencia en la literatura en Educación Matemática. No obstante, nosotros no tomaremos a la modelización como un término técnico dentro MAD. Abordaremos las ideas y procedimientos que usualmente se asignan a la idea de modelización a través de los procesos de formular y emplear y de la capacidad matemática fundamental de matematización que hemos mencionado en este apartado y que se definen con claridad en el marco conceptual de PISA 2012.

3. Expectativas de aprendizaje. Tres niveles de concreción

El propósito general de que el estudiante desarrolle su competencia matemática, es decir, de que sepa resolver problemas en contexto, debe hacerse operativo en el nivel de planificación del profesor. Para ello, debe desglosarse en expectativas de aprendizaje que se redactan con distintos niveles de concreción. En este apartado, establecemos y caracterizamos esos niveles. Nos centramos sólo en el ámbito cognitivo, dejando el ámbito afectivo para más adelante.

Es importante aclarar, antes de nada, que en cada documento curricular y en cada institución educativa pueden variar notablemente los significados que se atribuyen a los términos que usaremos en este apartado o pueden usarse otros términos equivalentes. En el módulo 1 de MAD, se ha realizado un análisis comparado de algunos de estos términos (competencias, capacidades, logros, estándares, entre otros), sobre los que volveremos más adelante. Pero lo importante aquí, y es uno de los propósitos de este módulo, es distinguir tres niveles de expectativas de aprendizaje que denominaremos nivel superior, nivel medio y nivel inferior, y aprender a usarlos en la planificación de un tema matemático. El nivel superior se refiere a las expectativas de largo alcance: aquellas que se logran después de un periodo formativo amplio. Son expectativas transversales y comunes para todos los temas de matemáticas. El nivel medio está asociado a cada unidad didáctica de matemáticas. Se suele expresar mediante dos a cuatro frases para cada tema de matemáticas. Estas frases resaltan lo más importante que el estudiante debe aprender en esa unidad didáctica. El nivel inferior también está asociado a cada unidad didáctica de matemáticas, pero corresponde a los conocimientos más básicos y a los procedimientos más rutinarios que el estudiante tiene que aprender a lo largo de la unidad didáctica.

El nivel superior suele distinguirse con mucha claridad. Sin embargo, las fronteras entre los niveles medio e inferior es más difusa. En los siguientes subapartados, profundizamos en la caracterización de estos niveles.

4. Nivel superior: procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales

El modelo ideal y simplificado que asume PISA 2012 para resolver problemas en contexto consta de las etapas descritas en la figura 4, que describimos brevemente a continuación.

Formular. Este proceso implica formular los problemas matemáticos que surgen en un contexto personal, laboral, social o científico. Para formular un problema, hay que identificar las matemáticas relevantes para la situación, y hay que expresar la situación matemáticamente en función de los conceptos y las relaciones identificadas. Como resultado de esta etapa, aparecen problemas susceptibles de ser tratados matemáticamente.

Emplear. Una vez se tienen enunciados matemáticos, es necesario emplear conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para obtener soluciones matemáticas. Esta etapa implica razonamientos, manipulaciones, transformaciones y cálculos matemáticos.

Interpretar y evaluar. Las soluciones matemáticas obtenidas se deben interpretar y evaluar para dar respuesta al problema original. Es necesario dar una respuesta acorde al contexto del problema. Para ello, el estudiante interpreta, aplica y valora los resultados matemáticos, su coherencia y su validez en el contexto de partida.

En este ciclo, se realizan las acciones cognitivas más genuinas de las matemáticas, que PISA 2012 denomina capacidades matemáticas fundamentales: razonar y argumentar, comunicar, matematizar, representar, diseñar estrategias para resolver problemas, usar lenguaje formal, simbólico y las operaciones, y usar herramientas matemáticas.

En la tabla 1, presentamos una descripción más detallada de la relación entre las capacidades matemáticas fundamentales (CMF, en la tabla) y los procesos matemáticos como la propone el marco conceptual de PISA 2012 (p. 18).

Tabla 1

Relación entre procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales

	Procesos matemáticos		
CMF	Formular	Emplear	Interpretar y evaluar
Comunicación	Leer, descodificar e interpretar enunciados, preguntas, tareas, objetos, imágenes o animaciones (en la evaluación electrónica) para crear un modelo mental de la situación	Articular una solución, mostrar el trabajo asociado a la obtención de la misma y/o resumir y presentar los resultados matemáticos intermedios	Elaborar y presentar explicaciones y argumentos en el contexto del problema

Tabla 1
Relación entre procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales

CMF	Procesos matemáticos: Formular	Emplear	Interpretar y evaluar
Matematización	Identificar las variables y estructuras matemáticas subyacentes al problema del mundo real y formular supuestos de modo que puedan utilizarse	Utilizar la comprensión del contexto para guiar o acelerar el proceso de resolución matemático, p. ej., trabajando a un nivel de precisión apropiado al contexto	Comprender el alcance y los límites de una solución matemática que son el resultado del modelo matemático empleado
Representación	Crear una representación matemática de información del mundo real	Interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones cuando se interactúa con un problema	Interpretar los resultados matemáticos en distintos formatos con relación a una situación o uso; comparar o valorar dos o más representaciones con relación a una situación
Razonamiento y argumentación	Explicar, defender o facilitar una justificación de la representación identificada o elaborada de una situación del mundo real	Explicar, defender o facilitar una justificación de los procesos y procedimientos utilizados para determinar un resultado o solución matemática. Relacionar datos para llegar a una solución matemática, hacer generalizaciones o elaborar un argumento de varios pasos	Reflexionar sobre la soluciones matemáticas y elaborar explicaciones y argumentos que apoyen, refuten o proporcionen una solución matemática a un problema contextualizado
Diseño de estrategias para resolver problemas	Seleccionar o diseñar un plan o estrategia para reformular matemáticamente problemas contextualizados	Activar mecanismos de control eficaces y sostenidos en un procedimiento con múltiples pasos conducente a una solución, conclusión o generalización matemática	Diseñar e implementar una estrategia para interpretar, valorar y validar una solución matemática a un problema contextualizado

Tabla 1
Relación entre procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales

	Procesos matemáticos		
CMF	Formular	Emplear	Interpretar y evaluar
Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico	Utilizar variables, símbolos, diagramas y modelos estándar apropiados para representar un problema del mundo real empleando un lenguaje simbólico/formal	Comprender y utilizar constructos formales basándose en definiciones, reglas y sistemas formales, así como mediante el empleo de algoritmos	Comprender la relación entre el contexto del problema y la representación de la solución matemática. Utilizar esta comprensión para favorecer la interpretación de la solución en su contexto y valorar la viabilidad y posibles limitaciones de la misma
Utilización de herramientas matemáticas	Utilizar herramientas matemáticas para reconocer estructuras matemáticas o describir relaciones matemáticas	Conocer y ser capaz de utilizar adecuadamente distintas herramientas que puedan favorecer la implementación de procesos y procedimientos para determinar soluciones matemáticas	Utilizar herramientas matemáticas para determinar la razonabilidad de una solución matemática y los límites y restricciones de la misma, dado el contexto del problema

Las expectativas del nivel superior consisten en desarrollar en el estudiante las capacidades matemáticas fundamentales que subyacen a los tres procesos matemáticos, como se muestra en la tabla 1. Aunque, como veremos más adelante, se pueden considerar otros listados de expectativas de nivel superior, en MAD adoptaremos el conjunto de capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos como la referencia de las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

1. Otras expectativas de aprendizaje de nivel superior

Además de las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos, hay otras expectativas de aprendizaje que también están en el nivel superior aunque reciben otros nombres. Por ejemplo, están en el nivel superior de expectativas las competencias matemáticas descritas en documentos anteriores de la OCDE (2003 p. 40): pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, y usar herramientas y recursos. También corresponden al nivel superior los procesos generales de la actividad matemática descritos en los documentos *Lineamientos generales de procesos curriculares. Hacia la construcción de comunidades educativas autónomas* (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 1998b) y *Estándares básicos de competencias en* *lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006): formular y resolver problemas, modelar procesos y fenómenos de la realidad, comunicar, razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos.

La tabla 2, adaptada a partir de los apuntes del módulo 1, sugiere una relación entre los procesos generales y las capacidades matemáticas fundamentales que no pretende ser sistemática.

Tabla 2
Procesos generales y capacidades matemáticas fundamentales

Lineamientos	PISA 2012
Formulación, tratamiento y resolución de problemas	Diseño de estrategias para resolver problemas
Modelación	Matematización
Comunicación	Comunicación
Razonamiento	Razonamiento y argumentación
Formulación, comparación y ejercitación de procedimientos	Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico
	Representación
	Utilización de herramientas matemáticas

El documento de *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (MEN, 2006, pp. 50-51) considera los cuatro procesos siguientes, que, según indica explícitamente el propio documento, son equivalentes a los procesos generales anteriores, descritos en el documento de los lineamientos: formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas; utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista; usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración; y dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y porqué usarlos de manera flexible y eficaz.

El nivel de planificación para el aula que realiza el profesor sobre un contenido matemático necesita una elevada concreción que parece alejada de las expectativas de nivel superior. Pero es imprescindible que, a la hora de realizar la planificación para el aula de una unidad didáctica de matemáticas, el profesor tenga en cuenta la contribución de dicha planificación a las expectativas de nivel superior establecidas para la etapa. Hay que tener en cuenta este nivel en todos los sentidos, desde la selección de tareas a la evaluación, pasando por la metodología. Más adelante se concretará esta idea.

5. Nivel medio: objetivos de aprendizaje

En el nivel medio, situamos las expectativas de aprendizaje que cumplen las características siguientes:

- están vinculadas a un nivel educativo concreto;
- están asociadas a un contenido matemático concreto; y
- expresan una expectativa de aprendizaje que no puede reducirse a la realización de un procedimiento matemático rutinario, sino que tiene que involucrar conexiones entre los conceptos y procedimientos involucrados en la estructura conceptual, los sistemas de representación en que se representa y los fenómenos que organiza.

Por simplicidad en el lenguaje, y porque se trata de una denominación bastante habitual para referirnos a las expectativas de aprendizaje que cumplen estos requisitos, nos referiremos a las expectativas de aprendizaje de nivel medio como objetivos de un tema de matemáticas. Por ejemplo, dos objetivos correspondientes a una unidad didáctica sobre el tema Función cuadrática para un nivel de 16 años podrían ser los siguientes.

1. Reconocer y usar el significado gráfico de los parámetros en las formas simbólicas de la función cuadrática y comunicar y justificar el resultado de su uso.
2. Interpretar fenómenos de movimiento rectilíneo acelerado mediante la función cuadrática.

Estos objetivos hacen referencia a las relaciones que se dan entre los distintos sistemas de representación de la función cuadrática y a uno de los fenómenos organizados por esta noción.

En el diseño de una unidad didáctica, se acostumbra formular un conjunto de tres a cinco objetivos. Estos objetivos son frases sintéticas que pretenden expresar las expectativas que el profesor tiene sobre el aprendizaje de sus estudiantes a lo largo de la unidad didáctica. En este sentido, los objetivos se convierten en el núcleo central del diseño de la unidad didáctica. Ellos recogen el trabajo de análisis del contenido del tema que se aborda, y se convierten en la referencia para el análisis y selección de tareas, y para el diseño de los instrumentos y procedimientos de evaluación que se abordarán en los módulos 4 y 5, respectivamente. Por estas razones, es importante y necesario tener criterios y procedimientos sistemáticos para la redacción de los objetivos de la unidad didáctica, para su caracterización, y para su evaluación y revisión. En este subapartado, abordamos la primera de estas cuestiones. Para ello, vamos a tener en cuenta las reflexiones que hemos realizado en los apartados anteriores en relación con las expectativas de aprendizaje de nivel superior y el trabajo hecho con motivo del análisis de contenido del tema.

1. Relación de los objetivos con las expectativas de nivel superior: procesos matemáticos

En los apartados anteriores, hemos concretado las expectativas de nivel superior a las que esperamos que la unidad didáctica contribuya. Nuestro interés en fomentar la competencia matemática de los estudiantes en términos del marco conceptual del proyecto PISA 2012 nos llevó a establecer dos tipos de expectativas de aprendizaje de nivel superior: los procesos matemáticos de formular, emplear, interpretar y evaluar, y las siete capacidades matemáticas fundamentales (diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, representación, y utilización de herramientas matemáticas).

Cuando se revisan los objetivos de los planes de área de las instituciones educativas colombianas, se aprecia que, en muchas ocasiones, estos objetivos hacen referencia casi exclusivamente al proceso matemático de emplear, en términos de procedimientos que se espera que el estudiante sea capaz de realizar en el sistema de representación simbólico. Este sería el caso, por ejemplo, de un objetivo como "Ser capaz de usar la fórmula del factorial para calcular el número de permutaciones dado el tamaño del conjunto y de los arreglos". Aún si los objetivos no son tan específicos a los procedimientos y al sistema de representación simbólico, la mayoría de los objetivos que los profesores formulan en su práctica diaria se refieren al proceso matemático de emplear y dan poca importancia a los otros procesos matemáticos (formular e interpretar y evaluar).

Cuando algunos de estos objetivos se refieren a los otros procesos, lo hacen de manera general: "Resolver problemas que impliquen la noción de permutación sin repetición". Un objetivo de este tipo implica todo el ciclo de construcción de modelos matemáticos y usualmente hace referencia a problemas de palabras en los que el modelo matemático es evidente y el contexto juega un papel decorativo. Es decir, los problemas no requieren realmente los procesos matemáticas de formular, interpretar y evaluar. Nosotros esperamos que los objetivos que formulemos para la unidad didáctica sean más explícitos en su contribución a los procesos matemáticos. Esto implica formular frases como "Reconocer aquellas situaciones en diversos contextos en los que es posible usar la noción de permutación sin repetición para resolver problemas y ser capaz de transformar esas situaciones en diversas representaciones matemáticas" o "Reflexionar sobre las soluciones o resultados que se obtienen al resolver un problema con la noción de permutación sin repetición, interpretar esas soluciones o resultados en el contexto del problema y evaluar la validez de las mismas".

Las reflexiones anteriores nos llevan a sugerir que, cuando formulemos los objetivos de nuestra unidad didáctica, nos preguntemos si el conjunto de objetivos contribuyen coherentemente al desarrollo de los tres procesos matemáticos que caracterizan las etapas del ciclo de construcción de modelos matemáticos. La revisión de nuestro conjunto de objetivos, desde esta perspectiva, nos puede llevar a reformular uno o más de ellos.

2. Relación de los objetivos con las expectativas de nivel superior: capacidades matemáticas fundamentales

Nuestro interés por que nuestra unidad didáctica contribuya a los tres procesos matemáticos que caracterizan el proceso de resolución de problemas en diversos contextos, puede hacernos pensar que toda unidad didáctica debería contribuir a todas las capacidades matemáticas fundamentales propuestas por el proyecto PISA 2012 que subyacen a esos procesos matemáticos. Esta sería la situación ideal. No obstante, el contexto institucional, las características del tema y el interés del profesor puede llevarlo a buscar desarrollar con más énfasis ciertas capacidades matemáticas fundamentales. Si esto es así, es necesario que las capacidades matemáticas fundamentales seleccionadas se hagan explícitas antes de formular los objetivos. Buscar incluir las capacidades matemáticas fundamentales explícitamente en las frases que designan los objetivos puede implicar unas redacciones demasiado complejas. No obstante, en algunos casos esto es posible y deseable.

Es el caso, por ejemplo, de las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación, razonamiento y argumentación. Un objetivo que requiera la capacidad para justificar y comunicar los resultados es más complejo e implica unas expectativas de aprendizaje más amplias que uno que no la incluya.

La relación entre las capacidades matemáticas fundamentales y los objetivos se aprecia en dos momentos. En primera instancia, cuando se redactan los objetivos, se ha de tener en cuenta la intención de contribuir a las capacidades matemáticas fundamentales seleccionadas, aún si estas capacidades matemáticas fundamentales no quedan incluidas explícitamente en la redacción de los objetivos. En segunda instancia, cuando, más adelante, se caractericen los objetivos en términos de sus grafos de secuencias de capacidades, será posible evaluar en qué medida cada objetivo contribuye al desarrollo de cada capacidad matemática fundamental. Este análisis puede dar lugar a la revisión y reformulación de algunos objetivos.

Al ser expectativas de aprendizaje transversales a los contenidos y de largo alcance, las expectativas de aprendizaje de nivel superior (procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales) son elementos de referencia en la redacción de los objetivos. La formulación específica de los objetivos no tiene necesariamente que hacer referencia explícita a estas expectativas de aprendizaje. No obstante, el profesor debe tenerlas en mente cuando construye el conjunto de objetivos y deberá, más adelante, con base en la caracterización de los objetivos, establecer en qué medida ellos contribuyen a esas expectativas de aprendizaje y revisar la redacción de los objetivos con base en los resultados de ese análisis.

3. Relación con el análisis de contenido del tema

El análisis de contenido del tema permite establecer, organizar y relacionar su multiplicidad de significados. Esta información permite delimitar, en una primera instancia, el contenido que se desea abordar con la unidad didáctica. En segunda instancia, el profesor puede haber identificado el o los estándares relacionados con su tema y a los que quiere contribuir con la unidad didáctica. La formulación de los objetivos son la tercera y última instancia del proceso de concreción del tema de la unidad didáctica. Al formular los objetivos, el profesor delimita el contenido que se va abordar en la unidad didáctica. Por esta razón, cuando el profesor formula los objetivos de la unidad didáctica debe tener en cuenta la información que produjo al realizar el análisis de contenido. Es el momento en el que, el profesor selecciona los significados que espera que sus estudiantes desarrollen.

Recordemos que un objetivo debe estar asociado a un contenido matemático concreto y expresa una expectativa de aprendizaje que no puede reducirse a la realización de un procedimiento matemático rutinario. Tiene que involucrar conexiones entre los conceptos y procedimientos involucrados en la estructura conceptual, los sistemas de representación en que se representa y los fenómenos que organiza. En este sentido, el profesor debe buscar establecer una relación estrecha entre el análisis de contenido del tema y la redacción de los objetivos. Él debe buscar que los objetivos relacionen adecuadamente los conceptos y procedimientos que considera relevantes, los sistemas de representación mas importantes y la forma cómo el tema organiza los fenómenos para los que sirve de modelo.

Al buscar contribuir a la competencia matemática de los estudiantes, el profesor debe tener en cuenta muy especialmente la información que surgió del análisis fenomenológico de su tema.

En particular, debe asegurarse que los objetivos implican los diferentes contextos fenomenológicos que ha establecido. Y si los objetivos no implican alguno de estos contextos fenomenológicos, el profesor debería justificar por qué. Abordar la formulación de los objetivos desde la perspectiva de los contextos fenomenológicos implica que se tienen en cuenta las subestructuras matemáticas que están relacionadas con ellos. Esto implica atender a los conceptos y procedimientos que configuran esas subestructuras matemáticas y a las formas en las que ellas se pueden representar. De esta forma, al partir de los contextos fenomenológicos y relacionarlos con las subestructuras matemáticas y las representaciones, el profesor puede formular objetivos que satisfagan las condiciones que hemos mencionado anteriormente.

El o los estándares que el profesor ha seleccionado y a los que quiere contribuir también son una referencia importante a la hora de formular los objetivos. En algunos casos, un estándar puede tener el nivel de concreción de un objetivo y el profesor debe sencillamente adaptar su redacción al contexto específico de su unidad didáctica. En otros casos, el estándar tiene un carácter general y expresa expectativas de aprendizaje de un nivel superior. En este caso, el profesor debe atender al estándar de la misma forma que mencionamos en el apartado anterior cuando nos referimos a las capacidades matemáticas fundamentales. Por ejemplo, el estándar siguiente, de grados 4º y 5º, asociado a pensamiento espacial y sistemas geométricos, "Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades", nos ha servido de orientación para redactar los objetivos siguientes, que forman parte de la programación de una unidad didáctica sobre el tema Poliedros en el nivel de 13 años.

- Distinguir los poliedros regulares.
- Reconocer las propiedades más significativas de los poliedros regulares en relación con la simetría.

4. Contextos sociales, institucionales y académicos

Al concretar el tema sobre el que se va a desarrollar la unidad didáctica, hemos especificado también el contexto institucional y el grado en el que se va a implementar. Al formular los objetivos, debemos tener en cuenta estos dos aspectos.

La concreción del tema implicó establecer y describir las características de la institución en la que se va a implementar la unidad didáctica y de los estudiantes con los que se va a trabajar. Esto implica delimitar las posibilidades que ofrece la institución para realizar actividades y las posibilidades, con base en sus características personales, sociales y académicas, que los estudiantes tienen para lograr el aprendizaje que el profesor quiere promover con ellos. Nosotros debemos adaptar la redacción de los objetivos a estas condiciones. Por ejemplo, debemos tener en cuenta el grado al que pertenecen los estudiantes. Desarrollamos a continuación esta idea como ejemplo del tipo de reflexión que es necesario hacer.

El enunciado de un objetivo, en sí mismo, no tiene porqué informar sobre el nivel educativo para el que se propone. Más bien, ocurre que, al especificar el nivel educativo para el que se establece un objetivo, aportamos información adicional sobre el mismo. Por ejemplo, si enunciamos el objetivo "Aplicar el teorema de Pitágoras", podemos tener la intención de que los estudiantes resuelvan problemas de cálculo de distancias inaccesibles en cuya modelización aparecen triángulos rectángulos, o bien de que construyan ángulos rectos con cuerdas de nudos. Si ahora indicamos que el objetivo es para estudiantes de 13 años, estamos aportando como información adicional que nos referimos a la segunda opción. En resumen, la redacción de un objetivo, acompañada del nivel educativo al que va dirigido, concreta a un espacio temporal delimitado y breve las expectativas de aprendizaje deseables en ese periodo.

5. Resumen: criterios y estrategias para redactar objetivos

En los párrafos anteriores, hemos establecido las características de un objetivo e identificado algunos elementos que delimitan y condicionan la redacción de objetivos. En este apartado, resumimos estas ideas en términos de preguntas que el profesor se puede hacer al redactar sus objetivos o revisar esa redacción.

La reflexión sobre la relación entre los objetivos y las expectativas de nivel superior dan lugar a las siguientes preguntas.

- ¿En qué medida los objetivos contribuyen a los tres proceso matemáticos?
- ¿Se promueve la puesta en juego de los procesos matemáticos de formular, interpretar y evaluar?

Las siguientes preguntas se refieren a la relación entre los objetivos y las capacidades matemáticas fundamentales.

- ¿Se pretende contribuir de manera especial a algunas capacidades matemáticas fundamentales específicas?
- Si es así, ¿a cuáles y por qué?
- ¿Se tuvo en cuenta la intención de contribuir a las capacidades matemáticas fundamentales en la redacción de los objetivos?

La relación entre la información que surge del análisis de contenido y la redacción de los objetivos se puede verificar con las siguientes preguntas.

- ¿Se atendió a la información que surgió del análisis de contenido para redactar los objetivos?
- Al hacerlo, ¿se tomaron decisiones sobre los significados del tema que se van a abordar y aquellos que no se van a abordar?
- ¿Se justificó la decisión que se tomó sobre aquellos significados que no se van a abordar?
- ¿Los objetivos atienden a los contextos fenomenológicos identificados en el análisis de contenido?
- Si se decidió no abordar uno o más de estos contextos fenomenológicos, ¿se está justificando esa decisión?
- ¿La redacción de los objetivos refleja la relación entre los contextos fenomenológicos, los conceptos y procedimientos implicados en las subestructuras matemáticas y sus representaciones?
- ¿Se tuvieron en cuenta el o los estándares a los que se quiere contribuir cuando se redactaron los objetivos?

Finalmente, las siguientes preguntas permiten verificar la adaptación de la redacción de los objetivos a los contextos en los que se va a implementar la unidad didáctica.

- ¿La redacción de los objetivos tuvo en cuenta las características de la institución en la que se va a implementar la unidad didáctica?

- ¿Los objetivos se adaptan a las características sociales, personales y académicas de los estudiantes a los que se dirige la unidad didáctica?
- ¿Se ha hecho explícito el nivel educativo en el que se va a implementar la unidad didáctica?
- ¿Los objetivos tienen en cuenta ese nivel educativo?

6. Nivel inferior. Capacidades

El nivel inferior de expectativas de aprendizaje está directamente relacionado con las actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan los procedimientos rutinarios básicos del tema matemático. Por simplificar el lenguaje, denominaremos capacidades a las expectativas de aprendizaje de este nivel. Así, definimos una *capacidad* como una expectativa del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea de tipo rutinario asociada a un tema matemático. Las capacidades se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes, por lo cual es importante que estén enunciadas de forma que quede clara cuál es la información de partida y cuál es la información que se genera al poner en juego la capacidad.

En este nivel, estamos introduciendo la idea de *procedimiento rutinario* como elemento central en la descripción de la capacidad. El calificativo de rutinario para un procedimiento depende del nivel cognitivo de los estudiantes para los que se vaya a realizar la planificación. Por ejemplo, el procedimiento para calcular el máximo o el mínimo de una función cuadrática es rutinario si los estudiantes ya conocen las aplicaciones de la derivada (a los 17 años), pero no lo es, si están aprendiendo de forma intuitiva nociones de crecimiento y decrecimiento de funciones (a los 14 años). Por tanto, a los 17 años, podríamos decir que calcular el máximo o el mínimo de una función cuadrática es una capacidad. Pero, a los 14 años, tendríamos que enunciar varias capacidades asociadas a ese procedimiento, como elaborar una tabla de valores numéricos a partir de la expresión simbólica de la función; representar gráficamente una tabla de valores; e interpretar gráficamente los máximos y mínimos. Unos párrafos más adelante retomaremos esta idea.

1. Redacción de las capacidades de un tema matemático

Aunque una misma capacidad podría corresponder a varios objetivos distintos, para obtener la lista de capacidades de un tema suele ser útil fijar un objetivo y pensar en los procedimientos rutinarios que el estudiante necesita saber hacer como condición necesaria para poder decir que ha desarrollado dicho objetivo. Además, al involucrar procedimientos rutinarios, el conocimiento procedimental que se identifica al realizar el análisis de contenido es una fuente de información de primer orden para determinar las capacidades asociadas a un objetivo.

La figura 11 muestra un esquema del análisis de contenido correspondiente al objetivo 1 sobre la función cuadrática (Reconocer y usar el significado gráfico de los parámetros en las formas simbólicas de la función cuadrática y comunicar y justificar el resultado de su uso). En esta figura, aparecen representados los procedimientos que transforman cada una de las formas simbólicas de la función cuadrática en otras, el significado gráfico de los parámetros de cada una de dichas formas simbólicas y las transformaciones que sufre la representación gráfica de la función cuadrática al variar esos parámetros.

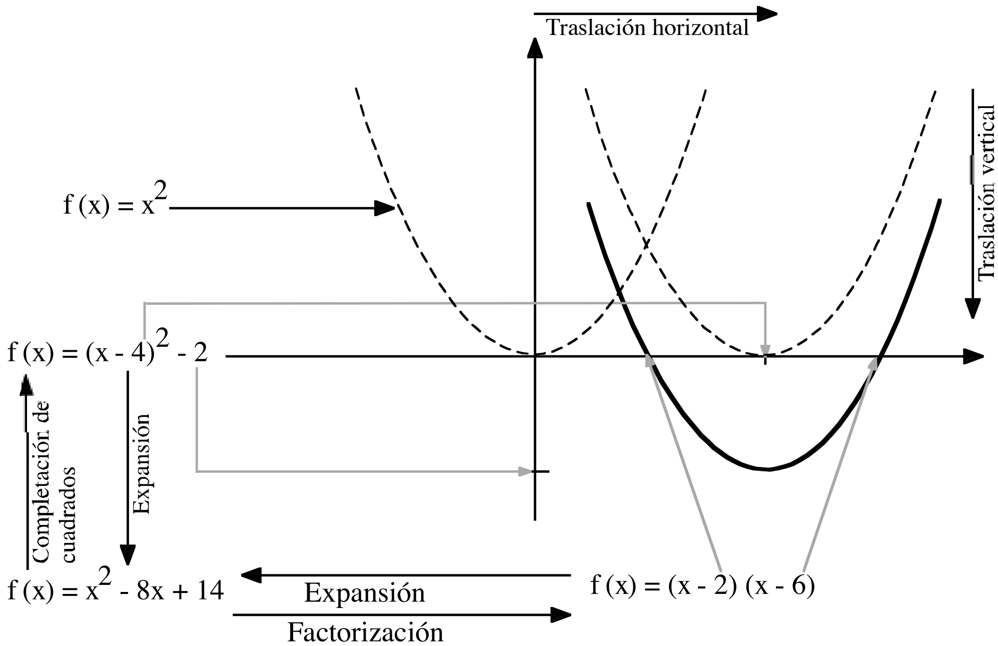

Figura 11. Procedimientos que relacionan las distintas formas de representar la función cuadrática

A partir de esta información, que surge del análisis de contenido, hemos obtenido la tabla 3, que contiene una lista de 16 capacidades asociadas al objetivo 1 anterior sobre la función cuadrática (Gómez, 2007).

Tabla 3
Listado de capacidades asociadas al objetivo 1 sobre la función cuadrática

Cod	Capacidad
	Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de (transformaciones simbólicas):
C1	completación de cuadrados
C2	Expansión
C3	Factorización
	Identificar, mostrar y justificar los parámetros de la
C4	forma canónica (a, h, k)
C5	forma foco (p, h, k)
C6	forma estándar (a, b, c)
C7	forma multiplicativa (a, r1, r2)

	Identificar, mostrar y justificar los siguientes elementos gráficos
C8	coordenadas del vértice
C9	puntos de corte con el eje Y
C10	puntos de corte con el eje X
C11	coordenadas del foco
C12	ubicación de la directriz
C13	ubicación del eje de simetría
	Ejecutar, comunicar y justificar los procedimientos de (transformaciones gráficas):
C14	Translación horizontal
C15	Translación vertical
C16	Dilatación

Nótese que el propio enunciado de cada capacidad podría usarse como enunciado de una tarea rutinaria propuesta al alumno. Así, por ejemplo, un alumno ha desarrollado la capacidad C1 cuando saber resolver una tarea como la siguiente:

> Expresa la función $f(x)= x^2 +12 x +10$ en forma canónica

Las capacidades expresan los procedimientos rutinarios que forman parte del desarrollo de los objetivos. Pero no podemos concretar, de forma precisa y con carácter general, cuál es la frontera entre lo rutinario y lo no rutinario. Esto nos lleva a preguntamos cuál es el nivel de detalle requerido para redactar las capacidades de un tema. Ya hemos dicho que el nivel cognitivo de los estudiantes para los que estamos haciendo la planificación puede ayudarnos a determinar ese nivel de detalle. Por tanto, previamente a la redacción de capacidades de un tema, es importante establecer cuáles son los conocimientos previos de dichos estudiantes. Esto nos permite delimitar el punto de partida de lo que consideramos rutinario para estos estudiantes. Podemos establecer estos conocimientos en términos de capacidades. Las llamaremos las capacidades correspondientes a los conocimientos previos.

Un segundo problema, relacionado con el anterior, que surge al describir las capacidades de un tema es decidir hasta donde llegar. Por ejemplo, si redactamos como capacidad "elaborar una tabla de valores numéricos a partir de la expresión simbólica de la función", nos preguntamos si también es necesario redactar "sustituir valores numéricos en una expresión simbólica" y, si seguimos remontando, llegamos a preguntarnos si también es necesario redactar "calcular el cuadrado de un número". Con carácter general, podemos decir que no es necesario redactar capacidades que expresen procedimientos excesivamente alejados del tema matemático analizado por su transversalidad o por ser suficientemente conocidos por los estudiantes. Recordemos que las capacidades deben recordarnos a una tarea de tipo rutinario que tenga sentido en el tema matemático analizado. Retomando el ejemplo anterior, "elaborar una tabla de valores numéricos a partir de la expresión simbólica de la función" sí sería una capacidad por tener sentido como tarea rutinaria en el tema de la función cuadrática, pero las siguientes no serían capacidades del tema: “sustituir valores numéricos en una expresión simbólica” o “calcular el cuadrado de un número”. Ambas tienen carácter transversal, no tendrían sentido como tareas propias del tema de función cuadrática y podrían formar parte de las capacidades relacionadas con los conocimientos previos de los estudiantes.

Algunas recomendaciones básicas que pueden resultar útiles para obtener las capacidades de un tema son las siguientes.

Conocimientos previos. Es necesario determinar los conocimientos previos de los estudiantes. Estos conocimientos delimitan el punto de partida de lo que consideramos rutinario para estos estudiantes.

Conocimiento procedimental. Se puede utilizar la lista de conocimiento procedimental que surge del análisis de contenido del tema: los niveles más bajos de conocimiento procedimental corresponden a las capacidades.

Tareas rutinarias. Es útil identificar tareas rutinarias propias del tema porque están directamente asociadas a procedimientos rutinarios y, por tanto, a capacidades.

Resolución de tareas complejas. Al resolver algunas tareas complejas del tema, podemos identificar los procedimientos rutinarios que se requieren y que suelen ser compartidos por varias tareas complejas. Puede ser útil realizar este proceso en parejas o en grupo: una persona resuelve la tarea diciendo en voz alta lo que hace o piensa en cada paso y otra persona lo registra por escrito. En la descripción hecha por el resolutor es posible identificar numerosas capacidades.

Comparar enunciados. Al comparar entre sí enunciados de distintas capacidades, podemos establecer si corresponden al mismo nivel cognitivo. Si vemos, por ejemplo, que un enunciado se puede expresar en términos de dos o más enunciados, entonces es demasiado general para ser considerado una capacidad.

Las capacidades representan los conocimientos básicos que forman parte del desarrollo de los objetivos. Pero, siendo importantes estos conocimientos, el desarrollo de los objetivos que nos interesan se asocia al hecho de que el alumno sepa cómo combinarlos adecuadamente ante la resolución de tareas complejas. Es decir, el alumno debe ser capaz de ejecutar secuencias de capacidades y debe ver dichas secuencias de un modo global. Asimismo, dichas secuencias deben poder entremezclarse de forma coherente y con flexibilidad. En el apartado 4, se formalizará esta idea mediante la noción de camino de aprendizaje. Pero antes, necesitamos introducir otras ideas que también intervienen en el desarrollo de los objetivos de aprendizaje: la dificultad y el error.

7. DIFICULTADES DE APRENDIZAJE Y ERRORES[2]

El análisis cognitivo también se ocupa de las limitaciones para el aprendizaje que, de diferente modo, pueden distorsionar, ralentizar o frenar el aprendizaje de los escolares. Es una manera de complementar la reflexión realizada sobre las expectativas de aprendizaje ya que, metafóricamente, el análisis cognitivo atiende tanto la parte positiva del aprendizaje (qué esperamos que sean capaces de hacer los escolares), como la parte negativa (qué limitaciones pueden surgir en ese proceso de aprendizaje).

Son muchas las variables que intervienen en la caracterización de las limitaciones del aprendizaje. Algunas se relacionan con aspectos sociales, como el ambiente familiar o el nivel socio cultural. Otras, se ocupan de trastornos cognitivos que pueden afectar al rendimiento en matemáticas. Nuestra perspectiva es muy concreta: en el análisis cognitivo nos preocuparemos de limitaciones de aprendizaje relacionadas con temas matemáticos particulares. Para ello, siguiendo el modelo de los organizadores del currículo propuesto por Rico (1997), consideraremos las dificultades y los errores, como dos tipos relacionados de limitaciones en el aprendizaje. A continuación, los caracterizamos y ejemplificamos. Pero es importante señalar que, aunque el análisis cognitivo se focaliza en un tema matemático, algunas de estas limitaciones trascienden al tema matemático, son de tipo transversal y se expresan mediante enunciados generales que después se concretan de distintas formas sobre cada tema. Es importante que el profesor maneje simultáneamente estos distintos niveles. En lo que sigue, quedará más claro el alcance de esta observación.

1. Dificultades de aprendizaje en matemáticas

Una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos. Mantendremos, a nivel teórico, esta definición general, que se irá concretando más adelante a través de ejemplos y de la relación entre las dificultades y los errores. La importancia de las dificultades reside en identificarlas, conocer qué factores son los responsables de que aparezcan y saber de qué modo se pueden superar. Dado que los errores son la expresión observable de las dificultades, estas últimas permiten organizar los errores. Socas (1997) organiza las dificultades de aprendizaje de las matemáticas en cinco categorías, según los factores que las originan (p. 126).

1. Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos. Estas dificultades tienen que ver con la propia naturaleza de los conceptos matemáticos, con su naturaleza teórica y formal y, al mismo tiempo, práctica. Estas dificultades también se relacionan con las formas de representar esos conceptos y con las relaciones que se establecen entre esas representaciones. La complejidad de lenguaje que se usa en las matemáticas también está en la base de este tipo de dificultades. Por ejemplo, cuando se introducen las potencias, el sistema de representación utilizado desarrolla la

[2] La reflexión que realizamos en esta sección se sustenta fundamentalmente en los trabajos de Socas (1997) y Rico (1995). Además, utilizamos la reelaboración de estas ideas que ha realizado Lupiáñez (2009). Hemos incorporado algunos párrafos de este documento de forma literal.

idea de potencia como número de veces ($3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$), pero este significado falla cuando la idea de potencia se extiende a otros números (¿qué significado tiene $3^{5/6}$ en términos de número de veces?). En el anexo 1, detallamos esta dificultad relacionada con la complejidad del lenguaje matemático.

2. Asociadas a los procesos propios del pensamiento matemático. Estas dificultades se deben a la naturaleza lógica de las matemáticas. El desarrollo de explicaciones, argumentos y demostraciones concentran a menudo muchas de las dificultades de los escolares. La resolución de problemas y la modelización, aún cuando los escolares manejan con soltura nociones matemáticas, también genera numerosas dificultades. Por ejemplo, los estudiantes tienden a pensar que todas las operaciones matemáticas responden a un modelo lineal. Es esta la causa de que tengan dificultades para realizar operaciones no lineales, como es el caso de la potenciación (¿por qué no ocurre que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$?). En el anexo 2 damos algunos ejemplos más.

3. Asociadas a los procesos de enseñanza. Estas dificultades se deben a una determinada organización curricular, a la forma en que están realizados los agrupamientos en clase (homogéneo o heterogéneo), a determinados estilos de enseñanza, etc.

4. Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Las distintas teorías del aprendizaje especifican estadios de desarrollo intelectual que indican qué tipos de razonamiento y de tareas pueden resolver los alumnos en cada estadio.

5. Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. La consideración social de las matemáticas lleva, en ocasiones, a que los estudiantes desarrollen sentimientos de ansiedad o infravaloración personal.

Reiteramos que, en este módulo de MAD, centramos la atención en aquellas dificultades que son específicas al tema de la unidad didáctica. Esto implica que la mayoría de las dificultades que identificaremos se ubicarán en las dos primeras categorías anteriores. Identificar las dificultades y errores de un tema son procesos relacionados. En algunas ocasiones, el establecer una dificultad de nuestro tema nos permite identificar aquellos errores que son las manifestaciones observables de esa dificultad. Por otro lado, cuando identificamos errores concretos, debemos pensar en cuál es la dificultad que le da origen. Al final, tendremos un listado de errores que deberemos organizar en dificultades. En otras palabras, el resultado del análisis de las limitaciones de aprendizaje de nuestro tema debe ser un listado de dificultades en el que, para cada dificultad, identificamos los errores con los que esa dificultad se expresa en la práctica. A continuación, abordamos la idea de error en el aprendizaje de las matemáticas.

2. El error en el aprendizaje de las matemáticas

El error es la manifestación visible de una dificultad. El error es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas equivocadas a las cuestiones y tareas concretas que les demanda el profesor. Por ello, es el error el que más nos acerca al tema matemático que estemos analizando. Rico (1995) indica que la mayoría de los investigadores atribuyen a los errores las siguientes características.

- Son sistemáticos, no se producen por azar, manifiestan un proceso mental subyacente incompleto o equivocado que el sujeto utiliza de modo consistente y con confianza.
- Se manifiestan de manera sorprendente: por lo general se mantienen ocultos durante un tiempo y sólo surgen ante determinadas tareas.
- Son persistentes debido a que pueden afectar a una parte amplia de conocimiento adquirido que previamente ha tenido validez en otros contextos.
- Ignoran el significado, de modo que respuestas que son obviamente incorrectas no se cuestionan.

Esta caracterización excluye de la noción de error aquellas manifestaciones equivocadas de los alumnos que se dan por azar y que sólo reflejan una falta de cuidado o un lapsus ocasional. Una aclaración que queremos añadir es que, al igual que las capacidades y los objetivos, el listado de errores que pretendemos obtener debe estar asociado a un nivel educativo determinado y a unos estudiantes concretos, posiblemente hipotéticos. Por ello, se trata de un listado que no tiene porqué agotar todas las posibilidades que se encuentren en la literatura. En el siguiente apartado, concretamos el modo en que vamos a tratar las dificultades y los errores en el análisis cognitivo. No obstante, queremos indicar que la literatura trata los errores con profusión y, aunque nosotros los manejaremos de una forma particular, aportamos algunas referencias sobre el tema que pueden encontrarse en el anexo 3.

3. Dificultades y errores en el análisis cognitivo

Como mencionamos anteriormente, en el análisis cognitivo, nos centraremos en los errores que están relacionados con las dificultades 1 y 2, por ser estos los que están más directamente vinculados con el contenido matemático. No obstante, incluso en estos dos tipos, hemos expresado como dificultades enunciados generales como "la complejidad del lenguaje matemático". Esta dificultad, mirada desde un tema matemático, se concreta sobre los contenidos de dicho tema. Por ejemplo, en el tema de función cuadrática se expresaría como la "dificultad para relacionar las formas simbólicas y gráfica de la función cuadrática". Lo importante es que el profesor tenga como referente el enunciado general y sea capaz de mirarlo desde su tema matemático.

Para cada dificultad que el profesor haya expresado en un tema, él debe identificar el listado de errores que describen las manifestaciones equivocadas en las que él considera que pueden incurrir sus estudiantes. Por ejemplo, la dificultad expresada antes sobre la función cuadrática se manifestaría mediante errores como los siguientes (Zaslavsky, 1997):

- identificar el parámetro a de la forma estándar $ax^2 + bx + c$ con la pendiente de la parábola;
- considerar que el parámetro b de la forma estándar traslada horizontalmente la gráfica de la parábola; y
- considerar que el parámetro c de la forma estándar forma parte del vértice de la parábola.

Un análisis detallado de errores y dificultades sobre el número natural puede encontrarse en Lupiánez (2009). En la tabla 4 siguiente, mostramos un breve extracto adaptado de dicho trabajo.

Tabla 4
Algunas dificultades y errores relacionados con los números naturales

Dificultades	Errores
Predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa	Aplicar propiedades aditivas a la operatoria con potencias
	Resolver problemas multiplicativos mediante operaciones aditivas
Desconexión entre diferentes representaciones de los números naturales	Expresar incorrectamente números grandes en notación científica
	Aplicar la reglas de valor posicional del SDN a la numeración romana
Dificultades para interpretar las reglas que determinan el sistema decimal de numeración	Confundir el valor de una cifra con su valor posicional
	Leer o escribir incorrectamente números naturales en los que interviene el 0.

Estos listados de dificultades y errores han tenerse en cuenta a la hora de redactar los objetivos de un tema de matemáticas. Si pensamos que las limitaciones de aprendizaje son la cara negativa de las expectativas, entonces podemos incluir en las expectativas de aprendizaje nuestra intención de contribuir a que nuestros estudiantes puedan superar las dificultades y errores detectados. Los enunciados de objetivos y de capacidades de un tema deben incorporar, en consecuencia, elementos relacionados con las dificultades y errores. Por ejemplo, el objetivo 1 de la función cuadrática y las capacidades C6, C8 y C14 de la tabla 3, tratan específicamente las dificultades y errores que acabamos de enunciar para este tema. Los listados de dificultades y errores también intervendrán en la caracterización de los objetivos de aprendizaje a la que dedicamos la sección siguiente.

8. Caracterización de los objetivos de aprendizaje

Los objetivos de aprendizaje son un referente principal a la hora de seleccionar las tareas que van a conformar una propuesta docente. No obstante, es habitual redactar los objetivos utilizando frases cortas cuyo significado se supone evidente, sin constatar la complejidad de esas formulaciones (Lupiáñez, 2009). Es necesario aportar información adicional sobre el alcance de esas frases y esa información ha de ser útil a los efectos de comunicar de qué modo se pretende que el estudiante alcance los objetivos. Comencemos por distinguir tres tipos de tareas matemáticas asociadas a un objetivo.

Tareas prototípicas de un objetivo. Estas son las tareas matemáticas representativas del objetivo. El conjunto de tareas prototípicas de un objetivo es aquel conjunto de tareas que, para un profesor y unos estudiantes concretos, si los estudiantes logran resolverlas, entonces el profesor considera que ellos han logrado el objetivo.

Tareas de aprendizaje. Las tareas de aprendizaje son aquellas tareas que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que ellos logren las expectativas de aprendizaje que ha establecido y superen sus limitaciones de aprendizaje. Estas tareas matemáticas serán objeto de estudio en el análisis de instrucción. Allí se clasificarán atendiendo a varios criterios (tipos de tareas, interacciones, agrupamientos, significatividad, etc.) y se determinará el conjunto de tareas definitivo que el profesor selecciona para llevar a cabo la instrucción.

Tareas de evaluación. Las tareas de evaluación son aquellas tareas matemáticas se pueden utilizar para evaluar el logro del objetivo, posiblemente en distintos momentos de su desarrollo.

En el análisis cognitivo sólo nos interesaremos por las tareas en la medida en que nos permitan concretar el alcance de un objetivo, como veremos en lo que sigue. Para este propósito, sólo nos interesan las tareas prototípicas asociadas a un objetivo. Ejemplificaremos estas ideas más adelante.

1. Caminos de aprendizaje de una tarea

Las capacidades intervienen en el desarrollo de conocimientos más elaborados y permiten describir procesos de resolución de tareas complejas. En efecto, durante el proceso de resolución de una tarea matemática de una cierta complejidad, la conducta observable del estudiante se puede describir mediante una sucesión ordenada de capacidades. Además, el profesor puede prever que, cuando los estudiantes resuelven una tarea, ellos pueden incurrir en errores propios del tema. Estos errores también se pueden registrar de forma ordenada e intercalada con las capacidades. La noción de camino de aprendizaje capta estas ideas en el contexto en el que el profesor planifica y hace hipótesis sobre la manera de proceder de sus estudiantes. Un *camino de aprendizaje* de una tarea es una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en los que pueden incurrir. Veamos un ejemplo en la tarea denominada *T1.Letras* del tema permutaciones sin repetición (Benavides, Carrillo, Ortiz, Parra y Velasco, 2014)[3]. Podemos encontrar las capacidades y los errores a los que se refieren estos caminos en el anexo 4[4].

> *T1.Letras*
>
> ¿De cuántas maneras posibles puedo ubicar las letras A, B, C y D seguida una de la otra y teniendo en cuenta que ninguna de ellas se puede repetir?

Un camino de aprendizaje de esta tarea aparece en la figura 12.

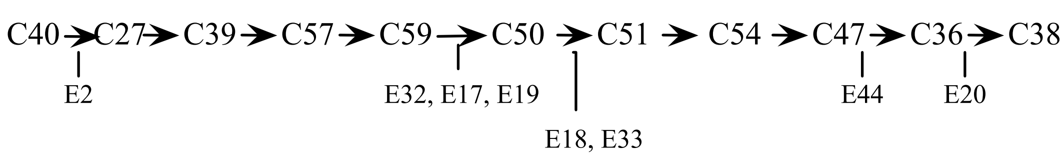

Figura 12. Camino de aprendizaje de una tarea

[3] En este texto, utilizamos ejemplos producidos por el grupo 5 de MAD 2, compuesto por el grupo de profesores de secundaria David Benavides, Andrés Carrillo, Milena Ortiz, Sara Parra y Carlos Velasco. Los ejemplos que utilizamos en este trabajo están basados en el tema matemático "Permutaciones sin repetición" sobre el que ha trabajado este grupo. Sus propuestas nos han inspirado para seguir profundizando en los ejemplos y desarrollos que aportamos aquí.

[4] Este anexo también se puede descargar en http://cl.ly/3h3l0l130W0f

En este camino de aprendizaje, se aprecia la siguiente previsión que hace el profesor sobre la actuación de sus estudiantes: la lectura del enunciado les evocará la noción de permutación como concepto que permite resolver la tarea (C40); continuarán extrayendo del enunciado aquellos datos que utilizarán para realizar el cálculo de permutaciones (C27); en ese momento, podrían incurrir en el error (E2) de tomar elementos repetidos; seguidamente, plantearán distintos sistemas de representación útiles al cálculo de permutaciones (C39); reconocerán que no es necesario emplear una fórmula para hacer el cálculo (C57), por lo que utilizarán un sistema de representación como herramienta de conteo (C59); en ese momento, podrían incurrir en errores como presentar una fórmula pero no desarrollarla (E32), fijar sólo algunos valores en ella y no lograr concretar un resultado (E17) o repetir una variable a pesar de haberla fijado (E19); si no se presentan esos errores, los estudiantes elegirán una lista como sistema de representación y reconocerán un patrón de orden al construir las listas que les ayude a evitar repeticiones en los arreglos (C50); pero es posible que no incluyan la cantidad de arreglos que obtuvieron al fijar la primera variable en el resultado final (E18), o que obtengan una respuesta incompleta por ensayo y error (E33); si identifican un patrón de orden adecuado, asociarán cada arreglo de la lista con una permutación (C51) y expresarán los arreglos utilizando el sistema de representación elegido (C54), interpretando el resultado en el contexto de la tarea (C47); en este momento, pueden incurrir en el error de expresar un número de permutaciones sin repetición mayor o menor al esperado (E44); realizarán el conteo de los arreglos obtenidos utilizando diagramas y expresarán la cantidad resultante (C36); es posible que la solución que obtengan sea un número incoherente con los datos de la tarea por conteo incorrecto o incompleto (E20); finalmente, justificarán la respuesta obtenida relacionando la cantidad de permutaciones encontrada con la pregunta planteada (C38).

Debido a que una tarea se puede resolver de distintas formas, el profesor puede prever distintos caminos de aprendizaje para ella. La figura 13 presenta, en forma de grafo, cinco caminos de aprendizaje previstos para la tarea T1.

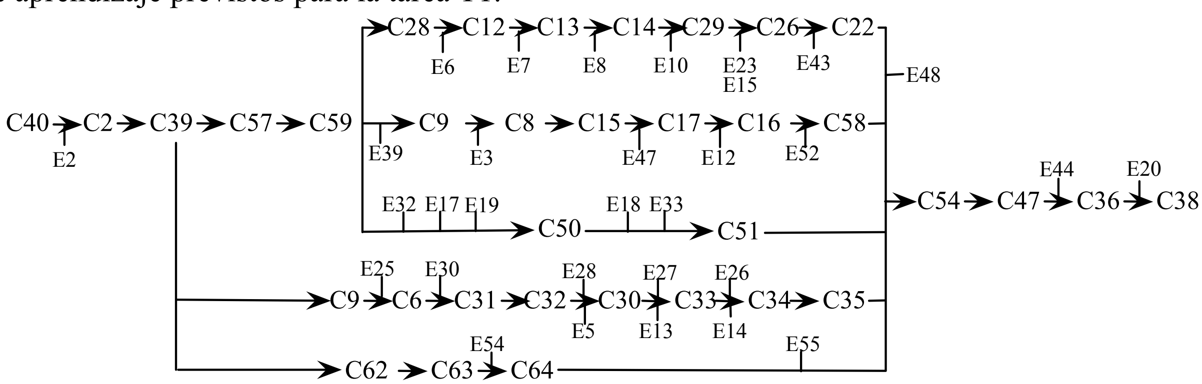

Figura 13. Grafo que recoge los caminos de aprendizaje de la tarea T1

2. Grafo de secuencias de capacidades de una tarea

Los grafos que recogen los caminos de aprendizaje de algunas tareas pueden ser muy complejos. Además, como veremos en lo que sigue, necesitaremos mirar conjuntamente varias tareas. Estos grafos contienen demasiada información y, en consecuencia, pueden resultar poco útiles. Sin embargo, una parte de la información recogida en los caminos de aprendizaje se puede expresar de un modo más sencillo. En efecto, cuando miramos globalmente varios caminos de aprendizaje distintos, bien asociados a una misma tarea o a un conjunto de tareas que pretenden contribuir a un mismo objetivo de aprendizaje, observamos trozos de esos caminos a los que se les puede atribuir una unidad de significado en el proceso de resolución de las tareas correspondientes. Los denominaremos *secuencias de capacidades*. Una secuencia de capacidades hace referencia a un procedimiento concreto dentro del proceso de resolución de una tarea que es posible distinguir y caracterizar. Asimismo, puede tener asociados ciertos errores propios del procedimiento a la que se refiere. Al expresar el conjunto de los caminos de aprendizaje de una tarea mediante secuencias de capacidades y errores, obtenemos el grafo de secuencias de capacidades de la tarea. Este grafo resulta muy útil a la práctica del profesor. Ejemplificamos a continuación esta idea con la tarea T1 que presentamos arriba.

En los caminos de aprendizaje de la tarea T1 que se muestran en la figura 13 podemos identificar varias secuencias de capacidades. La secuencia de capacidades C40-27 corresponde a la comprensión del enunciado por parte de los estudiantes; concretamente, se espera que, cuando los estudiantes lean la formulación de T1, reconozcan que la noción de permutación les ayuda a resolverlo y que identifiquen los datos del problema que se usarán para realizar el cálculo de permutaciones. Es posible que, en ese momento, los estudiantes incurran en el error E2 de tomar elementos repetidos para realizar el cálculo de permutaciones. La secuencia de capacidades formada, en este caso, por una sola capacidad —C39— permite identificar cuáles son los sistemas de representación útiles al cálculo de permutaciones en función de los datos que aporta la tarea. En ese momento, se produce una primera decisión sobre el proceso a seguir, separando el conteo directo de otros métodos indirectos. Si se elige el conteo directo, hay una segunda decisión sobre el sistema de representación a utilizar; así, las secuencias de capacidades C28-12-13-14-29-26-22, C9-8-15-17-16-58 y C50-51 representan los procedimientos concretos asociados a la utilización de un diagrama de árbol, una tabla y una lista, respectivamente. Cada una de ellas prevé la aparición de errores ligados al correspondiente sistema de representación. Por ejemplo, si se emplea un diagrama de árbol, se prevé que los estudiantes construyan un árbol con igual número de ramificaciones en cada nivel (E6). Si se elige el conteo indirecto, hay dos métodos, representados por las secuencias de capacidades C9-C6-C31-32-30-33-34-35 y C62-63-64, que corresponden al cálculo mediante la fórmula o al empleo del principio multiplicativo. Nuevamente se prevén errores asociados a estos procedimientos; por ejemplo, ante el empleo de una fórmula es posible que los estudiantes sustituyan valores que no corresponden a los parámetros de la fórmula (E28). Finalmente, la secuencia de capacidades C54-C47-36-38 corresponde a la conclusión de la tarea: se expresa la solución, se verifica, se interpreta y se justifica. Estas secuencias de capacidades nos permiten expresar los caminos de aprendizaje de T1 de una forma más sencilla: la figura 14 muestra el grafo de secuencias de capacidades de esta tarea.

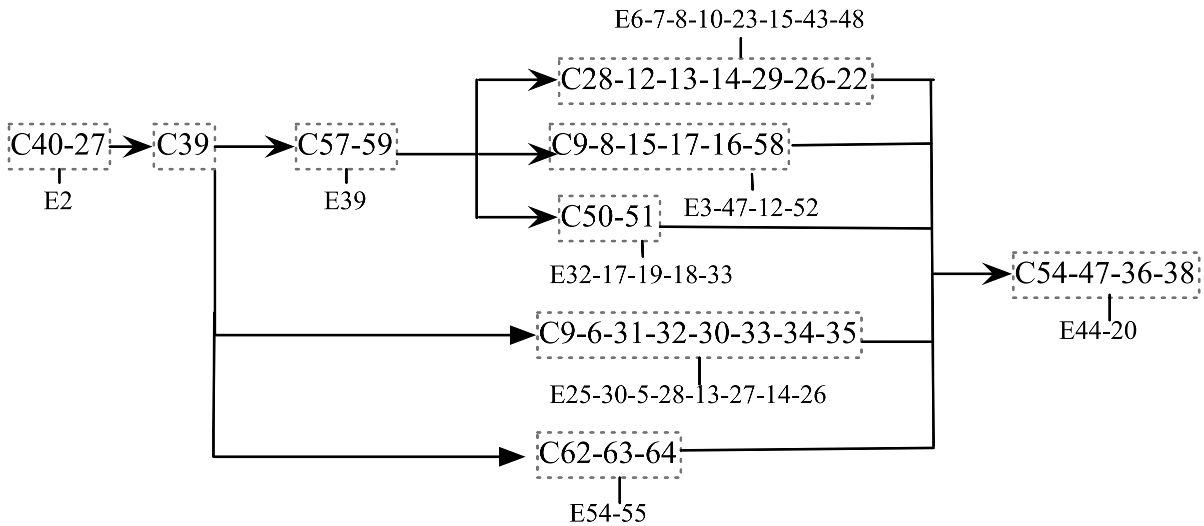

Figura 14. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea T1

La forma como un grupo de escolares aborda una tarea depende de sus conocimientos previos. Algunos escolares avanzados pueden activar, como un solo procedimiento, una sucesión de capacidades que otros escolares, menos preparados, deben activar por separado. Por consiguiente, el criterio para determinar cuándo una sucesión de capacidades es una secuencia de capacidades depende de la preparación de los escolares con los que el profesor está trabajando. El profesor decide, en función de dicha preparación, cuándo un grupo de capacidades tiene entidad propia para ser considerado como procedimiento aislado dentro de un proceso complejo de resolución de problemas y, por tanto, cuándo es una secuencia de capacidades. No obstante, es frecuente que el grupo de capacidades que aparecen entre dos bifurcaciones consecutivas del grafo de caminos de aprendizaje de una tarea tengan una unidad de significado y, por tanto, representen una secuencia de capacidades. Este es el caso para todas las secuencias de capacidades de la figura 14.

En algunas ocasiones, cuando miramos un conjunto de caminos de aprendizaje, vemos secuencias de capacidades que no son exactamente iguales sino similares: posiblemente varían en una capacidad o en algún error, o tienen alguno de estos elementos colocados en un orden distinto. En estos casos, y siempre que las secuencias de capacidades mantengan una unidad de significado desde el punto de vista de la resolución de la tarea correspondiente, las consideramos equivalentes. Ejemplificaremos esta idea más adelante.

3. Grafo de un objetivo de aprendizaje

El profesor puede asociar un conjunto de tareas prototípicas a cada objetivo de aprendizaje de un tema. Al reunir los grafos de secuencias de capacidades de estas tareas, se obtiene lo que denominamos el grafo del objetivo de aprendizaje. Por ejemplo, consideremos el objetivo siguiente en el tema de permutaciones sin repetición.

O3. Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado.

Este objetivo está asociado a dos tareas prototípicas. Una de ellas es la tarea T1 que vimos antes. La otra es la tarea T2 siguiente.

> *T2. Podios*
>
> En una competencia atlética participan 5 personas. David dice que se pueden obtener 12 podios diferentes. Camilo afirma que podrían ser 15. Sin embargo, Carlos encontró 60.
>
> ¿Quién tiene la razón? Justifique su respuesta.

El grafo de secuencias de capacidades de esta tarea aparece en la figura 15.

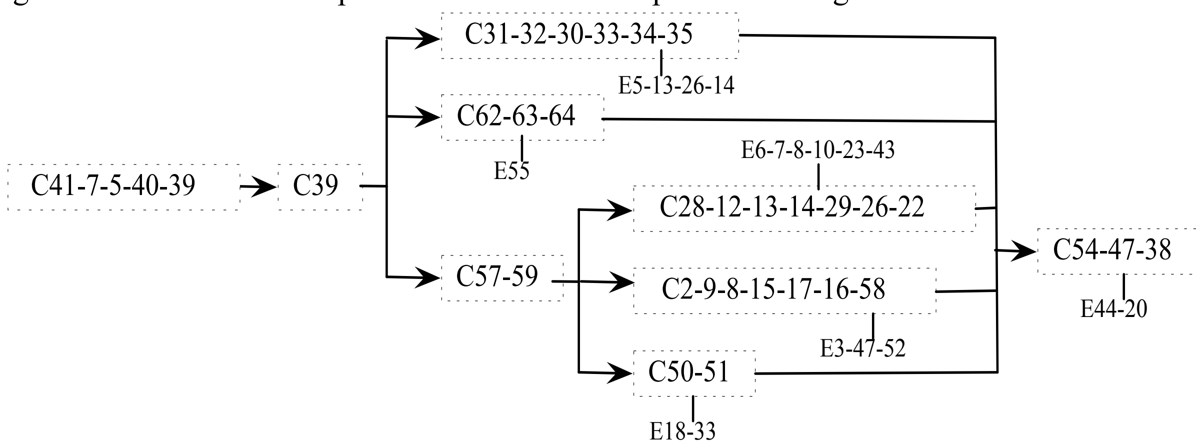

Figura 15. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea T2

Se aprecia que los grafos correspondientes a las tareas T1 y T2 (figuras 14 y 15) comparten varias secuencias de capacidades (iguales o equivalentes). Teniendo en cuenta estas secuencias de capacidades, podemos combinar los grafos de secuencias de capacidades de las dos tareas, formando así el grafo del objetivo de aprendizaje (figura 16).

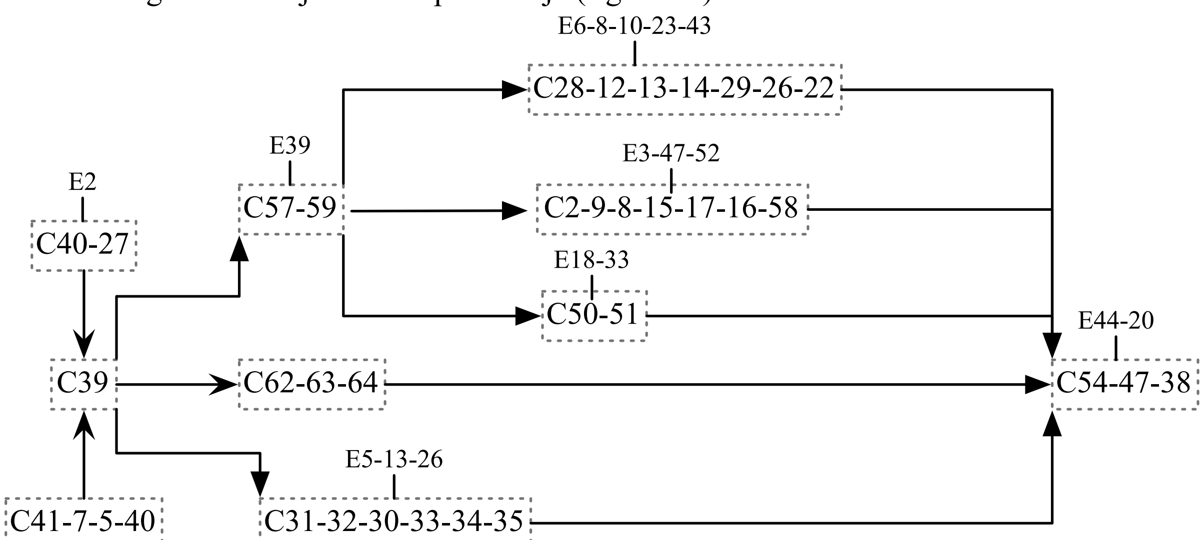

Figura 16. Grafo del objetivo de aprendizaje O3

En el grafo de la figura 16, las dos primeras secuencias de capacidades, C40-27 y C41-7-5-40, corresponden a identificar en el enunciado que el problema se resolverá mediante permutaciones y a extraer los datos necesarios para realizar el cálculo. Estas secuencias de capacidades corresponden al inicio de todas las tareas. En ese momento, se prevé que los estudiantes puedan incurrir en el error de tomar elementos repetidos para realizar el cálculo de permutaciones (E2). Aparecen seguidas de C39 en todas las tareas, punto en el que los estudiantes deciden si utilizarán un método de cálculo directo o indirecto. Si el cálculo es directo, la secuencia de capacidades C57-59 representa la decisión sobre el sistema de representación en el que se hace conteo y los procedimientos consiguientes, como hemos detallado en el ejemplo de la tarea T1. Si el conteo es indirecto, se prevén dos métodos, representados por las secuencias de capacidades C62-63-64 y C31-32-30-33-34-35, que corresponden al empleo del principio multiplicativo y al cálculo mediante la fórmula, respectivamente. En ese momento se prevé que los estudiantes puedan incurrir en errores relacionados con un mal uso de la fórmula, como confundir parámetros, calcular mal el factorial, o interpretar mal un número combinatorio (E5-13-26). Finalmente, todos los caminos comparten la secuencia de capacidades C54-C47-C39, que corresponde a exponer la cantidad pedida o a verificarla sobre los sistemas de representación (si se usaron). Es previsible que en esta parte los estudiantes puedan incurrir en errores relacionados con un conteo equivocado y, en consecuencia, con la obtención de una solución incoherente (E44-20).

El grafo de un objetivo de aprendizaje proporciona una representación del objetivo en términos de los procedimientos y de los errores que se prevén en el tema. A partir del grafo, se obtiene una valiosa información sobre el modo en que el objetivo se pretende desarrollar. Como hemos visto en el ejemplo, es posible dar significado a las conexiones entre secuencias de capacidades y es posible prever errores en el desarrollo del objetivo. Observamos que el objetivo implica (a) ser capaz de reconocer que una tarea se resuelve mediante permutaciones y de identificar los datos que se emplearán en el cálculo; (b) ser capaz de tomar una decisión sobre los métodos de cálculo adecuados; (c) reconocer situaciones en las que el problema se puede resolver por enumeración directa de los arreglos en algún sistema de representación; (d) saber aplicar la fórmula, el principio multiplicativo o enumerar los arreglos y contarlos dentro de un sistema de representación; y (e) expresar la solución y verificar el resultado de acuerdo con la pregunta inicial. Desde el punto de vista de los errores, se prevé (a) que los estudiantes expresen permutaciones con elementos repetidos, (b) que hagan un cálculo erróneo del factorial, (c) que confundan parámetros en la fórmula, (d) que utilicen una tabla de doble entrada cuando no es conveniente, (e) que consideren que los árboles tienen igual número de ramificaciones en todas las ramas, (f) que cuenten elementos repetidos y (g) que obtengan una solución incoherente como consecuencia de un conteo equivocado.

Queremos notar que es el profesor quien realiza esta caracterización del objetivo: depende esencialmente de las tareas prototípicas que asocie al objetivo, de los caminos de aprendizaje que prevea y de la identificación de secuencias de capacidades y errores que realice. El ejemplo presentado está basado en la caracterización del objetivo O3 realizada por el grupo 5 de MAD2.

9. ANÁLISIS Y REVISIÓN DE LOS OBJETIVOS

Recordemos que los objetivos, las dificultades y los errores del tema son el núcleo central del diseño de la unidad didáctica. Ellos recogen el trabajo de análisis del contenido y son la referencia para el análisis y selección de tareas, y para el diseño de los instrumentos y procedimientos de evaluación. Por estas razones, es importante asegurarse que se han formulado los objetivos apropiados y que su caracterización aborda todos los aspectos que se desean del aprendizaje de los estudiantes. Dado que se acostumbra formular los objetivos con frases sintéticas que pueden dar lugar a múltiples interpretaciones, es necesario atribuir un significado específico a esas frases. Para ello, producimos los grafos de secuencias de capacidades de cada objetivo. Estos grafos también abordan las limitaciones de aprendizaje, dado que incluyen los errores en los que los estudiantes pueden incurrir al abordar las tareas del tema. Ellos proporcionan la información necesaria para revisar el conjunto de objetivos de la unidad didáctica y, si es necesario, reformular algunos de ellos. En este apartado, proponemos algunas ideas para este proceso de revisión y reformulación de los objetivos. Estas ideas se refieren a los tres elementos que mencionamos anteriormente y que condicionan la redacción de los objetivos: (a) contribución a las expectativas de nivel superior (b) atención a la información que surge del análisis de contenido y (c) adaptación a los contextos sociales, institucionales y académicos en los que se va a implementar la unidad didáctica.

1. Contribución a expectativas de aprendizaje de nivel superior

Nuestro interés por contribuir a la competencia matemática de nuestros estudiantes nos llevó a centrar nuestra atención en los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales como expectativas de nivel superior. ¿Cómo podemos establecer en qué medida el conjunto de objetivos que hemos formulado contribuyen a estas dos expectativas de aprendizaje de nivel superior? Los procedimientos que vamos a proponer se basan en los grafos de secuencias de capacidades de los objetivos que introdujimos anteriormente. El procedimiento es similar para los tres procesos generales y las siete capacidades matemáticas fundamentales. Se basa en el análisis de la relación entre las secuencias de capacidades que configuran los grafos de los objetivos y estas expectativas de aprendizaje.

Consideremos la secuencias de capacidades C57-59 del grafo de secuencias de capacidades del objetivo O3 que presentamos en la figura 16. Esta secuencia de capacidades se refiere a la capacidad de los estudiantes para reconocer situaciones en las que el problema se puede resolver por enumeración directa de los arreglos en algún sistema de representación. Un profesor puede argumentar que esta secuencia de capacidades a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas (proceso matemático de formular), matematización (proceso matemático de formular) y representación (proceso matemático de emplear). Por otra parte, la secuencia de capacidades C54-47-38 del mismo grafo se refiere a la capacidad del estudiante para expresar la solución y verificar el resultado de acuerdo con la pregunta inicial. Ese mismo profesor puede argumentar que esa secuencia de capacidades contribuye a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, comunicación, y razonamiento y argumentación (en el proceso matemático de interpretar y evaluar).

El procedimiento anterior se puede realizar para cada una de las secuencias de capacidades de cada uno de los objetivos. El profesor puede construir una tabla (como la tabla 5), organizada por objetivos, en la que cada fila es una secuencia de capacidades y las columnas corresponden a las capacidades matemáticas fundamentales. Para cada capacidad matemática fundamental, hay tres subcolumnas que corresponden a los procesos matemáticos. El profesor puede indicar con una marca aquellos procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales a los que contribuye cada secuencia de capacidades y hacer un conteo general de la contribución de cada objetivo a esas expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Tabla 5
Contribución de los objetivos a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
SC	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
										Objetivo 1											
1	✓			✓													✓				
2						✓			✓									✓			✓
…																					
T																					
…																					
										Objetivo j											
i																					
…																					
T																					
…																					
T																					

Nota. F: formular; E: emplear; I: interpretar y evaluar; DRP: diseño de estrategias para resolver problemas; M: matematización; C: comunicación; Ra: razonamiento y argumentación; U: Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re: representación; H: utilización de herramientas matemáticas; S: secuencia de capacidades; T: total.

El profesor no debe analizar los datos que surgen de la tabla 5 desde una perspectiva estrictamente cuantitativa. Los totales que se obtienen para cada objetivo y para el conjunto de todos los objetivos son datos indicativos, que se deben interpretar a la luz del significado cada secuencia de capacidades, del papel de las secuencias de capacidades en el grafo de secuencias de capacidades del objetivo y de la frecuencia con la que cada secuencia de capacidades puede ser activada por los estudiantes cuando abordan las tareas prototípicas. No obstante, estos datos cuantitativos sí deben permitirle al profesor identificar, ya sea expectativas de aprendizaje de nivel superior que él esperaba enfatizar y que no lo está haciendo o atributos particulares de uno o más objetivos en términos de esa contribución. Este análisis puede llevarlo a revisar uno o más de los objetivos y a reformularlos para que se adapten de manera más adecuada a su propósito de contribuir a la competencia matemática de sus estudiantes.

2. Atención a la información que surge del análisis de contenido

El segundo aspecto del análisis de los objetivos se refiere a la atención que estos le prestan a la información que surgió del análisis de contenido del tema. Podemos regresar a las preguntas que formulamos anteriormente al respecto, pero, ahora, podemos fundamentar y justificar nuestras respuestas con base en la información que proporcionan los grafos de secuencias de capacidades de los objetivos. Desde la perspectiva del análisis de los objetivos que se han redactado, estas preguntas se pueden formular de la siguiente manera.

- ¿Se está abordando el contenido que se pretendía abordar?
- ¿Los objetivos atienden a los contextos fenomenológicos identificados en el análisis de contenido?
- ¿Los objetivos promueven la relación entre los contextos fenomenológicos, los conceptos y procedimientos implicados en las subestructuras matemáticas y sus representaciones?
- ¿Se está contribuyendo al desarrollo del o de los estándares a los que se quería contribuir cuando se redactaron los objetivos?

Por ejemplo, al tener en cuenta las secuencias de capacidades que un estudiante puede activar con las tareas prototípicas de un objetivo, podemos establecer y justificar con claridad los diferentes aspectos del contenido y sus relaciones que se abordan con ese objetivo. De la misma manera, este tipo de análisis permite que el profesor ponga de manifiesto qué contextos fenomenológicos se abordan con cada objetivo y de qué manera el objetivo promueve la relación de esos contextos fenomenológicos con los conceptos y procedimientos que caracterizan la subestructura matemática con la que se relaciona y con los sistemas de representación que son relevantes para esos conceptos y procedimientos. Finalmente, el análisis de los grafos de secuencias de capacidades de los objetivos deben dar lugar a establecer en qué medida y de qué manera ese conjunto de objetivos contribuye a los estándares seleccionados por el profesor.

3. Adaptación a los contextos sociales, institucionales y académicos

Finalmente, los objetivos que se han redactado se deben analizar desde la perspectiva de los contextos sociales, institucionales y académicos en los que se va a implementar la unidad didáctica. Para ello, el profesor debe regresar a las preguntas que formulamos anteriormente y asegurarse, a la luz de la caracterización de los objetivos, de su respuesta. Las preguntas eran las siguientes.

- ¿Los objetivos tienen en cuenta las características de la institución en la que se va a implementar la unidad didáctica?
- ¿Los objetivos se adaptan a las características sociales, personales y académicas de los estudiantes a los que se dirige la unidad didáctica?
- ¿Se ha hecho explícito el nivel educativo en el que se va a implementar la unidad didáctica?
- ¿Los objetivos tienen en cuenta ese nivel educativo?

10. DIMENSIÓN AFECTIVA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Si bien el análisis cognitivo se centra fundamentalmente en aspectos relacionados con el conocimiento matemático —lo que solemos llamar lo cognitivo—, su propósito es contribuir a mejorar el rendimiento de los estudiantes. El origen del bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas no solo se explica desde una dimensión puramente cognitiva centrada en la falta de conocimiento. También intervienen otros factores de tipo afectivo. El dominio afectivo aglutina un "extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones" (McLeod y Adams, 1989, p. 245).

El estudio del dominio afectivo es complejo puesto que las interacciones entre lo cognitivo y lo afectivo constituyen un imbricado mosaico de factores y particularidades en cada persona. En el ámbito educativo, la consideración de lo afectivo es relativamente reciente (unos 30 años). Se sabe que lo afectivo influye de forma importante en el rendimiento de los estudiantes, pero no se han logrado establecer correlaciones fuertes entre los factores analizados y dicho rendimiento, y distintos autores reportan inconsistencias en este campo. Lo que el estudiante cree sobre las matemáticas influye en sus emociones al estudiar matemáticas, y esto lo predispone a tener distintas actitudes. Por ejemplo, un estudiante que tenga una creencia negativa sobre sí mismo ante el aprendizaje de las matemáticas, tenderá a sentir inseguridad al resolver problemas de matemáticas y ello podrá llevarle a tener una actitud de rechazo hacia las mismas. Pero también puede ocurrir que un estudiante con una creencia positiva sobre las matemáticas, como por ejemplo su utilidad, no se sienta bien ante tareas matemáticas concretas y, como consecuencia, también tienda a rechazarlas. Igualmente resulta paradójico que aunque el estudiante se muestre confiado y seguro de sus capacidades, no llegue a implicarse en el futuro: "Me encantan, pero no soy capaz de hacer una carrera que lleve muchas Matemáticas" (Báez, 2007, p. 304). También se sabe que la cognición y el afecto se influyen uno a otro de forma recíproca: por una parte, la experiencia que tiene el estudiante cuando aprende matemáticas le provoca emociones e influye en su actitud y en la formación de sus creencias. A su vez, las emociones, creencias y actitudes del estudiante influyen en su rendimiento académico (Diego, 2011).

En este módulo, abordamos el dominio afectivo a través de un constructo que tiene gran influencia en el rendimiento de los estudiantes y al que consideramos especialmente útil desde el punto de vista de la planificación: la motivación. Dedicamos esta sección a introducir algunas ideas sobre la motivación en el aprendizaje. Estas ideas tendrán continuidad en los módulos posteriores.

1. Motivación

El término motivación se viene definiendo desde hace años en la literatura sobre investigación educativa. Lejos de haberse llegado a un consenso sobre su significado, se pueden encontrar descripciones muy diversas y un amplio abanico de recomendaciones para el profesor. En todo caso, asumiremos la definición de motivación dada por González y Tourón (1992, p. 285) como el "proceso que explica el inicio, dirección, intensidad y perseverancia de la conducta encaminada hacia el logro de una meta, modulado por las percepciones que los sujetos tienen de sí mismos y por las tareas a las que se tienen que enfrentar". En situaciones educativas, la motivación hace referencia al grado de participación y perseverancia de los estudiantes al enfrentarse a una tarea.

2. La motivación desde distintos enfoques teóricos

La motivación se ha analizado en la literatura desde distintos puntos de vista teóricos. Eccles y Wigfield (2002) realizan un compendio. Mencionamos aquí algunos de los que nos resultan más interesantes para abordar en la planificación de un tema matemático.

1. Teorías centradas en las expectativas sobre uno mismo (expectancy)

Estas teorías analizan las creencias de los sujetos sobre su propia competencia, sobre su eficacia, sobre las expectativas que tienen de tener éxito y sobre su sentido de control sobre los resultados de un proceso. En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, se analiza la apreciación del estudiante sobre sus posibilidades para resolver problemas. Cuando los estudiantes responden afirmativamente a la pregunta "¿puedo resolver esta tarea?", tienen más garantías de éxito para resolverla y aumenta su interés por resolver tareas más complejas. Las siguientes frases expresan creencias sobre uno mismo como estudiante de matemáticas.

- Se me dan bien las matemáticas.
- Cuando me enfrento a un problema de matemáticas tengo confianza en que encontraré la solución.
- Aunque me esfuerce mucho tratando de resolver problemas de matemáticas no lograré encontrar la solución.

2. Teorías centradas en los factores que influyen en el compromiso

Algunos estudiantes creen que sí pueden lograr resolver una tarea, pero no encuentran interés en resolverla de hecho. Por tanto, algunas teorías analizan las razones por las cuales un estudiante se compromete en su propio aprendizaje. Estas teorías separan los factores en intrínsecos (disfrute personal, curiosidad, ganas de mejorar) y extrínsecos (recibir algún tipo de recompensa: aprobar, recibir el reconocimiento de la familia o de los compañeros). Algunas de estas teorías analizan los objetivos que quiere lograr el estudiante. Por ejemplo, Ames (1992) distingue entre objetivos que implican a la tarea, que se refieren a la apreciación del estudiante sobre la utilidad, interés o importancia de una tarea, y objetivos que implican al ego, similares a los factores intrínsecos. Los estudiantes que tienen objetivos que implican al ego disfrutan al competir con otros y prefieren tareas que saben que están a su alcance. Los estudiantes que tienen objetivos que implican a la tarea prefieren tareas retadoras y están más interesados en su propio progreso que en superar a otros.

3. Teorías que entrelazan la motivación y la cognición

La característica principal de estas teorías es que analizan cómo los sujetos regulan su comportamiento para lograr los objetivos de aprendizaje (Schunk y Zimmerman, 1994). Además de tratar la motivación como elemento que conduce a tomar la decisión de actuar, observan cómo el sujeto se involucra en la acción. Así, se proponen estrategias cognitivas de control que ayudan a los sujetos a centrarse en la información pertinente, a evitar distractores, a optimizar la toma de decisiones, etc. Las estrategias cognitivas se complementan con estrategias de control emocional, que consisten en inhibir estados emocionales como la ansiedad y fortalecer estados emocionales positivos hacia la resolución de una tarea.

3. La motivación en PISA 2012

En PISA 2012, la motivación se menciona conjuntamente con otros constructos del ámbito afectivo que no se llegan a definir de forma precisa, como la perseverancia, la capacidad para el trabajo, la capacidad de esfuerzo, la capacidad para fijar y perseguir objetivos, el compromiso de los estudiantes para resolver problemas complejos, etc. Por ejemplo, la figura 17, muestra la distribución de los países de la OCDE en términos de rendimiento y perseverancia (OECD, 2014, p. 2).

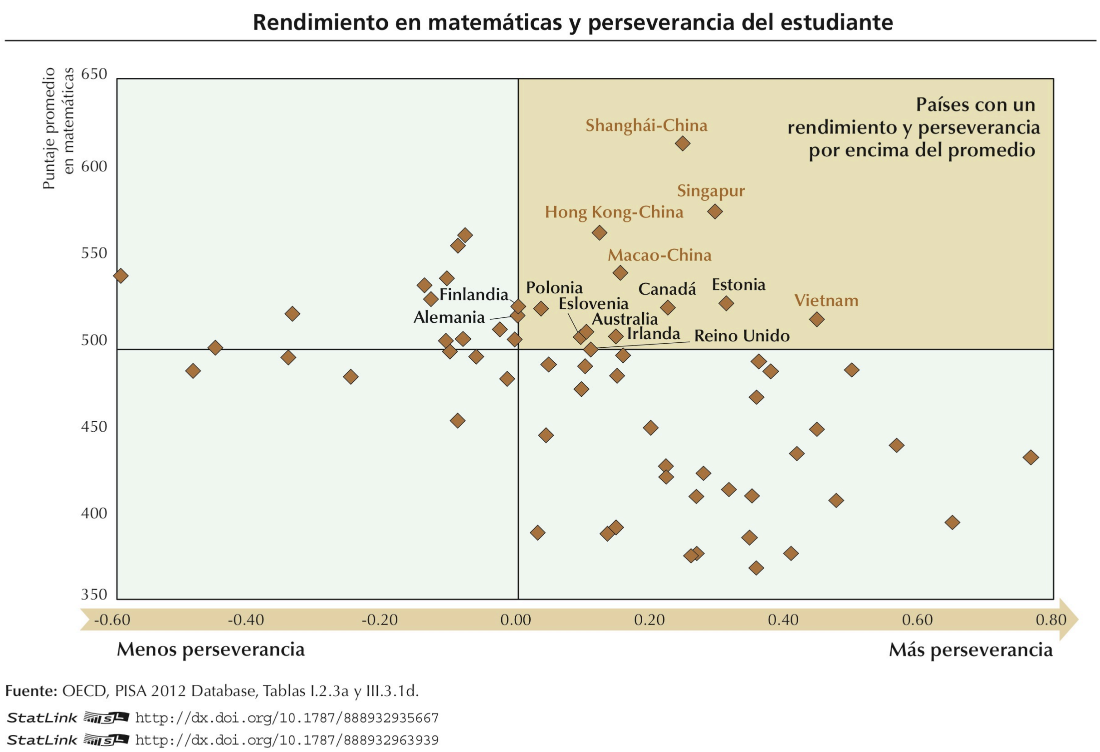

Figura 17. Rendimiento y perseverancia en PISA 2012

Por otro lado, los estudiantes que participaron en PISA 2012 respondieron a preguntas que evalúan la “motivación instrumental de aprendizaje de las matemáticas”. Esta idea refleja la motivación de los estudiantes en términos de la importancia que otorgan a las matemáticas para sus futuros estudios y/o carreras profesionales. Las cuestiones que han respondido para este propósito son las siguientes (Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE), 2014, p. 2).

- Merece la pena hacer un esfuerzo en matemáticas porque me ayudará en el trabajo que quiero hacer más adelante.
- A mí me merece la pena aprender matemáticas porque así tendré mejores perspectivas en mi carrera profesional.

- Las matemáticas son una asignatura importante para mí porque las necesito para lo que quiero estudiar más adelante.
- Aprenderé muchas cosas en matemáticas que me ayudarán a conseguir trabajo.

Con carácter general, los alumnos con mayor motivación instrumental de aprendizaje de las matemáticas obtienen mejor puntuación. Además, como curiosidad, los chicos tienen mayor motivación que las chicas, y se observa una correlación positiva entre esta diferencia de género en la motivación instrumental y la diferencia de género en el rendimiento en matemáticas: cuanto mayor es la diferencia en motivación, mayor es la diferencia en puntuación promedio entre los chicos y las chicas.

En el análisis de los resultados de PISA, algunos autores han tratado los variados rasgos de la personalidad del estudiante de forma conjunta como un único “factor de personalidad” (Borghans y Schils, 2012), y analizan la personalidad y la motivación. Estos autores consiguen detraer estos elementos al analizar la propia prueba de conocimiento PISA y mirar cómo evolucionan las respuestas de los estudiantes a lo largo de ella. Concluyen que hay una clara disminución del rendimiento a lo largo de la prueba, que esta disminución está muy influida por la motivación e indican que la motivación puede explicar el 19% de la variación de los resultados entre los países participantes.

4. La motivación en los documentos institucionales colombianos y españoles

Desde el punto de vista de las expectativas de aprendizaje, es frecuente que los documentos normativos mencionen algunas dimensiones afectivas, aunque no llegan a dar detalles sobre el modo de abordarlas. En el documento de *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas* (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006) se reconoce que el aprendizaje de las matemáticas “no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social” (p. 47). Sin embargo, este planteamiento inicial no parece concretarse más allá de la recomendación general de que se planteen actividades relacionadas “con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas” (p. 70). También hay un apartado que recoge la necesidad de fomentar en los estudiantes actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas en el que se reitera como recomendación el tomar en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes. En el documento *Lineamientos curriculares en matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 1998a) hay una práctica ausencia de referencias al ámbito afectivo.

A modo orientativo, indicaremos que, en los currículos de matemáticas españoles recientes, aparece un primer bloque de contenido, llamado “Contenidos comunes” o “Procesos, métodos y actitudes”, en el que aparecen algunos referentes afectivos: se promueve el desarrollo de la confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas, desarrollar la perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas, etc. No se hace ninguna recomendación concreta sobre el modo de conseguirlo a través de los distintos contenidos. Sin embargo, en un currículo español previo (MEC, 1991), se abordaron específicamente las actitudes en matemáticas asociadas a los contenidos del currículo. Así, por ejemplo, el bloque de contenido denominado Medida, estimación y cálculo de magnitudes, recoge las actitudes siguientes.

- Disposición favorable para realizar, estimar y expresar correctamente medias de objetos, espacios y tiempos cuando la situación lo aconseje.
- Revisión sistemática del resultado de las medidas directas o indirectas, aceptándolas o rechazándolas según se adecuen o no a los valores esperados.
- Cuidado y precisión en el uso de los diferentes instrumentos de medida y en la realización de mediciones.

11. EXPECTATIVAS DE TIPO AFECTIVO

El vínculo de la motivación del estudiante con el contenido matemático se expresa a través de varios aspectos generales del dominio afectivo que el profesor también debe prever al planificar un tema de matemáticas. Por tanto, el enunciado de expectativas de aprendizaje en el análisis cognitivo debe complementarse mediante el enunciado de expectativas de tipo afectivo. Este es nuestro propósito principal en esta sección. Veamos qué estructura podemos utilizar y con qué niveles de concreción podemos enunciar las expectativas de tipo afectivo.

1. Expectativas de tipo afectivo. Estructura y niveles de concreción

Cada uno de los enfoques teóricos que enunciamos al inicio de esta sección tiene unos focos de atención preferentes en el ámbito educativo que nos permiten expresar expectativas de tipo afectivo asociados a cada enfoque. Además, dentro de cada enfoque consideraremos distintos niveles de concreción de los enunciados.

1. Enfoque centrado en las expectativas sobre uno mismo

El enfoque teórico que centra su interés en las expectativas sobre uno mismo pone el foco de atención en analizar la autoestima del estudiante y su confianza al resolver los problemas que se le proponen. Así pues, las expectativas de tipo afectivo que podemos enunciar asociadas a este enfoque son

- EG1: desarrollar la autoestima y
- EG2: desarrollar la confianza en uno mismo.

Además, es importante manejar un nivel de concreción más concreto que sea útil para poder analizar posteriormente cómo y porqué las tareas matemáticas que forman parte de la propuesta docente sirven para desarrollar las expectativas de tipo afectivo enunciadas. Para ello, una vez decidido que se desea desarrollar la confianza en el estudiante, es necesario identificar acciones concretas en las que el estudiante debe desarrollar esa confianza. Estas acciones pueden estar asociadas al nivel superior de expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo, es decir, a las capacidades matemáticas fundamentales. Por ejemplo, se pueden enunciar las siguientes expectativas de tipo afectivo:

- Desarrollar confianza para comunicar información.
- Adquirir seguridad al proponer y llevar a cabo estrategias de resolución de problemas.

Adicionalmente, se puede aumentar más el nivel de concreción, al identificar las acciones del tema matemático específico en las que es importante que el estudiante desarrolle confianza. Por ejemplo, una acción significativa en el tema Teorema de Pitágoras es calcular longitudes en triángulos. Así pues, podemos enunciar la expectativa de tipo afectivo siguiente.

- ♦ Desarrollar confianza en las propias habilidades para calcular longitudes en triángulos utilizando el Teorema de Pitágoras.

2. Enfoque centrado en factores personales intrínsecos y extrínsecos

El enfoque teórico que centra su interés en analizar los factores personales intrínsecos y extrínsecos que intervienen en la motivación del estudiante pone el foco de atención en analizar el interés del estudiante por aprender. Así pues, las expectativas de tipo afectivo que podemos enunciar asociadas a este enfoque son del siguiente tipo.

- ♦ EG1: desarrollar interés por aprender.
- ♦ EG2: desarrollar curiosidad por aprender.

Esta expectativa general puede concretarse, al identificar expectativas de aprendizaje de nivel superior en las que el profesor desea que el estudiante desarrolle interés y curiosidad. Las siguientes son ejemplos de este tipo de expectativas.

- ♦ Desarrollar interés por matematizar una situación real.
- ♦ Desarrollar interés por formular conjeturas o hipótesis.

Y, si concretamos aún más, se pueden identificar los aspectos más significativos de un tema matemático sobre los que es importante que el estudiante desarrolle su interés y curiosidad. Por ejemplo,

- ♦ desarrollar curiosidad por descubrir relaciones no conocidas entre figuras geométricas o
- ♦ incrementar el interés por conocer las aplicaciones del cálculo de áreas sombreadas.

3. Enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje

El enfoque teórico que entrelaza la motivación y la cognición pone el foco de atención en analizar las actitudes y los hábitos favorables al aprendizaje. Así pues, las expectativas de tipo afectivo más generales que podemos enunciar asociadas a este enfoque se refieren, en relación con el aprendizaje, a desarrollar las siguientes expectativas.

- ♦ EG1: actitud.
- ♦ EG2: predisposición.
- ♦ EG3: hábitos.

También se puede concretar este enunciado general, al vincularlo al nivel superior de expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo. Las siguientes son expectativas afectivas de este tipo.

- ♦ Valorar positivamente la precisión y utilidad del lenguaje matemático.
- ♦ Desarrollar una predisposición favorable a emplear distintos sistemas de representación.
- ♦ Desarrollar el hábito de verificar los resultados obtenidos al resolver problemas.
- ♦ Desarrollar perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones relacionadas con las matemáticas.
- ♦ Ser cuidadoso y preciso al expresar el resultado de un problema.

- Desarrollar voluntad y gusto por el razonamiento y la justificación de las propiedades matemáticas.

Si concretamos aún más, se pueden identificar los aspectos más significativos de un tema matemático sobre los que es importante que el estudiante desarrolle buenas actitudes, predisposición y hábitos. Los siguientes son ejemplos de este tipo de concreción.

- Tener disposición favorable para realizar, estimar y expresar correctamente medidas de objetos, espacios y tiempos, adaptados al contexto en que se realiza la medición.
- Desarrollar disposición favorable para realizar las tareas de subdivisión de polígonos en partes iguales.
- Desarrollar cuidado y precisión en el uso de los diferentes instrumentos de medida y en la realización de mediciones.
- Valorar la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno.
- Valorar el orden que aportan las diferentes representaciones para mostrar conjuntos de permutaciones (especialmente la aportación del diagrama de árbol como forma de pasar de lo particular a lo general).
- Desarrollar gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones, experiencias y encuestas.

2. Enunciado de las expectativas de tipo afectivo

Las ideas anteriores sugieren un procedimiento para redactar expectativas afectivas relacionadas con el tema de la unidad didáctica. Hemos establecido tres enfoques teóricos. Para cada uno de ellos, hemos establecido una o más expectativas de carácter general. Estas expectativas generales se pueden concretar en términos de una o más capacidades matemáticas fundamentales. A su vez, cada una de estas expectativas afectivas se puede concretar en términos del contenido del tema. Hemos descrito este procedimiento en el esquema de la figura 18 y lo hemos ejemplificado parcialmente con el primer enfoque teórico.

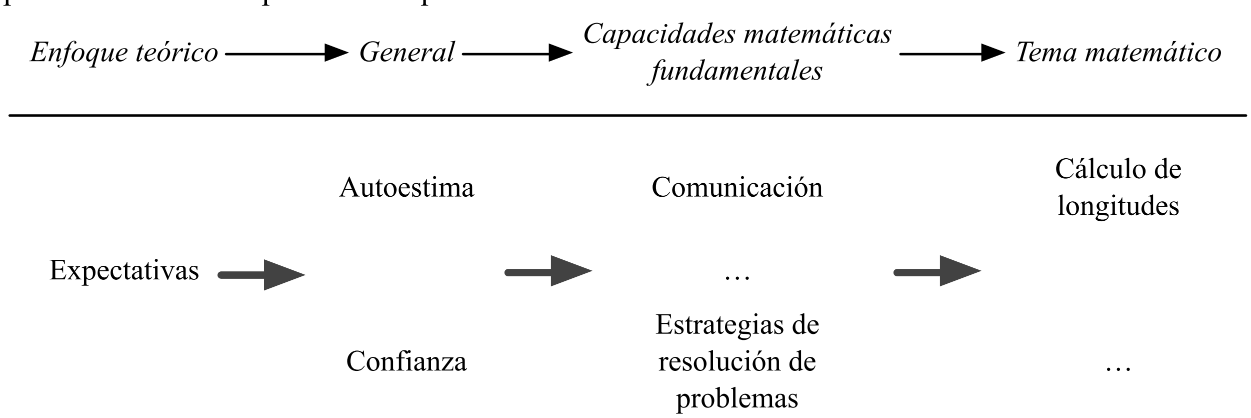

Figura 18. Redacción de expectativas afectivas

El esquema de la figura 18 pone de manifiesto la complejidad del dominio afectivo y la multiplicidad de expectativas afectivas que un profesor puede formular para un tema de las matemáticas escolares. Se aprecia que hay una gran cantidad de combinaciones posibles. No obstante, en un proceso de planificación, es necesario controlar la complejidad de las expectativas de tipo afectivo que se enuncian, puesto que deben ser útiles para analizar posteriormente cómo y por qué las tareas matemáticas que forman parte de la unidad didáctica sirven para desarrollar las expectativas enunciadas. Con el propósito de lograr ese control y así ser más eficaces en la consideración de lo afectivo en los módulos posteriores, proponemos que se maneje un máximo de cinco expectativas de tipo afectivo asociadas al tema matemático concreto. Dichas expectativas estarán asociadas a un máximo de dos capacidades matemáticas fundamentales que, a su vez, corresponderán a un máximo de dos enfoques teóricos.

Por ejemplo, para el tema de Áreas sombreadas, un profesor puede seleccionar el segundo enfoque teórico, centrarse en la expectativa general de desarrollar interés y curiosidad por aprender, y concretarla (desde la perspectiva de la capacidad matemática fundamental de matematizar) en desarrollar interés por matematizar una situación real. Finalmente, puede concretar esta expectativa en su tema en términos de

- EA1: incrementar el interés por conocer las aplicaciones del cálculo de áreas sombreadas.

De la misma forma, puede seleccionar el tercer enfoque teórico con la expectativa general de desarrollar actitud, predisposición y hábitos favorables al aprendizaje, y concretarla, para las capacidad matemática fundamental de representación, en desarrollar una predisposición favorable a emplear distintos sistemas de representación. En términos de su tema matemático, esta expectativa se puede concretar en, por ejemplo, las dos expectativas afectivas siguientes.

- EA2: valorar la utilidad del lenguaje algebraico para expresar relaciones entre cantidades de área de figuras geométricas.
- EA3: desarrollar una actitud favorable a interpretar en términos geométricos las expresiones simbólicas referidas a áreas de figuras geométricas.

Una vez que el profesor ha redactado las expectativas afectivas relacionadas con su tema, puede describir la estructura de esa selección, al indicarlo como en la tabla 6. Cada fila de la tabla corresponde a una de las expectativas afectivas que él ha redactado para su tema concreto. Por ejemplo, en la tabla 6 la segunda fila identifica la expectativa afectiva EA2 del ejemplo que hemos venido presentando sobre Áreas sombreadas (valorar la utilidad del lenguaje algebraico para expresar relaciones entre cantidades de área de figuras geométricas). En las siguientes columnas, el profesor puede indicar el origen de esa expectativa dentro de la estructura de enfoques y niveles de expectativas que hemos mencionado. En el caso de la expectativa EA2, el profesor indica en la tabla que esa expectativa corresponde al segundo enfoque teórico (marca en la columna 3) y, dentro de ese enfoque teórico a la segunda expectativa general (marca en la columna 6) que, en este caso se refiere a desarrollar curiosidad por aprender. Para cada enfoque teórico, las expectativas generales son diferentes, como lo indicamos anteriormente. Finalmente, en las columnas encabezadas por el título Capacidades matemáticas fundamentales, el profesor indica en qué capacidad matemática fundamental se concreta la expectativa afectiva (en este caso, en la capacidad matemática fundamental Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico).

Tabla 6
Estructura de las expectativas afectivas

	Enfoque			Generales			Capacidades matemáticas fundamentales						
EA	1	2	3	EG1	EG2	EG3	DRP	M	C	Ra	U	Re	H
1		✓		✓			✓						
2			✓		✓						✓		
3			✓	✓							✓		

Nota. EA: expectativa de aprendizaje; EG: expectativa general; DRP: diseño de estrategias para resolver problemas; M: matematización; C: comunicación; Ra: razonamiento y argumentación; U: Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re: representación; H: utilización de herramientas matemáticas

3. Consideración futura de las expectativas de tipo afectivo

Parece haber dos factores clave a la hora de desarrollar factores afectivos: seleccionar tareas retadoras intelectualmente para el estudiante, pero que estén a su alcance; y planificar cuidadosamente la metodología para trabajar en el aula de dichas tareas, especialmente la actuación del profesor y las interacciones durante ese proceso. Estos aspectos serán objeto de estudio en el análisis de instrucción. Aquí, solo adelantaremos que, al igual que en el ámbito cognitivo estableceremos mecanismos para analizar la contribución de un conjunto de tareas al desarrollo de las expectativas de aprendizaje, también será necesario establecer mecanismos para caracterizar su contribución al desarrollo de expectativas de tipo afectivo. En este caso, será esencial tener en cuenta la tipología de las tareas y el modo en que ellas se van a implementar.

12. Descripción del Proceso para hacer el análisis cognitivo de un tema de las matemáticas escolares

Los puntos siguientes orientan sobre la forma de proceder al realizar el análisis cognitivo de un tema matemático. Es importante destacar que no se trata de una secuencia lineal ordenada de apartados, sino que cada punto puede ser objeto de revisión al realizar los otros puntos. En la figura 19 puede verse un esquema de los procesos cíclicos involucrados en el análisis cognitivo. El análisis cognitivo requiere que se produzcan los siguientes listados de información.

1. Expectativas de aprendizaje

El proceso para establecer las expectativas de aprendizaje requiere que se realicen las siguientes actividades.

- Seleccionar el listado de procesos matemáticos/capacidades matemáticas fundamentales a las que se quiere contribuir.

- Enunciar el listado de objetivos que se pretenden desarrollar.
- Enunciar el listado de capacidades implicadas en los objetivos del tema, previa determinación de los conocimientos previos de los estudiantes.

2. Expectativas afectivas

Para identificar las expectativas afectivas es necesario realizar los siguientes pasos.

- Seleccionar los enfoques teóricos preferidos.
- Seleccionar las expectativas de tipo afectivo generales asociadas a cada enfoque teórico seleccionado.
- Asociar dichas expectativas a las capacidades matemáticas fundamentales.
- Enunciar expectativas de tipo afectivo vinculadas a los contenidos del tema.

3. Dificultades y errores

La indagación en la literatura y la revisión de la propia experiencia docente debe permitir enunciar el listado de dificultades y errores previstos.

4. Grafo de secuencias de capacidades de cada objetivo

Una vez que se ha producido una primera versión de la redacción de objetivos, es necesario, para cada objetivo, realizar los siguientes procedimientos.

- Identificar el conjunto de tareas prototípicas asociado al objetivo.
- Construir el grafo de secuencias de capacidades y errores de cada tarea prototípica
- Construir el grafo de secuencias de capacidades del objetivo.

Durante este proceso, es posible que se actualicen los propios listados de objetivos, así como los listados de tareas prototípicas, capacidades y errores.

5. Análisis y revisión de los objetivos

Finalmente, es necesario analizar y revisar el conjunto de objetivos con base en la información anterior (grafos de secuencias de capacidades de los objetivos). Para ello, se deben realizar los siguientes procedimientos.

- Establecer la contribución de los objetivos a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.
- Verificar la atención que se da a la información que surge del análisis de contenido en el conjunto de objetivos.
- Asegurarse que el conjunto de objetivos se adaptan a los contextos sociales, institucionales y académicos en los que se va a implementar la unidad didáctica.

Con base en los análisis anteriores, es posible que sea necesario reformular uno o más objetivos, y considerar los cambios derivados de dicha reformulación. La información obtenida en el análisis cognitivo se utilizará en los módulos posteriores, en los que se incorporarán criterios de análisis y selección de tareas.

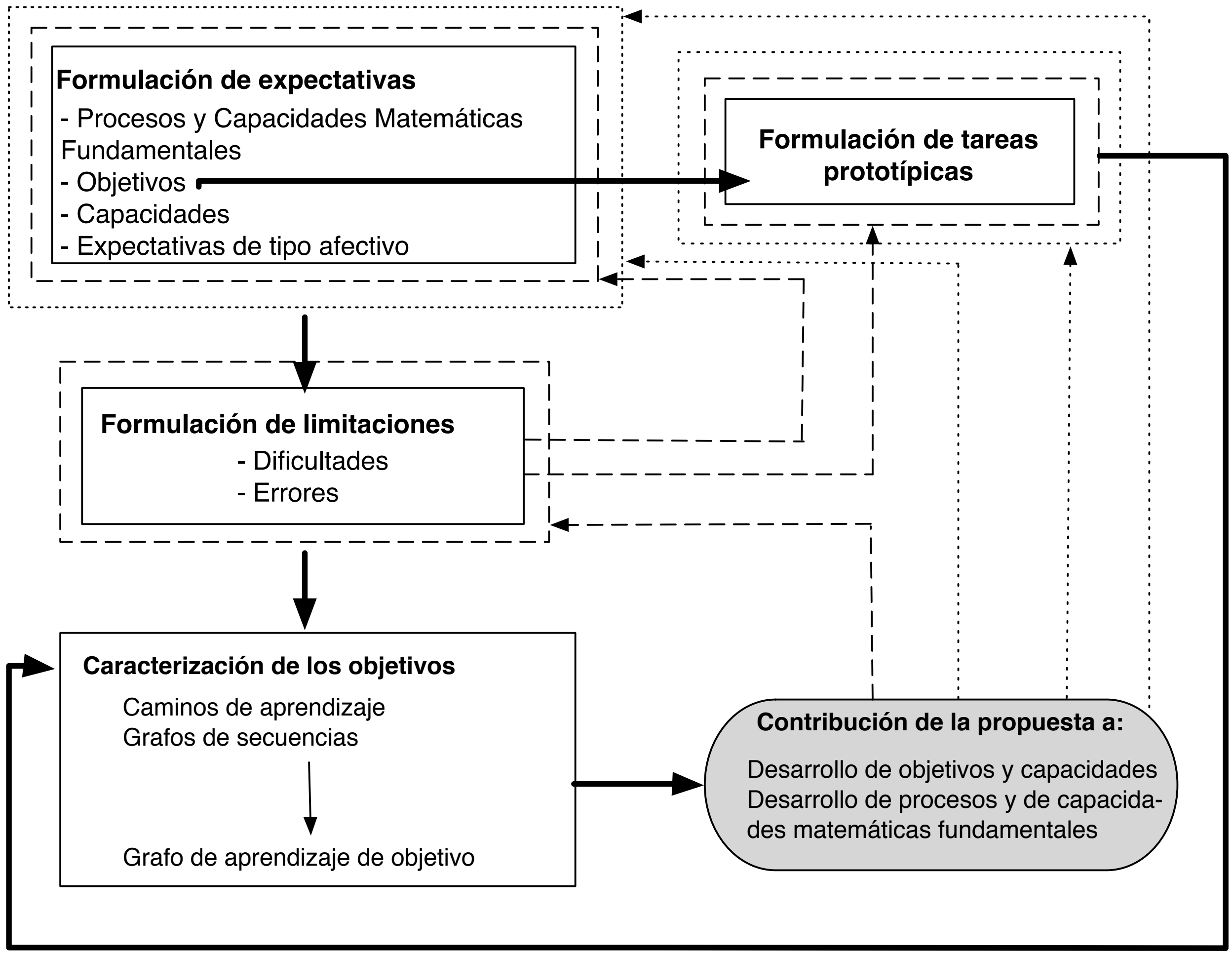

Figura 19. Esquema del análisis cognitivo

13. REFERENCIAS

Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of educational psychology, 84*(3), 261-271. Disponible en http://is.gd/59muz6

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 207-225. Disponible en http://is.gd/QcBpaN

Báez, A. (2007). *El autoconcepto matemático y las creencias del alumnado : su relación con el logro de aprendizaje : un estudio exploratorio, descriptivo e interpretativo en la ESO.* Ciencas de la Educación. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Oviedo, Oviedo.

Benavides, D., Carrillo, A., Ortiz, M., Parra, A. y Velasco, C. (2014). *Permutaciones sin repetición*. Documento no publicado. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Borghans, L. y Schils, T. (2012). *The Leaning Tower of Pisa. Decomposing achievement test scores into cognitive and noncognitive components*. Documento no publicado. Maastricht: Maastricht University. Disponible en http://is.gd/naTszV

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, Inglaterra: Heinemann. Disponible en http://tinyurl.com/becfcvk

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA, 4*(3), 99-110. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/620/

Diego, J. M. (2011). *Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old students across Bratislava, Cambridgeshire, Cantabria and Cyprus.* Mathematics Education. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cambridge, Cambridge.

Eccles, J. S. y Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual review of psychology, 53*(1), 109-132. Disponible en http://is.gd/uVMQP9

Franchi, L. y Hernández, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de la geometría plana. *EDUCERE, 25*, 196-204. Disponible en http://tinyurl.com/az9dc4h

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Garrote, M., J., H. M. y Blanco, L. J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las de-sigualdades e inecuaciones. *Suma, 46*, 37–44. Disponible en http://tinyurl.com/bawtfzw

Geier, R. (1998). Error analyses of geometry problems in secondary schools. The Pythagorean Theorem. *Mathematische Unterrichtspraxis, 19*(4), 37-46.

Goddijn, A., Kindt, M. y Reuter, W. (2004). *Geometry with applications and proofs*. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/444/

Gómez, P., Castro, P., Mora, M. F., Pinzón, A., Torres, F. y Villegas, P. (2014). *Estándares básicos de competencias. Comparación con el estudio PISA y cuestiones para su ajuste*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://is.gd/PrJuwl

González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada.

González, M. C. y Tourón, J. (1992). *Autoconcepto y rendimiento escolar. Sus implicaciones en la motivación y en la autorregulación del aprendizaje*. Pamplona, España: EUNSA. Disponible en http://is.gd/eMxMux

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy, F. Hitt, I. C., R. F. y S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). (2014). Motivación para aprender matemáticas y PISA 2012: el caso de las CC.AA. españolas. *PISA in Focus, 4*(Especial Autonomías), 1-4. Disponible en http://is.gd/r8DBDv

Lupiánez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria.* Didáctica de la Matemática. Tesis de no publicada, Universidad de Granada, Granada.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Universidad de Granada. Disponible en http://is.gd/gphr6H

McLeod, D. B. y Adams, V. (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective*. Berlin: Springer-Verlag.

MEC. (1991). Real decreto 135/1991. Currículo de educación secundaria obligatoria. Disponible en http://noticias.juridicas.com/base_datos/Derogadas/r0-rd1007-1991.html

Ministerio de educación cultura y deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias. Descargado el 30/1/2014, de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998a). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://tinyurl.com/7t988s5

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998b). *Lineamientos generales de procesos curriculares. Hacia la construcción de comunidades educativas autónomas*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en http://is.gd/kqjT0a

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal For Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. París: OCDE. Disponible en http://tinyurl.com/9wmr4ct

OECD. (2013). PISA 2012 assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. Descargado el 30/1/2014, de http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA 2012 framework e-book_final.pdf

OECD. (2014). ¿Tienen los estudiantes la motivación para lograr el éxito? *PISA in Focus, 37*, 1-4. Disponible en http://is.gd/GYDgUM

Orhun, N. (2011). Student's mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. Mathematics Education into the 21st Century Project. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the international conference: New ideas in Mathematics Education* (pp. 127-132). Palm Cove, Australia: University of Queensland. Disponible en http://math.unipa.it/~grim/AOrhun.PDF

Puerto, S., Seminara, S. A. y Minnard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*(3), 1-9. Disponible en http://www.rieoei.org/expe/1729Puerto.pdf

Rico, L. (1994). Basic components of the scientific-didactical training of the secondary school mathematics teacher. En *Simposio Italo Español*.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/486/

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori. Disponible en http://is.gd/ofbVcj

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/569/

Ruiz, E. F. y Lupiáñez, J. L. (2009). Detecting psychological obstacles in teaching and learn-ing the topics of reason and proportion in sixth grade primary pupils. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 397-424. Disponible en http://tinyurl.com/a4d5xrg

Schunk, D. H. y Zimmerman, B. J. (Eds.). (1994). *Self-Regulation of Learning and Performance*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori. Disponible en http://is.gd/LBFU1R

Treffers, A. (1986). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational number: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467. Disponible en http://tinyurl.com/bj8rzny

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 19*(1), 20-44. Disponible en http://tinyurl.com/apc5qgl

ANEXO 1. DIFICULTADES ASOCIADAS A LA COMPLEJIDAD DEL LENGUAJE MATEMÁTICO

Analizaremos la complejidad del lenguaje matemático desde tres dimensiones: la precisión que requiere, su semántica y sus usos.

Precisión

El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como rupturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. Sin embargo, el lenguaje de las Matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, y no comunica su significado, salvo por la interpretación exacta de sus signos.

Semántica

1. Palabras como, por ejemplo, raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, límite, etc. tienen significados diferentes en Matemáticas y en el lenguaje habitual, aunque, al tiempo, pueden estar relacionados con significados particulares en contexto matemático. Dichas interpretaciones pueden tener validez parcial que el sujeto tiende a generalizarlas (por ejemplo, límite como algo que no puede sobrepasarse).
2. Hay palabras específicamente matemáticas, por ejemplo, hipotenusa, paralelogramo, ecuación, polinomio, isósceles, divisor, múltiplo, etc., que sólo aparecen en matemáticas, por lo que la atribución de significado a las mismas sólo cuenta con contextos matemáticos como referentes para la acción (el rango de acciones que el sujeto puede hacer sobre ellos es muy limitado, salvo que conozca las matemáticas...).

Usos del lenguaje de signos matemáticos

La sintaxis del lenguaje de signos —reglas formales de las operaciones— puede algunas veces extenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Esta dificultad ha de gestionarse en la enseñanza mediante un proceso caracterizado por diferentes etapas, que explicaremos mediante ejemplos.

1. Exponentes

En el proceso de aprender a usar correctamente los exponentes, podemos diferenciar tres etapas distintas:

Estadio semiótico. El sistema nuevo de signos adquiere significado a partir del sistema antiguo, ya conocido de los alumnos, que es en este caso el conjunto de las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir; de esta manera, se definen los elementos del sistema nuevo 3^4 o a^4 como:

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$a^4 = a \times a \times a \times a$$

Estadio estructural. El sistema nuevo *se estructura* según la organización del antiguo, y así, mediante procesos como:

$$3^4 \times 3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \ \times \ 3 \times 3 \times 3 = 3^7$$

llegamos al esquema general $a^4 \times a^3 = a^{4+3}$, que, después será expresado simbólicamente como $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Empleando los métodos de manipulación de fracciones aritméticas y algebraicas, se puede obtener, mediante el sistema antiguo, un esquema para la división:

$$a^5 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2$$

que se expresa simbólicamente como $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Ya tenemos así la ley de los exponentes.

Pero en este segundo estadio comienzan a aparecer problemas que nos obligan, en un primer momento, a poner restricciones, por ejemplo, $m > n$, ya que a^0 ó a^{-2} no tienen explicación en el sistema antiguo. [Sí tienen sentido en el sistema antiguo situaciones como $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \left(\dfrac{2}{3}\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right) \times \left(\dfrac{2}{3}\right)$].

Las situaciones que no se ajustan al sistema antiguo se explican de otro modo: recurriendo a la observación de regularidades, por ejemplo, en este caso:

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3^2 = 3 \times 3 = 9$$

$$3^1 = 3$$

$$3^0 = 1 \text{ (ya que } 3^0 = 3^{n-n} = \frac{3^n}{3^n} = 1\text{)}$$

$$3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Estadio autónomo. Hemos eliminado algunas restricciones pero todavía quedan signos que no pueden ser dotados de significado, ni siquiera con la técnica de la regularidad y de los comportamientos patrones; en este momento estos signos actúan con significados propios, independientemente del sistema anterior:

$$3^{2/5} = \sqrt[5]{3^2}$$

$$e^{2/5} = \sqrt[5]{e^2}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Es, por tanto, el sistema nuevo una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo.

Las funciones trigonométricas

Estadio semiótico. Las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente, se relacionan con triángulos rectángulos y son formuladas en términos de medida de los lados “adyacente”, “opuesto” o “hipotenusa” (conocidos previamente).

Estadio estructural. Junto con las propiedades que pueden ser organizadas con el sistema antiguo, aparecen propiedades como la *periodicidad* o la *naturaleza funcional*, que nuevamente han de ser dotadas de significado por el principio de regularidad y los comportamientos patrones.

Estadio autónomo. Los signos actúan con significado propio; por ejemplo, la función $\cos(x^2)$ es significativa, aunque el cuadrado de un ángulo no lo sea.

ANEXO 2. DIFICULTADES ASOCIADAS A LOS PROCESOS DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Encontramos los siguientes tipos de dificultades.

Desarrollo de modelos implícitos
El conocimiento matemático (parcial) que los alumnos tienen en un determinado estadio de su desarrollo cognitivo produce *modelos implícitos* para resolver problemas matemáticos que son adecuados a ese estadio pero constituyen un obstáculo para la adquisición de conocimiento matemático nuevo.

2. Ejemplo 1
El modelo lineal crea dificultades para la incorporación de modelos multiplicativos

La multiplicación se introduce (en primaria) como una adición repetida sobre los números naturales:

$$\begin{array}{l} a + \ldots + a \quad = b \times a \\ (b \;\; veces) \end{array}$$

Si se desea extender a otros números, esta idea de adición da sentido a la multiplicación de:

- naturales por enteros: si $a \in Z$ y $n \in N$, tenemos $a + \ldots + a = n \times a$
- naturales por racionales: si $\frac{p}{q} \in Z$ y $n \in N$, tenemos $\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q} = n \times \frac{p}{q}$

Pero esta linealidad produce errores si se aplica a operaciones que requieren modelos multiplicativos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$sen(3a) = 3sen(a)$$

$$a^{m+n} = a^m + a^n$$

donde el primero de estos errores adquiere más fuerza a causa de la *analogía* con

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

3. Ejemplo 2
Los modelos lineal y multiplicativo crean dificultades para la incorporación de modelos exponenciales.

Toma una hoja de papel, dóblala una vez, dos veces, tres veces… Si doblo n veces, ¿cuántos pedazos de papel tengo? Respuesta errónea: $2n$

Si $a^4 = 3$, calcula a^8:

- Lineal: $a^8 = a^{4+4} = a^4 + a^4 = 3+3 = 6$.
- Multiplicativo: $a^8 = a^{4x2} = a^4.a^2 = 3\sqrt{3}$

El modelo lineal está asociado a un tipo de razonamiento proporcional que genera errores en distintos los ámbitos de las matemáticas. En el trabajo titulado "La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad", De Bock, Van Dooren y Verschaffel (2006) muestran un buen número de ejemplos.

Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del *proceso normal* de construcción del conocimiento matemático.

Lógica social versus lógica escolar

En el contexto escolar se desarrolla un tipo de razonamiento asociado a las situaciones educativas que es distinto del razonamiento social. Veamos algunos ejemplos concretos.

4. Obligatoriedad de Encontrar Respuesta única y Exacta o de Satisfacer las Expectativas del Profesor

> *Hay un barco que tiene 50m. de largo y 20m. de ancho, transporta 100 ovejas y 500 toneladas de trigo ¿Cuál es la edad del capitán?*

En una encuesta realizada en 1979 en el IREM de Grenoble (Instituto de Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas) que se publicó en el Boletín de la Asociación de profesores de Matemáticas de la enseñanza pública en 1980 y que dio origen a un libro del mismo título realizado por Stella Baruk en 1985, se observó que una mayoría de alumnos da respuesta numérica a este problema.

5. Números Decimales

Los números decimales se presentan en la vida corriente como parejas de números enteros; así decimos "Víctor mide un metro ochenta" y no se trata del número 1,80, sino de dos números enteros, 1 y 80, con dos unidades distintas, el metro y el centímetro. Este tratamiento del número decimal como pareja de números enteros produce errores como:

- $1{,}3 < 1{,}28$ porque $3 < 28$, o
- $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}9$ porque $0 \times 0 = 0$ y $3 \times 3 = 9$, o
- entre 1,3 y 1,4 no hay otro número porque no hay número entre 3 y 4.

6. Principio de máxima información

En la lógica social utilizamos el principio de máxima información: si un hijo dice a su padre "tuve un accidente con tu coche, la puerta está rota" pero no dice "y también se han destrozado el motor y las ruedas" está mintiendo. Sin embargo, en matemáticas podemos decir sin mentir que "un cuadrado es un rectángulo". Aquí no se exige máxima información, "es" significa inclusión.

Anexo 3. Algunas referencias a la literatura sobre errores en Educación Matemática

Un buen número de trabajos de investigación sobre errores tratan de categorizar los errores más habituales en temas específicos de matemáticas. Algunos de estos ejemplos son los siguientes:

- Carpenter, Franke y Levi (2003) sobre aritmética y álgebra escolar;
- Geier (1998) y Franchi y Hernández (2004) sobre geometría;
- González (1995) sobre números naturales;
- Hitt (2003) sobre la noción de infinito y sus repercusiones en el aprendizaje de las funciones;
- Rico (1994)Rico y Castro (1995) sobre razonamiento numérico;
- Ruiz y Lupiáñez (2009) sobre razón y proporción;
- Vamvakoussi y Vosniadou (2004) sobre números racionales;
- Zaslavsky (1997) sobre la función cuadrática;
- Ruano, Socas y Palarea (2008) sobre procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Álgebra;
- Orhun (2011) sobre trigonometría;
- Garrote, J. y Blanco (2004) sobre desigualdades e inecuaciones;
- Puerto, Seminara y Minnard (2007) sobre estadística descriptiva; y
- Cerdán (2010) sobre el proceso de traducción algebraico.

Otro grupo de trabajos realizan estudios estadísticos para delimitar patrones de errores. Un ejemplo destacado es el de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky y Inbar (1987), quienes realizaron un estudio empírico con estudiantes de educación secundaria. Después de recoger las soluciones de estos escolares a una serie de problemas, diferentes expertos clasificaron los errores y la depuración de ese análisis brinda seis categorías descriptivas.

1.Datos mal utilizados. Son errores producidos por una discrepancia entre los datos de un problema y el tratamiento que les da el alumno. Aquí se encuentran los casos en que se añaden casos extraños, se omite algún dato necesario para la solución, se contesta algo innecesario, se hace una lectura incorrecta del enunciado, se utilizan valores de una variable para otra distinta, etc.

2. *Interpretación incorrecta del lenguaje*. Son errores al traducir una información dada en un determinado sistema de representación a otro. Por ejemplo, modelización mediante una ecuación inadecuada, transferencia de reglas de un sistema de representación simbólico a otro (en el que ya no son válidas); por ejemplo, al sumar números complejos en forma polar, aplicar reglas válidas sólo para la forma binómica [$r_q+s_d=(r+s)_{q+d}$].

3. Inferencias lógicas no válidas. Son falacias de razonamiento no asociadas a contenidos específicos. Por ejemplo, concluir, a partir de un enunciado condicional, su contrario; utilizar incorrectamente los cuantificadores; confundir una condición necesaria y una suficiente; o reglas que producen reglas. Un ejemplo de este último caso es el siguiente:

$$\text{Si } (x-2)(x-3)=0 \text{ entonces } x=2 \text{ o } x=3$$
$$\text{Por tanto, si } (x-2)(x-3)=2 \text{ entonces } x=4 \text{ o } x=5$$

Teoremas o definiciones deformados. Son deformaciones de principios, reglas o definiciones (asociadas a contenidos). Por ejemplo, aplicar un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar una propiedad distributiva a una función no lineal, etc.

Falta de verificación de la solución. Son errores que se presentan cuando cada paso de la resolución de una tarea es correcto pero no responde a la solución pedida.

Errores técnicos. Son errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, de manipulación de símbolos algebraicos, de ejecución de algoritmos básicos, etc. Por ejemplo,

$$2^3=6$$

$$2x-x=2$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

Esta clasificación permite pensar en tipologías de errores que pueden surgir al trabajar cada tema específico de matemáticas y nos permite abarcar un espectro amplio de errores sobre cada tema.

Al realizar el análisis cognitivo de un tema matemático vamos a tomar como referencia una dificultad para enunciar sus errores asociados. Para enunciar las dificultades también hemos aportado una tipología. Manejando estas distintas tipologías, que se alimentan una a la otra, el profesor genera la información que necesita sobre las limitaciones de aprendizaje que presentarán sus estudiantes.

Bibliografía adicional sobre análisis cognitivo

La página de bibliografía de Madua 3 (Recursos > Documentación > Bibliografía) recoge diversas referencias sobre los temas relacionados con el análisis cognitivo (p. ej., aprendizaje, errores y dificultades). Estas referencias se pueden identificar al hacer una búsqueda en el navegador con el término “Análisis cognitivo”.

Por otro lado, Funes también recoge gran cantidad de referencias relacionadas con el análisis cognitivo. En enero de 2015, aparecían 1777 referencias relacionadas con aprendizaje, 156 en aspectos afectivos, 226 en dificultades y 86 en errores.

ANEXO 4. LISTADOS DE CAPACIDADES Y ERRORES

Tema: Permutaciones sin repetición

2. Capacidades

C1. Asociar notaciones con los datos dados en el enunciado (B=Barranquilla).

C2. Relacionar el orden con la representan de la información dada (1°Cartagena, 2°Barranquilla y 3°Santa Marta= {C, B, S}).

C3. Garantizar las permutaciones posibles representándolas mediante un conjunto por extensión ({C, B, S}).

C4. Interpretar las condiciones de orden que asigna el problema para listar arreglos.

C5. Discriminar en un conjunto de arreglos, los que no corresponden a permutaciones sin repetición.

C6. Identificar que en un conjunto de n elementos se pueden hacer permutaciones de r elementos siempre y cuando $n \geq r$.

C7. Reconocer en dos arreglos con los mismos elementos, pero diferente orden, dos permutaciones diferentes.

C8. Especificar cuáles elementos de un conjunto dado se deben permutar.

C9. Discriminar cuántos elementos se deben permutar.

C10. Identificar cada ramificación del diagrama de árbol con el ordinal de un elemento o dato en el arreglo.

C11. Garantizar que al enlistar un elemento o dato en un nivel del diagrama de árbol, éste no exista en el nivel anterior.

C12. Identificar que cada nivel del diagrama de árbol relaciona un elemento o dato menos que en la anterior.

C13. Usa el patrón de orden que asigna el diagrama de árbol para evitar la repetición en los arreglos

C14. Asociar cada trayectoria en el diagrama de árbol con una permutación.

C15. Conocer qué datos se deben poner en los encabezados de filas y columnas de una tabla de doble entrada para hallar permutaciones.

C16. Identificar el resultado de intersecar filas y columnas en tablas de doble entrada.

C17. Advertir el orden en que se escriben las intersecciones entre filas y columnas en una tabla.

C18. Reconocer la practicidad de las tablas de doble entrada para hallar permutaciones de n elementos, donde $r = 2$.

C20. Identificar que la cantidad de permutaciones obtenidas usando un sistema de representación no cambia al representarlas con otro.

C21. Excluir del conjunto de permutaciones representado en una tabla aquellas que tienen repetición (diagonal).

C22. Verificar la cantidad de permutaciones requeridas haciendo uso del diagrama de árbol.

C23. Comparar la cantidad de permutaciones obtenidas en tablas, listas y diagramas para verificar los resultados.

C24. Cotejar que cada celda de la tabla de doble entrada, excepto las de la diagonal, corresponde a una trayectoria del diagrama de árbol.

C25. Comprobar que los arreglos obtenidos en la tabla de doble entrada, son los mismos que los obtenidos en el diagrama de árbol.

C26. Organizar las permutaciones obtenidas en tablas y/o diagramas mediante listas.

C27. Identificar datos expresados de manera no matemática para encontrar la cantidad de permutaciones.

C28. Hacer uso de diagramas de árbol para realizar conteo de permutaciones posibles.

C29. Generalizar la cantidad de permutaciones posibles a partir de un diagrama de árbol.

C30. Conocer la fórmula empleada para encontrar la cantidad de permutaciones de un conjunto.

C31. Reconocer situaciones donde es posible aplicar la fórmula de permutaciones.

C32. Comprender en un problema dado, cuál dato corresponde a n y cuál a r

C33. Sustituir las cantidades correspondientes a las expresiones (n, r) en la fórmula para hallar permutaciones.

C34. Hallar la cantidad de permutaciones como un número natural, resultado de un cociente de factoriales.

C35. Calcular la cantidad de permutaciones de un conjunto dado resolviendo la expresión matemática correspondiente.

C36. Contar los arreglos obtenidos utilizando diagramas para expresar la cantidad resultante.

C37. Comparar la cantidad de arreglos obtenidos por conteo en un diagrama de árbol con la cantidad calculada usando la fórmula.

C38. Justificar una respuesta relacionando la cantidad de permutaciones encontrada con la pregunta planteada

C39. Escoger el(los) sistema(s) de representación adecuado(s) para abordar situaciones que involucran permutaciones.

C40. Reconocer las condiciones en las que es posible aplicar el concepto de permutación sin repetición. Es decir, interpreta en el contexto de un problema, una situación que implica permutaciones sin repetición

C41. Identificar las condiciones de muestreo. Es decir, deduce de un enunciado la información que se conoce y la que se debe hallar

C43. Argumenta si es posible solucionar un problema que implica permutaciones sin repetición, con la información dada

C46. Prueba su(s) procedimiento(s) de solución con los datos del enunciado

C47. Interpreta el resultado obtenido de acuerdo con el contexto del problema

C48. Acudir a sistemas de representación alternos para generar el tránsito de un sistema a otro (pasar de tabla a lista).

C49. Modela un problema utilizando correctamente el modelo matemático de un problema similar antes resuelto.

C50. Reconoce un patrón de orden al momento de realizar las listas para evitar la repetición en los arreglos.

C51. Asocia cada arreglo de la lista con una permutación.

C52. Usa las listas para realizar conteo de permutaciones posibles.

C54. Verifica la respuesta extrayendo información de el(los) sistema(s) de representación usados.

C55. Utiliza un listado preliminar de arreglos para identificar los restantes como arreglos con los mismos elementos en diferente orden.

C56. Muestra en una tabla de doble entrada los arreglos que son y no son permutaciones sin repetición, sin extraerlos de ella.

C57. Reconoce situaciones donde no es necesario utilizar la fórmula y pueden resolverse por conteo directo.

C58. Hace el conteo de las permutaciones posibles a partir de la representación en una tabla de doble entrada.

C59. Acude a sistemas de representación, como herramienta en el proceso de conteo.

C60. Establece un elemento de los que se deben permutar como origen del diagrama de árbol.

C61. Comparar las permutaciones de un conjunto de arreglos haciendo uso de diferentes sistemas de representación.

C62. Ubica los elementos a permutar en posiciones, atendiendo a la cantidad, de la máxima a la mínima posible.

C63. Identifica que en cada posición que puede ocupar cada uno de los elementos a permutar, se tiene un elemento menos que en la posición previa.

C64. Calcula la cantidad de permutaciones utilizando el principio multiplicativo.

C65. Lee una misma permutación representada en un diagrama de árbol, una lista o una tabla de doble entrada.

C66. Identifica dos conjuntos de permutaciones iguales por la igualdad entre sus cardinales y la correspondencia uno a uno de cada permutación.

C67. Identifica que dos conjuntos de permutaciones son diferentes cuando sus cardinales también lo son.

C68. Identifica que dos conjuntos de permutaciones son diferentes cuando no es posible hacer la correspondencia uno a uno de sus elementos.

C70. Identifica invariantes entre dos problemas que involucren la no repetición y el orden.

C71. Resuelve problemas de permutaciones donde $n > r$ con base a otro(s) de la misma situación donde $n = r$.

C72. Usa la noción de parámetros n y r para identificarlos con otros nombres (número, tamaño)

C73. Señala o explica que la expresión “resultado de la fórmula” corresponde al cardinal del conjunto de PSR.

C74. Explica gráfica, verbalmente o de forma escrita, la relación de cada parámetro que compone la fórmula para calcular PSR con los datos del problema.

C75. Comparar la cantidad de arreglos obtenidos por conteo en una tabla de doble entrada con la cantidad calculada usando la fórmula.

C76. Compara fórmulas evaluadas con diferentes parámetros para identificar similitudes

C77. Explica el procedimiento matemático que da como resultado la misma cantidad de permutaciones con diferente parámetro r.

C78. Identifica que dos conjuntos de PSR con el mismo cardinal no necesariamente son iguales.

C79. Extrae de un conjunto de permutaciones en un sistema de representación, un subconjunto de las que cumplen alguna condición específica.

C80. Encuentra por conteo el cardinal de un subconjunto del conjunto de PSR, que cumplen alguna condición.

C81. Sustentar una respuesta relacionando las permutaciones identificadas con la información del problema.

C82. Justifica la identificación o elección de un conjunto de permutaciones haciendo uso de la definición y/o sus características.

C83. Identifica un cambio de la cantidad de permutaciones obtenidas cuando varía el parámetro r.

C84. Identifica que teniendo fijo a n, a medida que crece r, también crece la cantidades de PSR.

3. Errores

E1. Considera que dos arreglos con los mismos elementos pero distinto orden son la misma permutación.

E2. Expresa permutaciones con elementos repetidos.

E3. Selecciona un número mayor o menor, de elementos que el necesario para permutar.

E4. Usa la fórmula para calcular en problemas que piden enumerar

E5. Confunde los parámetros entre sí

E6. Construye el diagrama de árbol con igual número de ramificaciones en cada nivel

E7. Reitera un elemento del arreglo varias veces en la misma ramificación del diagrama de árbol

E8. Extrae arreglos del diagrama de árbol que no corresponden a permutaciones sin repetición

E9. Extrae arreglos de una tabla de doble entrada que no corresponden a permutaciones sin repetición

E10. Considera conexiones entre ramificaciones del diagrama de árbol, que no deberían estar relacionadas

E11. Incluye dentro de las permutaciones sin repetición, las resultantes de la diagonal de una tabla de doble entrada

E12. Denota las intersecciones de filas y columnas sin mantener el mismo criterio de orden en todos los arreglos

E13. Calcula el factorial como una operación aditiva y no multiplicativa

E14. Desarrolla el cociente de la fórmula obviando el factorial

E15. Obtiene un resultado de un proceso de permutación, sin evidenciar procedimientos previos.

E16. Entrega como resultado final el producto del primer procedimiento, tras haber fijado una variable.

E17. Fija solamente algunos valores de la variable y no logra concretar un resultado.

E18. No incluye la cantidad de arreglos que obtuvo al fijar la primera variable en el resultado final.

E19. A pesar de haber fijado una variable, la repite en pasos posteriores.

E20. La solución es un número no coherente con los datos del problema, producto de una enumeración o conteo incorrecto o incompleto.

E21. Completa la tabla de doble entrada, "reflejando" las permutaciones respecto a la diagonal.

E22. Supone que el conjunto de permutaciones es una sola iteración del diagrama de árbol.

E23. Generaliza que las permutaciones obtenidas con una sola iteración del diagrama de árbol son análogas a las demás permutaciones.

E24. Resuelve el problema como un conjunto de enunciados particulares, cuando los parámetros son variables.

E25. Identifica incorrectamente el número de permutaciones, usando como criterio el cardinal de conjuntos con menor cantidad de elementos.

E26. Asume un problema combinatorio como un problema de estructura multiplicativa (por ejemplo, ${}_5P_3$ como 5/3 ó 5x3). Multiplica los números representados en la fórmula.

E27. Resuelve problemas que involucran permutaciones utilizando solamente n!

E28. Sustituye los parámetros en la fórmula por valores que no corresponden.

E29. Utiliza la fórmula para encontrar la cantidad de combinaciones en problemas que requieren hallar el número de permutaciones.

E30. Identifica una operación que no corresponde al problema de conteo: enumerar cuando es recuento y recuento cuando es enumerar.

E31. Uno de los números de la fórmula es dado como solución.

E32. Presenta una fórmula como respuesta pero no la desarrolla.

E33. Encuentra una respuesta incompleta por ensayo y error, sin emplear procedimientos recursivos.

E34. Lista las permutaciones encontradas al fijar un solo elemento, sin tener en cuenta las que puedan resultar de fijar los demás.

E35. Presenta como respuesta a un problema, una tabla de doble entrada con celdas vacías.

E36. Exhibe un diagrama de árbol con ramificaciones incompletas.

E37. Adapta el problema a un modelo matemático que no corresponde a permutaciones sin repetición.

E38. No extrae todos los datos del enunciado del problema para desarrollarlo (D5)

E39. Utiliza la tabla de doble entrada cuando no es conveniente (es decir $r \geq 3$) (D2)

E40. Escoge algún problema abordado anteriormente con una estructura parecida, pero no con todas las características que implica un problema de permutaciones sin repeticiones (D5)

E41. Utiliza o plantea un modelo de combinación para resolver un problema de permutación.

E42. Asigna denominaciones iguales a elementos diferentes en los arreglos (por ejemplo M para montaña rusa y para martillo) (D2).

E43. Construye el diagrama de árbol pero no interpreta los resultados que obtiene o interpreta otros resultados (D6)

E44. Cuenta un número mayor o menor al esperado, de permutaciones sin repetición.

E45. Obtiene un resultado pero no lo interpreta de acuerdo con el contexto del problema

E46. Sustentar su respuesta con información del enunciado del problema que no corresponde.