MÓDULO 4
ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Pedro Gómez y María Fernanda Mora

En este módulo, reiteramos la visión funcional de las matemáticas escolares que hemos asumido en los módulos anteriores. Consideramos que aprender matemáticas implica que el estudiante aprecie la utilidad de las matemáticas para la resolución de problemas prácticos en contextos específicos. Esta visión de las matemáticas se fundamenta en el marco conceptual de PISA 2012 y su propuesta sobre la alfabetización matemática (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013). Es decir, vemos las matemáticas como una herramienta con la que el estudiante puede abordar problemas de la vida cotidiana en contextos diversos.

Con base en esa visión funcional de las matemáticas escolares, asumimos una visión del aprendizaje. Consideramos que los estudiantes aprenden matemáticas cuando, al abordar tareas complejas que implican problemas contextualizados, ponen en juego los conocimientos y destrezas que tienen disponibles, interactúan y se comunican con otros estudiantes y con el profesor, negocian significados, llegan a acuerdos sobre la solución de la tarea, y comunican y justifican su solución (Gómez y Romero, 2015). Esta posición sobre el aprendizaje de las matemáticas nos lleva a asumir una posición sobre su enseñanza. Partimos de que el profesor ha establecido unas expectativas (de aprendizaje y de tipo afectivo) y ha identificado las limitaciones de aprendizaje de sus estudiantes (dificultades y errores). Sus propósitos al planificar e implementar la enseñanza consisten en contribuir al logro de esas expectativas y a la superación de esas limitaciones de aprendizaje. Para ello, promovemos una visión de la enseñanza en virtud de la cual la función del profesor consiste en proporcionar oportunidades para que los estudiantes logren esas expectativas y superen esas limitaciones. El profesor brinda estas oportunidades de aprendizaje a los estudiantes a través de tareas que inducen a los estudiantes a poner en juego los conocimientos que tienen disponibles en ese momento, reconocer los errores en los que pueden incurrir, e interactuar con sus compañeros y el profesor, en un proceso de construcción social del conocimiento matemático. Por estas razones, las nociones de tarea de aprendizaje y de secuencia de tareas se constituyen en las ideas centrales de este módulo.

En este módulo, utilizamos el término tarea para referirnos a las tareas de aprendizaje que el profesor propone con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen sus limitaciones de aprendizaje. En lo que sigue, empleamos los términos "tarea" y "tarea matemática escolar" para referirnos a este tipo de tarea de aprendizaje. Concebimos la noción de tarea matemática escolar en un sentido amplio, como una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes. Describimos con más detalle la noción de tarea en un apartado posterior. Una tarea incluye, además de su formulación, elementos como sus requisitos y metas, el uso de materiales y recursos, formas de agrupar a los estudiantes, estrategias de interacción entre los estudiantes y con el profesor, y su temporalidad. Resumimos esquemáticamente las ideas anteriores en la figura 1.

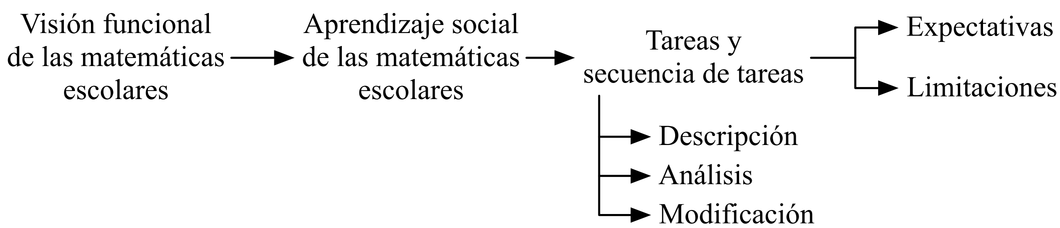

Figura 1. Tareas y principios sobre las matemáticas escolares, su aprendizaje y enseñanza

El trabajo que se realiza en el análisis de instrucción se basa en la información que surge del análisis de contenido y del análisis cognitivo. En particular, en este módulo, introducimos conceptos y proponemos técnicas para la búsqueda, diseño, descripción, análisis y modificación de las tareas y de la secuencia de tareas que configuran la propuesta del profesor para la enseñanza de un tema de las matemáticas escolares. Este trabajo se basa en la información que surge de la caracterización de los objetivos de aprendizaje que se realizó anteriormente. En lo que sigue, introducimos las ideas clave del módulo, establecemos los elementos de una tarea y mostramos cómo estos elementos permiten describir esta tarea. Con base en estas ideas, proponemos técnicas para analizar y modificar una tarea. De manera similar, sugerimos técnicas para la descripción, análisis y modificación de la secuencia de tareas.

1. Ideas clave

Los procedimientos del análisis de instrucción se sustentan en dos ideas principales: tarea y secuencia de tareas. Abordaremos en detalle la noción de tarea matemática escolar en el siguiente apartado. Una secuencia de tareas es una ordenación de tareas. En algunas ocasiones, una secuencia de tareas puede incluir una o más tareas transversales que los estudiantes abordan simultáneamente con otras tareas de la secuencia (figura 2).

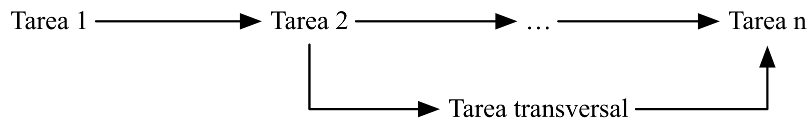

Figura 2. Secuencia de tareas

Una vez que se han establecido unos objetivos de aprendizaje, unas dificultades y errores, y unas expectativas de tipo afectivo para el tema, el análisis de instrucción proporciona elementos conceptuales y técnicas para diseñar, analizar y modificar la secuencia de tareas de tal forma que ella contribuya al logro de esas expectativas y a la superación de esas limitaciones de aprendizaje (figura 3).

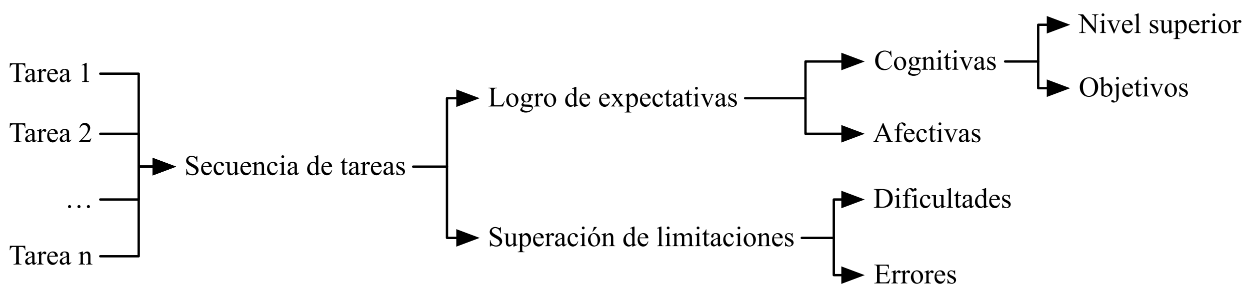

Figura 3. Contribuciones de la secuencia de tareas

El profesor debe tener herramientas conceptuales y metodológicas que le permitan diseñar la secuencia de tareas y justificar que ese diseño satisface las condiciones de la figura 3. Ese es el propósito de este módulo. Para ello, es necesario que el profesor pueda buscar, describir, analizar, modificar y seleccionar las tareas que configuran la secuencia de tareas, y pueda describir, analizar y modificar la secuencia de tareas (figura 4).

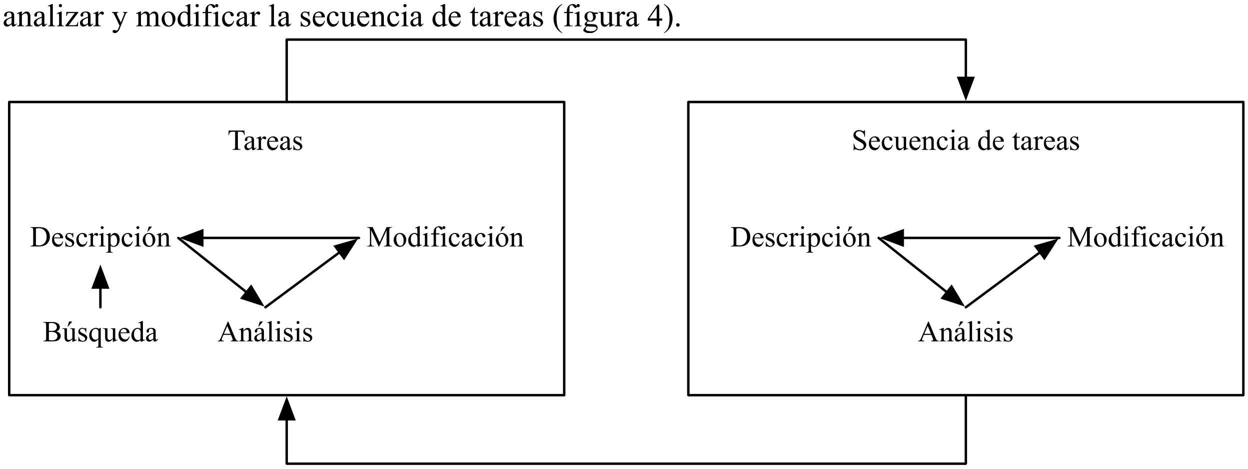

Figura 4. Procesos de descripción, análisis y modificación

La descripción de una secuencia de tareas consiste en establecer el orden en que las tareas se distribuyen en las sesiones de clase e indicar cómo las metas de cada tarea contribuyen a los objetivos de aprendizaje ya establecidos. Como veremos más adelante, la modificación de una secuencia de tareas se puede realizar al cambiar el orden de las tareas, al modificar o eliminar tareas existentes, o al introducir nuevas tareas. Estas modificaciones deben estar motivadas por el análisis de la secuencia de tareas en los términos de su contribución al logro de las expectativas cognitivas y afectivas, y a la superación de las limitaciones de aprendizaje (figura 3). Presentamos más adelante, en el apartado 8, las técnicas detalladas para el análisis de la secuencia de tareas. Estas técnicas surgen de las técnicas específicas para el análisis de una tarea concreta.

Las reflexiones anteriores ponen de manifiesto la importancia de las técnicas para describir, analizar y modificar una tarea. En la figura 5, que hemos adaptado de la propuesta de Gómez y Romero (2015, p. 63), presentamos las ideas clave de estas técnicas, que explicamos brevemente a continuación.

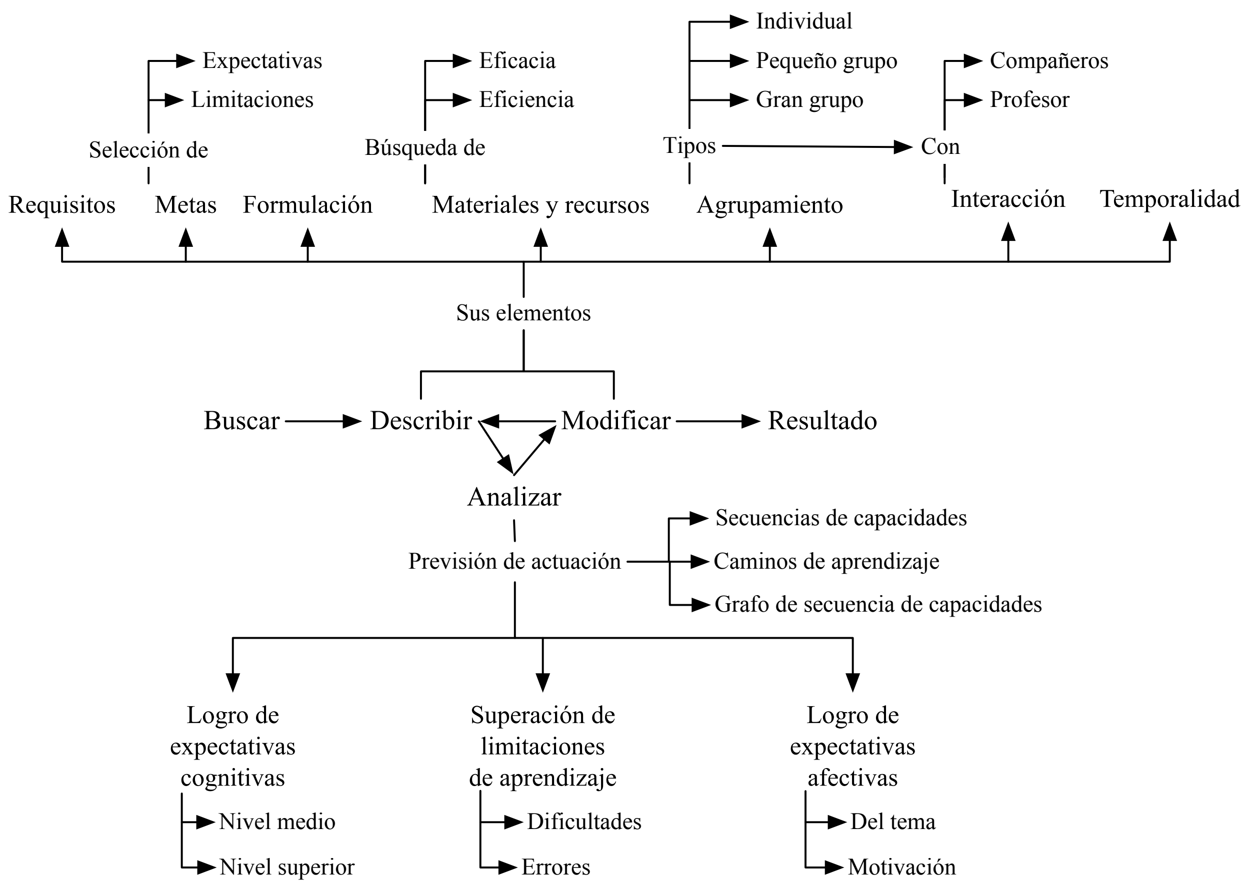

Figura 5. Descripción, análisis y modificación de una tarea

Para analizar y modificar una tarea, es necesario describirla. Describir una tarea consiste en especificar sus elementos. Consideramos siete elementos de una tarea (parte superior de la figura 5): requisitos, metas, formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. Los requisitos son los conocimientos y destrezas que son necesarios para poder abordar la tarea. Las metas son los conocimientos y destrezas que se esperan desarrollar con motivo de abordarla. La formulación es la instrucción (usualmente escrita) que se entrega a los estudiantes. Los materiales y recursos son las herramientas que los estudiantes pueden utilizar para abordar la tarea. El agrupamiento se refiere a las formas de organización de los estudiantes que se sugieren para resolver la tarea. La interacción tiene que ver con las formas en que se prevé que los estudiantes y el profesor interactuarán cuando se aborde la tarea. Finalmente, la temporalidad hace referencia a los momentos y tiempos en los que se atiende a las diferentes partes de la tarea.

Analizar una tarea consiste en establecer en qué medida y de qué forma la tarea contribuye al logro de las expectativas (de aprendizaje y de tipo afectivo) y a la superación de las limitaciones de aprendizaje. Más adelante, describiremos en detalle las técnicas para realizar este análisis. Estas técnicas se basan principalmente en la comparación del grafo de secuencias de capacidades de la tarea con el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje al que la tarea se refiere.

2. Ejemplo

Con el objetivo de contribuir a la comprensión de cada una de las ideas clave del análisis de instrucción y de las relaciones entre ellas, desarrollaremos un ejemplo a lo largo del documento. Además de este ejemplo transversal, también haremos referencia a otros ejemplos. El ejemplo transversal Reparto de papel silueta es una adaptación de una parte de una clase de un profesor chileno a la que se le ha llamado Reparto de papel lustre. Este fragmento de clase fue el caso escogido por Nielka Rojas para la realización de su trabajo de titulación de máster (Rojas, 2010). Con el fin de que el ejemplo resulte útil para contribuir a la comprensión de la ideas clave de este módulo, creamos un marco en el que ubicamos la tarea. La tarea aborda el tema de fracciones a decimales. Las expectativas de aprendizaje y afectivas y limitaciones de aprendizaje del tema forman parte de ese marco. Presentamos esas expectativas y limitaciones a continuación.

La tarea que abordaremos como ejemplo se ubica en una unidad didáctica diseñada para estudiantes de cuarto grado (alumnos de 9-10 años). La unidad didáctica busca que los estudiantes pongan en marcha actuaciones propias de cada uno de los procesos matemáticos (formular, emplear e interpretar) y contribuir, con mayor énfasis, al desarrollo de las capacidades fundamentales de comunicación, representación y matematización. Los siguientes son los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica.

O1. Transformar una situación de reparto en un modelo matemático de fracciones.

O2. Traducir de un fraccionario a un decimal y viceversa.

O3. Interpretar los resultados obtenidos asociando el modelo matemático con los elementos de la situación.

La tarea con la que ejemplificaremos busca contribuir al objetivo 1 al que están asociadas las capacidades que describimos en la tabla 1.

Tabla 1

Capacidades del tema de fracciones a decimales

C	Capacidad
C1	Dividir en dos partes iguales una unidad (de forma cuadrada) haciendo uso de la mediana
C2	Asignar a cada parte un nombre verbal
C3	Asignar a cada parte un nombre escrito
C4	Construir el entero o unidad haciendo uso de un material o recurso
C5	Construir simbólicamente el entero o unidad
C6	Sumar fracciones con igual denominador
C7	Hallar la fracción de una fracción
C8	Determinar cuánto es la fracción de la fracción en relación a la unidad
C9	Identificar que una parte de la unidad puede ser considerada como un todo o unidad
C10	Sumar fracciones con diferente denominador
C11	Expresar una fracción mayor a uno con un número mixto
C12	Determinar fracciones equivalentes a otra
C13	Expresar una fracción mayor a uno con una fracción impropia
C14	Reconocer la unidad
C15	Identificar la equivalencia entre fracción impropia y número mixto
C16	Tomar una fracción de una fracción haciendo uso de un material o recurso
C17	Unir partes de un mismo tamaño haciendo uso de un material o recurso
C18	Dividir un conjunto discreto en grupos del mismo tamaño
C19	Identificar la cantidad de elementos del conjunto
C20	Identificar la equivalencia en superficie entre partes con diferente forma e igual área
C21	Transformar una fracción en decimal
C22	Transformar un decimal en fracción
C23	Establecer relaciones de orden entre fracciones
C24	Expresar una fracción mayor a uno con un número mixto que incluye lenguaje natural
C25	Reconocer formas equivalentes de escribir un número mixto
C26	Dividir un cuadrado en dos partes iguales haciendo uso de una de sus diagonales
C27	Relacionar los objetos obtenidos con el símbolo usado para representar la respuesta

Nota. C = capacidad.

En la tabla 2, describimos las dificultades y los errores en los que, de acuerdo con nuestra indagación, los estudiantes pueden incurrir en el tema de fracciones a decimales.

Tabla 2
Resumen limitaciones de aprendizaje de fracciones a decimales

E	Descripción
	Aplicación de propiedades de los números naturales a las fracciones
E1	Ordenar fraccionarios con base en el orden natural de los denominadores
E2	Sumar numeradores y denominadores con el objetivo de obtener la suma de dos fracciones
	Identificación del rol del numerador y denominador
E3	Escribir $\frac{n}{m}$ en lugar de $\frac{m}{n}$
E11	Considerar una fracción propia y su equivalente en número mixto como diferentes
E12	Presentar un resultado que no corresponde a las partes obtenidas
	Identificación de la unidad
E4	Identificar el denominador con la cantidad total de partes que resultan al dividir las unidades y no por el número de partes en que se ha dividido la unidad.
E5	Sumar fracciones que no corresponden a la misma unidad.
E9	Considerar unidades continuas como no susceptibles de ser divididas
E14	Considerar que una parte no puede ser dividida
	Considerar partes de la unidad formadas por objetos concretos
E6	Confundir la cantidad de objetos de cada parte (subgrupo) con el número de partes que se obtengan
E13	Tomar partes que no correspondan a la unidad
	Trabajo con la recta numérica
E7	Identificar la unidad en una recta numérica de manera parcial
	Equivalencia entre diferentes particiones
E8	Ubicar de manera desordenada las áreas obtenidas al establecer relaciones de orden entre áreas de acuerdo a la percepción
E10	Dividir la unidad en partes no equivalentes

Nota. E = error.

Por último, con la unidad didáctica, se busca contribuir a las expectativas afectivas que describimos en la tabla 3.

Tabla 3

Listado de expectativas afectivas del tema fracciones a decimales

EA	Descripción
1	Desarrollar interés por la argumentación de resultados en situaciones de la vida diaria que involucren la noción fracción
2	Generar interés por el aprendizaje de la fracciones al representar los resultados de un problema de distintas maneras
3	Desarrollar curiosidad por el trabajo con nociones de la fracción que permitan matematizar situaciones de la vida real

Nota. EA = expectativa afectiva.

3. Tarea matemática escolar

El término "tarea" tiene diversos significados en el entorno educativo. En Colombia, el significado usual de tarea se refiere a los deberes que el profesor asigna a los estudiantes para que ellos realicen en su casa y presenten en la siguiente sesión de clase. En algunas ocasiones, también hace referencia a los ejercicios rutinarios que el profesor asigna a los estudiantes durante una clase. Nosotros utilizamos una noción de tarea con un significado más amplio. Como lo explicamos anteriormente, las tareas son el elemento central del proceso de enseñanza y aprendizaje.

3.1. Tipos de tareas

En el módulo de análisis cognitivo, presentamos los tipos de tareas que reorganizamos aquí de acuerdo con el esquema de la figura 6.

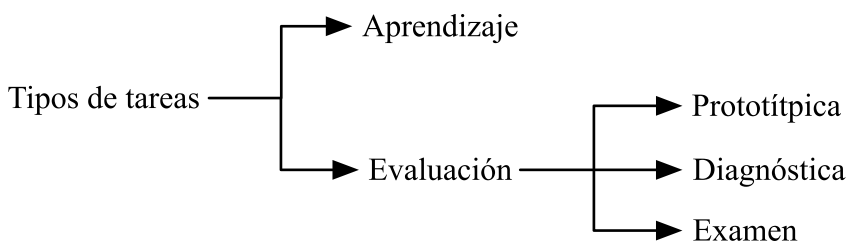

Figura 6. Tipos de tareas

Distinguimos entre tareas de aprendizaje y tareas de evaluación. Las tareas de aprendizaje son aquellas tareas que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que ellos logren las expectativas que ha establecido y superen sus limitaciones de aprendizaje. Este tipo de tareas son el centro de este módulo. Las tareas de evaluación son aquellas que se utilizan para recoger información sobre la actuación de los estudiantes y establecer sus conocimientos y habilidades con el propósito ya sea de adaptar la enseñanza a esos conocimientos y habilidades, o de clasificar a los estudiantes para asignar una nota. Este es el caso, por ejemplo, de la tarea diagnóstica y el examen final que se considerarán en el módulo de análisis de actuación. Adicionalmente, las tareas prototípicas que se introdujeron en el módulo del análisis cognitivo también son tareas de evaluación. Estas son las tareas matemáticas representativas del objetivo. El conjunto de tareas prototípicas de un objetivo es aquel conjunto de tareas que, para un profesor y unos estudiantes concretos, si un estudiante logra resolverlas, entonces el profesor considera que él ha logrado el objetivo.

3.2. Tareas de aprendizaje

En este módulo, nos centramos en las tareas de aprendizaje y utilizamos el término *tarea o tarea matemática escolar* en un sentido amplio, como una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, que el profesor propone a los estudiantes. En este sentido, una tarea matemática escolar es una demanda estructurada de actuación que el profesor proporciona a los estudiantes con carácter intencional. Con motivo de una tarea, profesor y estudiantes realizan *actividades*, que los estudiantes pueden desarrollar de manera individual o en grupo. Al asignar una tarea, el profesor debe tener un propósito —que contribuya al logro de uno o más objetivos de aprendizaje y expectativas afectivas, y/o a la superación de uno o más errores y dificultades—. Al abordar una tarea, los estudiantes son interpelados por ese propósito, al que responden con una intención —resolverla—. Las actividades del profesor y de los estudiantes reflejan su actuación en la búsqueda de sus propósitos e intenciones (Gómez y Romero, 2015).

Una tarea de aprendizaje tiene un contenido matemático, implica un requerimiento de acción por parte de los estudiantes y pretende contribuir a su aprendizaje. Una tarea se establece dentro de un contexto (matemático o no matemático), proporciona una información dentro de ese contexto y requiere que el estudiante produzca y presente otra información como respuesta y concreción de sus acciones. Como explicamos en el siguiente apartado, nosotros concretamos esta idea con una condición adicional: una tarea solicita la solución de un solo requerimiento (pregunta) con base en una información dada. Por consiguiente, aún si tienen el mismo contexto y la misma información de partida, dos preguntas en relación con ese contexto y esa información pueden determinar dos tareas diferentes.

3.3. Grafo de secuencias de capacidades de una tarea y de un objetivo

El grafo de secuencias de capacidades de un objetivo de aprendizaje es la referencia para delimitar la noción de tarea. Supongamos que tenemos un objetivo de aprendizaje cuyo grafo es como mostramos en la figura 7. Aunque no lo explicamos aquí, este es el grafo de secuencias de capacidades del objetivo "Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado" en el tema de permutaciones sin repetición para grado 11 (Benavides, Carrillo, Ortiz, Parra, Velasco y Gómez, 2016). En este grafo, la parte superior, con las secuencias de capacidades S4, S5 y S6, corresponde al conteo de las permutaciones con base en tres sistemas de representación (diagrama de árbol, tabla y lista). La sección intermedia del grafo corresponde al cálculo de la cantidad de permutaciones con base en el principio de multiplicación. Y la sección inferior corresponde a ese cálculo con base en la fórmula usual (con factoriales).

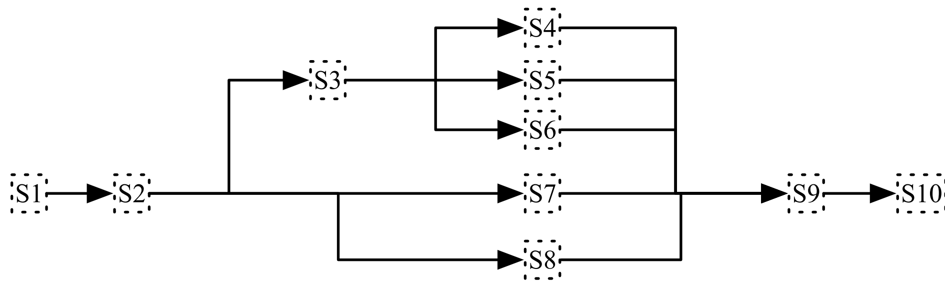

Figura 7. Grafo de secuencias de capacidades de un objetivo de aprendizaje

Una tarea puede promover la activación de más de un camino de aprendizaje. Por ejemplo, en el caso del grafo de secuencias de capacidades de la figura 7, una tarea puede inducir a unos estudiantes a activar el camino de aprendizaje S1-2-3-5-9-10 e inducir a otros estudiantes a activar el camino de aprendizaje S1-2-3-6-9-10. La conjunción de esos caminos de aprendizaje configuran el grafo de secuencias de capacidades de la tarea que explicaremos con más detalle más adelante. Delimitamos la noción de tarea al imponer las siguientes dos condiciones sobre su grafo de secuencias de capacidades.

1. El grafo de secuencias de capacidades de una tarea debe comenzar en la secuencia de capacidades inicial del grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje (S1 en la figura 7) y debe terminar en la secuencia de capacidades final del grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje (S9 en la figura 7). Esto quiere decir que una tarea no puede promover la activación de un camino de aprendizaje parcial. En el caso de la figura 7, un camino de aprendizaje parcial sería, por ejemplo, de la forma S2-3-5. Si una tarea promueve este camino de aprendizaje, entonces no cumple con esta primera condición, dado que ese camino de aprendizaje no comienza en S1 y no termina S9.
2. Una tarea no debe promover dos caminos de aprendizaje completos secuencialmente. Por ejemplo, una tarea que induzca a los estudiantes a activar primero el camino de aprendizaje S1-2-3-4-9-10 y, una vez hecho esto, los induzca a activar el camino de aprendizaje S1-2-3-6-9-10 no cumple con esta condición. En este caso, se trata de dos tareas diferentes.

3.4. Contexto y numerales de una tarea

Las condiciones que introdujimos en el apartado anterior tienen implicaciones en el papel del contexto y de los numerales de una tarea. Consideremos, por ejemplo, la siguiente tarea (Gómez y Romero, 2015).

> Para abrir una cuenta de correo electrónico en el servicio conteo.com, un usuario debe escoger una contraseña de tres caracteres diferentes con las cuatro primeras letras del alfabeto en minúscula (a, b, c y d). Haz un diagrama de árbol que represente esta situación.

Esta tarea se ubica en un contexto (contraseñas para el correo electrónico) y proporciona una información inicial (cantidad de caracteres de la contraseña y letras que se pueden utilizar). También presenta un requerimiento (realizar el diagrama de árbol). En este caso, la tarea promueve la activación de un único camino de aprendizaje que contiene solamente la secuencia de capacidades S4. Por consiguiente, no cumple con la primera condición que mencionamos anteriormente y no se puede considerar que sea una tarea en relación con el objetivo de aprendizaje en cuestión (figura 7).

Por otro lado, podemos considerar la siguiente tarea.

> Para abrir una cuenta de correo electrónico en el servicio conteo.com, un usuario debe escoger una contraseña de tres caracteres diferentes con las cuatro primeras letras del alfabeto en minúscula (a, b, c y d).
>
> 1. El dueño de conteo.com quiere saber cuántas contraseñas diferentes puede haber y entender por qué. Teniendo en cuenta que al dueño de conteo.com no le gustan las fórmulas, escribe un texto, que use un diagrama de árbol o un listado, en el que le muestres al dueño de conteo.com cuántas contraseñas puede haber y cómo se obtiene ese resultado.
>
> 2. Los técnicos de conteo.com están pensando en permitir que se usen las 27 letras de alfabeto en minúsculas para las contraseñas de tres caracteres diferentes. Ellos quieren saber cuántas contraseñas pueden haber y por qué. Escribe un texto en el que muestres cómo se puede hallar el número de contraseñas teniendo en cuenta el número de letras que se puede usar para cada uno de los tres caracteres.

Esta tarea tiene un contexto (contraseñas) y dos numerales que se diferencian en la información inicial que proporcionan (en el primer numeral se usan cuatro letras y en el segundo 27). Los dos numerales incluyen un requerimiento (cantidad de contraseñas y explicación). El primer numeral induce a los estudiantes a activar alguno de los tres caminos de aprendizaje de la sección superior del grafo de la figura 7 (al usar los sistemas de representación), mientras que el segundo numeral induce a los estudiantes a activar el camino de aprendizaje de la sección intermedia del grafo (al usar el principio de multiplicación). Por consiguiente, esta tarea induce a los estudiantes a activar dos caminos de aprendizaje de manera secuencial. En este sentido, la tarea no cumple con la segunda condición que mencionamos en el apartado anterior. Son dos tareas diferentes que comparten un mismo contexto.

Finalmente, consideremos la siguiente tarea.

> Para abrir una cuenta de correo electrónico en el servicio conteo.com, un usuario debe escoger una contraseña de tres caracteres diferentes con las cuatro primeras letras del alfabeto en minúscula (a, b, c y d). El dueño de conteo.com quiere saber cuántas contraseñas diferentes puede haber y entender por qué. Teniendo en cuenta que al dueño de conteo.com no le gustan las fórmulas, escribe un texto en el que le muestres al dueño de conteo.com cuántas contraseñas puede haber y cómo se obtiene ese resultado. Para ello realiza los siguientes pasos.
>
> 1. Establece los datos del problema.
>
> 2. Decide si el problema corresponde a un problema de permutaciones. Si es el caso, continúa con los siguientes pasos.
>
> 3. Decide si utilizas un diagrama de árbol o una lista para representar las permutaciones.
>
> 4. Para cualquiera de los dos casos anteriores, representa las permutaciones.
>
> 5. Cuenta la cantidad de permutaciones.
>
> 6. Indica cuántas permutaciones son.

7. Explica esa cantidad con base en la representación que utilizaste.

Observamos que esta tarea tiene 7 numerales, dentro de un contexto que proporciona una información de partida. Se requiere una información final. La tarea promueve la activación de dos posibles caminos de aprendizaje completos (S1-2-3-4-9-10 o S1-2-3-5-9-10), pero el estudiante solo activa uno de ellos. Por consiguiente, la tarea cumple con las dos condiciones del apartado anterior. No obstante, la tarea guía al estudiante en cada paso de su actividad. Cabe preguntarse si este tipo de tarea promueve realmente el aprendizaje de los estudiantes. Esta es una cuestión que abordaremos más adelante.

Por otro lado, como veremos en el ejemplo que presentaremos más adelante, el contexto de una tarea puede ser más amplio y complejo que el que presentamos en la tarea anterior. Ese contexto puede incluir, por ejemplo, explicaciones y ejemplos por parte del profesor. Cuando el profesor explica una cuestión o presenta un ejemplo, él está proporcionando información. La explicación tiene un contenido matemático y un propósito desde la perspectiva del aprendizaje de los estudiantes. Con la explicación, el profesor espera que los estudiantes atiendan y hagan un esfuerzo por comprenderla. En este sentido, incluso una explicación del profesor, al ser una demanda estructurada, con un contenido matemático y un propósito de aprendizaje, puede formar parte de una tarea matemática escolar.

Como lo acabamos de mencionar, una tarea implica una información de partida y una información final que se requiere. Por consiguiente, varias tareas pueden compartir un mismo contexto. En este sentido, lo que usualmente se considera como partes o numerales de un problema, pueden constituirse como varias tareas diferentes. Como veremos más adelante, una tarea puede realizarse en diferentes etapas, cada una con sus propias características, en términos del contenido que se aborda, los materiales y recursos que se utilizan, y los esquemas de agrupamiento e interacción que se proponen.

3.5. Ejemplos de tareas tradicionales

Como mencionamos anteriormente, el significado más usual del término "tarea" se refiere a lo que el profesor propone para que el estudiante realice en su casa. Ejercicios, como los que enumeramos a continuación, son ejemplos de ese tipo de requerimiento.

1. Convertir las siguientes fracciones a decimales.

$$\frac{24}{25}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}$$

2. Escribir el signo > o <, donde corresponda.

$$\frac{3}{7}\{\quad\}\frac{3}{9}, \frac{2}{5}\{\quad\}\frac{3}{7}, \frac{3}{9}\{\quad\}\frac{3}{4}$$

3. Convertir los siguientes decimales a fracciones.

$$0{,}05; 2{,}3; 0{,}1; 2{,}5$$

3.6. Ejemplos de tareas en el sentido amplio

Además de ejercicios como los anteriores, los talleres, guías u otras propuestas en clase, que muy rara vez reciben el calificativo de tarea, pueden incluir enunciados del siguiente tipo.

> Ana, María y Pedro compran un refresco cada uno. A los 10 minutos, le queda la mitad a Ana, los tres cuartos a María y un tercio a Pedro. Ordena, de menor a mayor a los tres amigos, según la cantidad que les queda de refresco.

El anterior es un ejemplo bastante frecuente de una tarea (en el sentido tradicional) que el profesor propone a sus estudiantes. Este tipo de tareas se caracteriza por referirse a una realidad artificial en la que

- ♦ falta frecuentemente la actividad manipulativa;
- ♦ el trabajo se dirige al alumno individual, sin tener en cuenta formas de agrupación alternativas, ni interacciones entre el alumnado;
- ♦ el foco está en hechos y procedimientos algorítmicos, en detrimento del desarrollo de habilidades, estrategias propias y conexiones; y
- ♦ se fomenta la búsqueda de respuestas correctas, en lugar de motivar una actitud exploratoria e inquisitiva (Gómez y Romero, 2015).

Sin embargo, la idea amplia de tarea también abarca propuestas como la que ilustramos en el ejemplo que vamos a usar de forma transversal. Estas propuestas se alejan de la idea de tarea rutinaria. La tarea se denomina Reparto de papel silueta y se esboza mediante la siguiente trascripción del comienzo del desarrollo de una clase de un profesor de educación primaria.

1	Profesor	Vamos a iniciar una nueva unidad de estudio: la unidad se llama fracción.
2	Alumnos	¿Cómo fracción?
3	Profesor	Que vamos a ver niños, hoy día vamos a ver fraccionamiento de enteros en partes iguales, la escritura, la escritura de fracciones, trabajando con papelitos silueta [en cuadros] que le pedí ayer que trajeran.
4	Profesor	[El profesor pide a los alumnos que escriban en su cuaderno y escribe en la pizarra: Unidad V, Fracción. Debajo: Fraccionamiento, lectura y escritura de fracciones. El profesor saca a tres alumnas adelante y explica a los alumnos.]
5	Profesor	Le voy a pasar a María 5 papeles silueta y ella tiene que repartir entre sus dos compañeras en partes iguales.
6	Alumno	No se puede.
7	Alumnos	Siiii.
8	Profesor	SHuuu, calladito a ver qué va hacer ella.
9	Profesor	María ¿qué puedes hacer tú para repartirlo?

Como parte de la adaptación de la tarea, hemos supuesto que el profesor solicita a María que escriba el total de hojas que le correspondió a cada una de las estudiantes luego de la repartición.

En este ejemplo de tarea matemática, se aprecia que el profesor comienza presentando la lección. Luego, recuerda una petición que hizo el día anterior. A continuación, repite la presentación y escribe en la pizarra el nombre del tema y sus partes. Posteriormente, plantea un problema a una alumna. Los otros estudiantes se hacen notar, al hacer comentarios. Como vemos, la clase se compone de actuaciones del profesor y los alumnos. Mientras el profesor explica, hace y dice, el alumno escucha, atiende y mira. Es el caso de la primera intervención. Cuando el profesor pide que haga un reparto (intervenciones 5 a 9), la alumna piensa, comienza a hacer y los compañeros opinan. Podemos decir que el profesor ha realizado una actividad de presentación (intervenciones 1, 3 y 4), mientras los alumnos han preguntado (intervención 2), y escuchado (intervenciones 1, 3 y 4). Luego, el profesor pide que la alumna haga un reparto que no le resulta evidente (intervenciones 5 y 9). Observamos que, en la clase, el profesor realiza actividades a las que el alumno replica al realizar algo (a veces alejado de lo que el profesor pretende).

Ponte, Boavida, Graça y Abrantes (1997) destacan que la naturaleza de la actividad de los alumnos en el aula de matemáticas es una cuestión central en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. El aprendizaje de las matemáticas es siempre el producto de actividades, y si las actividades se reducen, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas, entonces eso será lo que los estudiantes aprenderán, y ello va a perdurar —es decir, aprender de memoria las fórmulas—. Por tanto, los estudiantes desarrollarán una visión particular de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Flores, Gómez y Marín, 2013). Otro ejemplo de tarea no rutinaria, que hemos adaptado de una pregunta liberada de PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013), es el siguiente.

> Analiza la situación que se ha proyectado (se utiliza un televisor o videobeam para explicarla) y determina las posibles soluciones a la misma. Reúnete, luego, con un compañero para compartir las soluciones que han propuesto y llegar a acuerdos.

La situación que se ha proyectado es la siguiente.

> Mark (de Sydney, Australia) y Hans (de Berlín, Alemania) se comunican a menudo a través de Internet mediante el chat. Tienen que conectarse a Internet simultáneamente para poder chatear. Para encontrar una hora apropiada para chatear, Mark buscó un mapa horario mundial y halló lo que aparece en la figura 8.

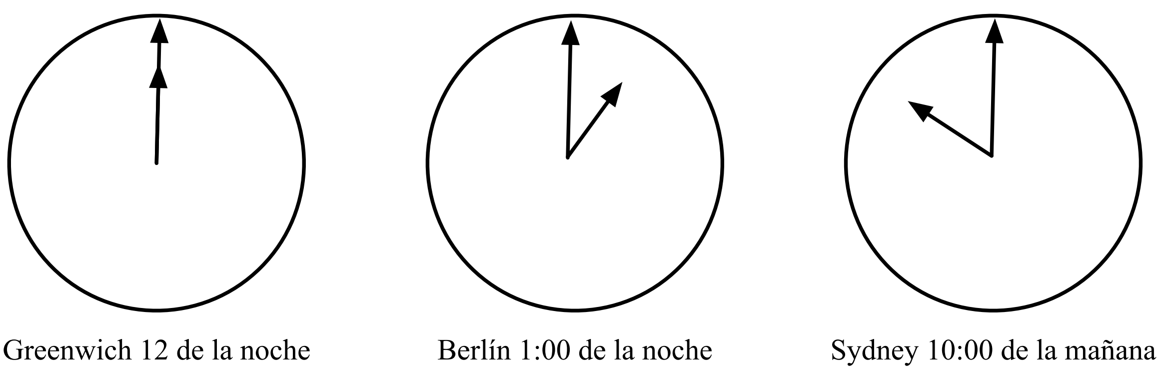

Figura 8. Horarios en tres ciudades

> Mark y Hans no pueden chatear entra las 9:00 a. m. y las 4:30 p. m. de sus respectivas horas locales, porque tienen que ir al colegio. Tampoco pueden hacerlo desde las 11:00 p. m. hasta las 7:00 a.m. de sus respectivas horas locales, porque estarán durmiendo.
>
> ¿A qué horas podrían chatear Mark y Hans?

3.7. Contextos auténticos en las tareas

El ejemplo que acabamos de presentar de tarea no convencional o no rutinaria está planteado en un contexto auténtico. En el marco conceptual de PISA 2012 se afirma que tal marco "se ha diseñado para hacer que las matemáticas, relevantes para los alumnos de 15 años, sean más claras y explícitas, garantizando a su vez que las preguntas elaboradas sigan insertadas en contextos auténticos y significativos" (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013, p. 8). En el diseño de tareas y secuencia de tareas, se exalta la noción de autenticidad del contexto. En este módulo, entendemos autenticidad del contexto como el papel que el contexto juega para caracterizar la tarea. El contexto de una tarea no es auténtico si, al eliminarlo o cambiarlo, la tarea mantiene sus características principales como demanda estructurada para los estudiantes. Es el caso de la tarea de los refrescos que presentamos en el apartado 3.6. Es habitual encontrarse con tareas en las que el contexto puede ignorarse completamente y esto no afecta en ningún sentido la tarea. En otras tareas, por el contrario, las condiciones del contexto, son clave a la hora de, por ejemplo, deducir información no explícita.

Se espera que las tareas con contexto auténtico jueguen un papel relevante en la secuencia de tareas que se obtenga con motivo de realizar el análisis de instrucción. Las tareas que hagan parte de la secuencia de tareas pueden estar enmarcadas en contextos del mundo real, cualquiera sea el tipo —personal, profesional, social ó científico—. Hay que aclarar que, desde esta perspectiva, también se contemplan las tareas meramente matemáticas. PISA enmarca las tareas matemáticas en el contexto científico. El contexto de una tarea matemática puede ser auténtico. Por consiguiente, una tarea matemática es preferible a una tarea en la que el contexto no es auténtico. Consideremos la siguiente tarea.

> En una tienda de dulces, $\frac{5}{8}$ de los productos son pasteles, $\frac{2}{7}$ son tartas y el resto son diferentes clases de pan. Si en total la tienda tiene 224 productos, ¿cuántos hay de cada uno de esos tres tipos?

En esta tarea, se evidencia algo que no está del todo bien, por lo menos, desde la perspectiva de este módulo. El contexto no es auténtico aunque se pretenda mostrarlo como tal.

4. Elementos de una tarea

En este módulo, consideramos siete elementos para describir una tarea matemática escolar: (a) sus requisitos, (b) su meta, (c) su formulación, (d) los materiales y recursos que incluye, (e) los tipos de agrupamiento que prevé, (f) las formas de interacción que promueve y (g) su temporalidad (figura 9).

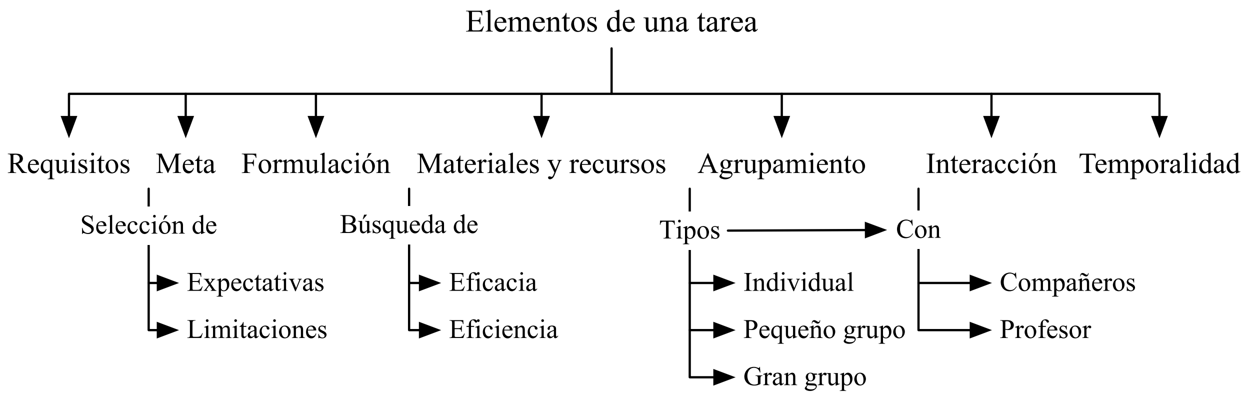

Figura 9. Elementos para describir una tarea matemática escolar

A continuación, describimos estos elementos.

4.1. Requisitos

Al diseñar una tarea, el profesor supone que los estudiantes tienen unos conocimientos y destrezas previos que les permiten abordarla. Estos son los *requisitos* de la tarea. Este elemento de la tarea hace referencia a aquellos conocimientos y destrezas que, de acuerdo con el nivel educativo de los estudiantes, se vinculan directamente con las metas y el contenido matemático de la tarea. Los requisitos resumen en pocas frases esos conocimientos y destrezas, y no implican conocimientos y destrezas básicos que se han desarrollado en niveles o temas anteriores y que se supone que forman parte de la formación matemática previa del estudiante.

4.2. Metas

Las *metas* de una tarea matemática escolar resumen los propósitos que el profesor asigna a la tarea. Estos propósitos se refieren a aquellos aspectos de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo a los que la tarea pretende contribuir, y a aquellos errores y dificultades que el profesor espera que la tarea contribuya a superar. Las metas de la tarea se formulan con frases concisas que no implican entrar en detalle en aspectos específicos de la tarea o de las expectativas, pero que permiten delimitar el foco de la tarea desde el punto de vista del aprendizaje de los escolares. Una vez que se ha analizado la tarea, en términos de su grafo de secuencias de capacidades, es posible formular las metas de la tarea de manera más técnica. Abordaremos esta aproximación en el módulo de análisis de actuación.

Usualmente, una tarea matemática escolar difícilmente puede abordar todas las expectativas y limitaciones de aprendizaje de un tema o, incluso, de un objetivo de aprendizaje. Cada tarea centra su foco de atención en algunos aspectos de esas expectativas y limitaciones. Por esa razón, resulta importante establecer cuáles son esos aspectos que se pretenden abordar (planificación) y tenerlos en cuenta durante su implementación.

4.3. Formulación de la tarea matemática escolar

La formulación de la tarea se refiere al texto o instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y que incluya la información de partida y especifica lo que espera que ellos realicen y produzcan como respuesta. En general, la formulación de la tarea matemática describe un contexto, proporciona una información inicial y requiere que los estudiantes produzcan una información final como su solución.

4.4. Materiales y recursos

Un recurso es cualquier medio que se pueda emplear en el aprendizaje de un concepto o procedimiento matemático determinado, aunque no haya sido diseñado específicamente para ello. Los materiales se distinguen de los recursos porque se diseñan con fines didácticos (Carretero, Coriat y Nieto, 1993). La tiza, la pizarra (tradicional o electrónica), el papel y el lápiz son recursos; mientras que el geoplano o el dominó de fracciones son materiales diseñados para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Algunos profesores pueden pensar que el uso de materiales y recursos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es la solución a una parte importante de las dificultades que ellos se encuentran cuando quieren contribuir al aprendizaje de los estudiantes. La tecnología es un ejemplo de esta forma de ver los materiales y recursos. Es usual encontrar argumentos (particularmente en los medios de comunicación) que sugieren que la "solución" a los problemas de la enseñanza y aprendizaje las matemáticas radica principalmente en lograr que profesor y estudiantes tengan acceso a los recursos tecnológicos apropiados. En algunas ocasiones, las autoridades gubernamentales hacen eco de estos argumentos y sugieren que, con políticas que implican el acceso más extendido a los recursos informáticos, se está dando solución a los problemas en cuestión. ¿Pero es esto válido? Resulta natural preguntarse acerca de qué materiales y recursos se pueden y/o deben usar con una tarea matemática, por qué se deben usar, para qué usarlos y cómo usarlos. Sugerimos abordar esta cuestión con base en dos criterios: eficiencia y eficacia (Gómez y Romero, 2015). Presentamos a continuación algunas reflexiones acerca de estos dos criterios, que ejemplificaremos en el apartado 5.4. Nos basaremos en estos dos criterios para proponer una técnica de análisis de la pertinencia de la inclusión de un material o recurso en una tarea matemática escolar.

Eficiencia y eficacia de los materiales y recursos

La eficiencia se refiere a la disponibilidad y buen uso de los materiales y recursos. No tiene sentido que diseñemos una tarea que supone que cada estudiante tendrá un computador para trabajar en clase, si la institución educativa no tiene esa infraestructura. En algunas ocasiones, los materiales y recursos son demasiado sofisticados y requieren de procesos de preparación y entrenamiento de profesor y estudiantes. La eficiencia también tiene que ver con el tiempo que se requiere para realizar la tarea. En algunas ocasiones, el uso de materiales y recursos puede implicar que la resolución de la tarea matemática tome más tiempo del que se tiene disponible. Un diseño eficiente de una tarea es aquel que requiere la menor cantidad de materiales y recursos para lograr nuestros propósitos.

¿Cómo podemos hacer un uso eficaz de los materiales y recursos? Responder a esta pregunta implica reflexionar sobre cómo los materiales y recursos pueden contribuir al logro de los propósitos que se tienen con una tarea matemática. Los materiales y recursos pueden jugar el papel de intermediarios entre el conocimiento matemático y el de los estudiantes, y servir de modelos de las ideas matemáticas, al proporcionar un paso de lo concreto a lo abstracto. También pueden fomentar el análisis de información, el planteamiento de interrogantes, la búsqueda de estrategias propias, el descubrimiento de propiedades y relaciones, y el análisis y discusión de resultados. Adicionalmente, los materiales y recursos pueden generar motivación e interés en los estudiantes. En general, cuando se introduce un material o un recurso en la clase de matemáticas, los estudiantes se muestran curiosos, deseosos de manipular y explorar, y mucho más dispuestos a resolver cuestiones matemáticas con su ayuda.

Análisis de los materiales y recursos

Las reflexiones anteriores permiten establecer una técnica de análisis de un material o recurso que hayamos encontrado y que pensemos que pueda ser útil en una tarea matemática escolar. Esta técnica implica preguntas como las siguientes.

1. *Acceso*. En el contexto de la institución educativa, ¿el profesor y los estudiantes tienen acceso a ese material o recurso?, ¿se puede asegurar que el material o recurso funcionará apropiadamente cuando se vaya a usar en clase?
2. *Preparación profesor*. ¿Está el profesor preparado para usar el material o recurso? Si no lo está, y si se tiene en cuenta la contribución del material o recurso a la tarea (ver pregunta 5 más adelante), ¿tiene sentido que el profesor invierta tiempo en prepararse para saber usarlo?
3. *Preparación estudiantes*. ¿Cuánto tiempo se requiere para que los estudiantes aprendan a manejar el material o recurso? Si se tiene en cuenta la contribución del material o recurso a la tarea (ver pregunta 5 más adelante), ¿tiene sentido que los estudiantes inviertan tiempo en prepararse para saber usarlo?
4. *Tiempo adicional*. ¿Cuánto tiempo adicional implica la inclusión del material o recurso en la realización de la tarea?, ¿vale la pena invertir ese tiempo cuando se tiene en cuenta la contribución del material o recurso a la tarea (ver pregunta 5 a continuación)?
5. *Metas*. ¿En qué medida y de qué forma la inclusión del material o recurso contribuye a las metas de la tarea?, ¿por qué esa contribución no habría sido posible sin la inclusión del material o recurso?
6. *Demandas cognitivas*. ¿Juega el material o recurso un papel de intermediario entre los conocimientos previos de los estudiantes y los conocimientos y destrezas que se quieren desarrollar con la tarea? En otras palabras, ¿el material o recurso permite que las demandas cognitivas de la tarea se adapten a los conocimientos previos de los estudiantes?
7. *Reto*. ¿El material o recurso contribuye a que la tarea se convierta en un desafío para los estudiantes?
8. *Errores*. ¿El material o recurso contribuye a que los estudiantes se percaten de sus errores y a que el profesor pueda contribuir a su superación?
9. *Indagación*. ¿El material o recurso fomenta el análisis de información, el planteamiento de interrogantes, la búsqueda de estrategias propias, el descubrimiento de propiedades y relaciones, y el análisis de resultados?

10. *Interacción*. ¿El material o recurso fomenta la interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y el profesor?
11. *Relevancia e interés*. ¿El material o recurso hace que la tarea sea interesante y relevante para el estudiante?, ¿promueve el interés y la curiosidad del estudiante por resolverla?
12. *Expectativas afectivas*. ¿El material o recurso contribuye a las expectativas de tipo afectivo que se establecieron para el tema?

Las preguntas de los numerales 1 a 4 se refieren a la eficiencia de la inclusión del material o recurso en la tarea. La primera pregunta del numeral 5 se enfoca específicamente a la eficacia del material o recurso desde la perspectiva cognitiva. Las preguntas de los numerales 6 a 12 se refieren a la eficacia del material o recurso desde la perspectiva afectiva. El profesor, al responder estas preguntas, puede establecer la pertinencia de un material o recurso para una tarea concreta. Este análisis puede dar lugar a que decida no utilizarlo.

Dado que, para una tarea, puede haber más de un material o recurso disponible, el profesor puede resumir el análisis de esos materiales o recursos en una tabla como la tabla 4. En esta tabla, los materiales o recursos se ubican en las filas. En las columnas, el profesor puede poner una marca para aquellos criterios correspondientes a las preguntas de los numerales 1 a 12 anteriores que él considera que el material o recurso en cuestión satisface. Las columnas están organizadas, primero, en criterios de eficiencia o eficacia. Los criterios de eficacia se organizan de acuerdo con las expectativas cognitivas (metas) y de tipo de afectivo.

Tabla 4
Pertinencia de los materiales y recursos

	Eficiencia				Eficacia							
	Acc	PrepP	PrepE	T	C	Afectivo						
MoR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Material o recurso 1		✓	✓		✓	✓		✓		✓	✓	✓
Material o recurso 2												
…												

Nota. MoR = material o recurso; Acc = acceso; PrepP = preparación profesor; PrepE = preparación estudiantes; T = tiempo; C = cognitivo (metas).

El análisis de los datos de la tabla 4 debe dar lugar a decisiones sobre qué material o recurso utilizar en la tarea.

4.5. Agrupamiento

En muchas clases de matemáticas, existe la tendencia a plantear el aprendizaje preferentemente de forma individual. El profesor da explicaciones, propone unas tareas matemáticas y solicita que cada estudiante las resuelva por sí solo en su cuaderno. A lo sumo, se permite un intercambio espontáneo con los compañeros durante la realización de las tareas para contrastar soluciones y para pedir y proporcionar alguna ayuda. Pero, ¿es esta la única manera de aprender matemáticas?, ¿es siempre la más eficaz?

Los estudiantes aprenden cuando se enfrentan a dificultades e intentan superarlas, cuando incurren en errores y cuando constatan que el conocimiento que dio lugar a esos errores no era apropiado para el contexto de la tarea y logran reorganizar su conocimiento de acuerdo con la nueva situación. En este sentido, la superación de los errores se constituye en un elemento fundamental para el aprendizaje. Por consiguiente, las tareas deben promover la puesta en juego del conocimiento matemático de los estudiantes, inducirles a que reconozcan el carácter parcial de ese conocimiento y motivarlos a que reorganicen ese conocimiento con motivo de su experiencia con la tarea. Estos propósitos se logran, en algunos casos, proponiendo tareas matemáticas que se resuelven individualmente, en las que el profesor pone en evidencia los errores en los que cada uno de los estudiantes ha incurrido. No obstante, como lo indicamos anteriormente, los estudiantes también aprenden cuando, al abordar problemas, interactúan entre sí y con el profesor, negocian significados y llegan a acuerdos sobre la validez de la solución a los problemas. Por consiguiente, el planteamiento del trabajo en parejas y en pequeños grupos tiene sentido para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Gracias a este trabajo colaborativo, se pueden afrontar dificultades que el trabajo individual no siempre resuelve. El trabajo en grupos pequeños sienta las bases de una puesta en común en gran grupo para contrastar puntos de vista, procedimientos y soluciones a las tareas propuestas. Por consiguiente, diferentes formas de agrupamiento pueden generar diferentes formas de interacción entre los estudiantes y de los estudiantes con el profesor. Y es, a través de esas interacciones, que los estudiantes aprenden. Como mostramos en la figura 10, los estudiantes pueden trabajar individualmente, en parejas y en pequeños grupos. Estas formas de agrupamiento dan lugar a diferentes tipos de interacciones que consideraremos en el siguiente apartado (Gómez y Romero, 2015; Ponte et al., 1997).

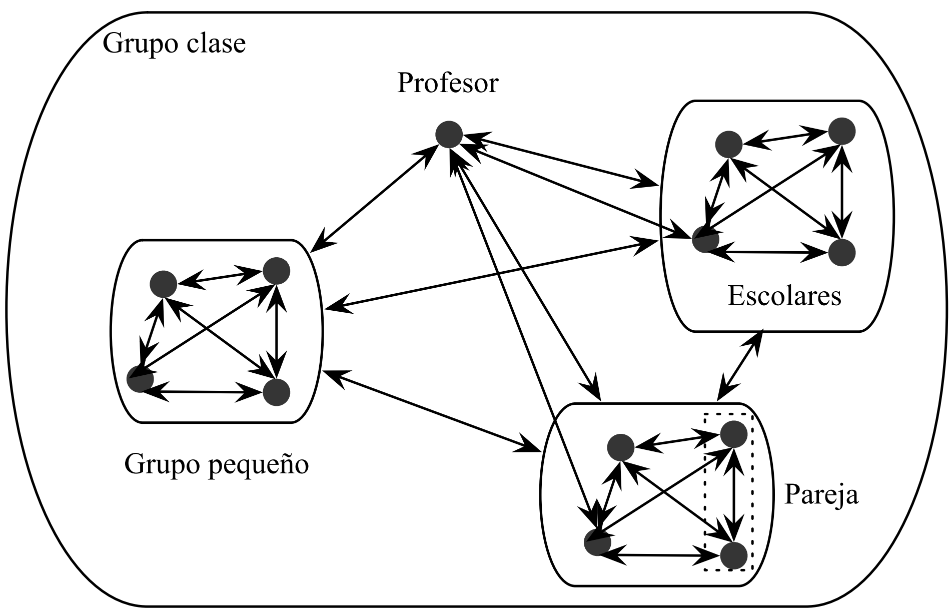

Figura 10. Agrupamientos e interacciones en clase

Una misma tarea matemática puede usar diferentes formas de agrupamiento a lo largo de su implementación en clase. Debemos entonces preguntarnos ¿qué tipos de agrupamiento son apropiados para una tarea dada y en qué momento y de qué forma se pueden usar? La respuesta a esta pregunta dependerá de las metas de la tarea y de la forma en que el profesor prevé que la interacción y la comunicación que se propiciará con motivo del agrupamiento contribuye a lograrla. El agrupamiento es uno de los criterios que define las etapas de temporalidad. Consideramos estas cuestiones a continuación.

4.6. Interacción y comunicación en clase

Diferentes formas de agrupamiento dan lugar a diferentes formas de interacción entre los estudiantes y a distintas formas de comunicarse durante la resolución de una tarea. La interacción se da entre diferentes actores: profesor, estudiante, pareja, grupo pequeño y grupo de clase. La importancia de prever los tipos de interacción, que se pueden dar cuando los estudiantes abordan una tarea, radica en que aprender matemáticas implica la capacidad de proponer soluciones a un problema que requiere las matemáticas, comunicar esas soluciones, reconocer las soluciones de otras personas y negociar significados para llegar a acuerdos. Los estudiantes aprenden cuando, para abordar el reto que la tarea implica, ponen en juego su conocimiento, negocian con sus compañeros y el profesor la solución a la que llegan, defienden la posición propia, critican la posición de los compañeros, llegan a acuerdos sobre una solución común y la comunican a los demás. Por consiguiente, para aprender matemáticas es necesario que las tareas promuevan la interacción entre los estudiantes y con el profesor. Como lo mostramos en el apartado anterior, esta interacción se puede dar, ya sea en parejas o grupos pequeños, cuando los estudiantes abordan un problema en la búsqueda de la solución y llegan a acuerdos sobre ella; o en gran grupo, cuando se comunica la solución, se argumenta sobre su validez y se llega a acuerdos con todos los compañeros y el profesor. Es importante resaltar que la interacción es un elemento de la tarea. El profesor debe planificarla y preverla.

Planificar y prever la interacción

Planificar y prever la interacción que se puede promover con una tarea tiene dos propósitos: fomentar el aprendizaje y permitir que el profesor pueda constatar, en la práctica, cómo se desarrolla el aprendizaje y cómo él puede influir en ese proceso (figura 11).

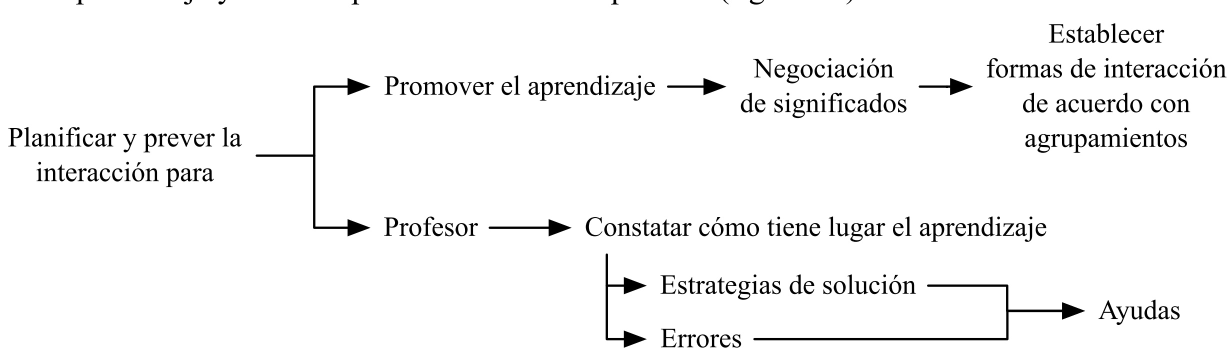

Figura 11. Propósitos de planificar y prever la interacción

Al diseñar una tarea, el profesor planifica la interacción para que se generen procesos de negociación de significados que promuevan el aprendizaje de los estudiantes. El profesor determina las formas de agrupamiento para las diferentes partes de la tarea y da indicaciones sobre cómo los estudiantes deben interactuar en cada parte. Su propósito es generar situaciones en las que los estudiantes pongan en juego su conocimiento, busquen soluciones a los requisitos de la tarea, compartan, discutan, critiquen sus soluciones, estrategias y argumentos, y lleguen a acuerdos sobre ellos. El aprendizaje de los estudiantes surge de este proceso de negociación de significados.

Planificar la actuación del profesor
La planificación de la interacción en una tarea debe incluir la planificación de la actuación del profesor. El profesor es un agente activo de la interacción y su actuación puede influir en los procesos de negociación de significados que la tarea promueve. Por ejemplo, el profesor puede actuar como director, al imponer ritmo y actividad, responder a cuestiones, resolver dificultades. O puede actuar como orientador, cuando reformula las cuestiones de los alumnos y estimula a que respondan otros.

Al planificar la interacción, el profesor contribuye a la previsión sobre cómo tendrá lugar el aprendizaje cuando los estudiantes aborden la tarea. De esta forma, el profesor puede prever las estrategias de solución con las que los estudiantes pueden llegar a abordar la tarea y los errores en los que ellos pueden incurrir cuando lo hacen. Esta información será útil para planificar su actuación durante la implementación de la tarea. Él puede prever cómo debe actuar cuando constate que algunos estudiantes utilizan una estrategia de solución particular o incurren en ciertos errores. La planificación de la actuación del profesor depende entonces de sus previsiones sobre la actuación de los estudiantes. Estas previsiones se constatan en el grafo de secuencias de capacidades de la tarea que consideramos en el apartado 6. Con ese grafo, el profesor puede pronosticar las estrategias de solución que los estudiantes pueden implementar y predecir los errores en los que los estudiantes pueden incurrir cuando abordan la tarea con esas estrategias. Él debe entonces planificar su actuación de acuerdo con esas estrategias y errores. Para ello, introducimos la idea de ayudas en la planificación de una tarea.

Ayudas: errores y estrategias de solución
Denominamos *ayudas* a la planificación que el profesor hace de su actuación, con motivo de su previsión acerca de las estrategias de solución que los estudiantes pueden implementar y de los errores en los que ellos pueden incurrir cuando las implementan. Al constatar una estrategia de solución particular de un estudiante o grupo de estudiantes, el profesor puede, por ejemplo, prever que él debe reformular alguna cuestión, dar alguna explicación, proponer alguna pregunta adicional, suministrar información adicional, sugerir una conjetura o, incluso, proponer una estrategia de solución alternativa. La actuación que el profesor planifique para cada estrategia de solución que los estudiantes puedan asumir dependerá de las metas de la tarea y de su percepción de cómo su actuación puede contribuir a fomentar la negociación de significados en el grupo de estudiantes y, por consiguiente, a promover su aprendizaje. En este sentido, la explicación por parte del profesor y la presentación de ejemplos forman parte del diseño de la tarea, dado que forman parte de la planificación de la actuación del profesor para ella.

La planificación de las ayudas también es importante desde la perspectiva de los errores de los estudiantes. Dado que el grafo de secuencias de capacidades de la tarea incluye la previsión de los errores en los que los estudiantes pueden incurrir cuando están activando una secuencia de capacidades particular, el profesor puede planificar cómo debería ser su actuación para promover la superación de cada error. El profesor puede actuar de múltiples maneras ante un error de los estudiantes. Por ejemplo, Santagata (2005) sugiere que el profesor puede (a) proporcionar la respuesta correcta; (b) repetir la pregunta al estudiante que incurrió en el error; (c) reformular la pregunta, proporcionando alguna ayuda; (d) pedir al estudiante que explique cómo llegó a su respuesta; (e) utilizar las estrategias anteriores con un estudiante diferente al que incurrió en el error; (f) motivar a la clase para que identifique el error y haga propuestas; y (g) escoger la respuesta correcta de las propuestas hechas por los estudiantes.

González, Gómez y Restrepo (2015) establecieron, con base en los trabajos finales de los estudiantes de MAD 1, que el profesor puede usar los errores de los estudiantes con tres propósitos: (a) para contribuir a que los estudiantes los superen, (b) para evaluar el estado cognitivo de los estudiantes y (c) para producir información útil en otros aspectos de la planificación. Ellos establecieron que los profesores en formación utilizaron el error para prever preguntas guía y ejercicios adicionales, proponer nuevos agrupamientos, socializar los errores y corregir en grupo, y seleccionar nuevas tareas y reformular la tarea en cuestión.

En la figura 12, incluimos algunas de las actuaciones que el profesor puede prever con motivo de las estrategias de solución que los estudiantes pueden implementar ante la tarea y de los errores en los que pueden incurrir. La planificación de las ayudas ante los errores formará parte de las previsiones de una tarea que abordaremos en el apartado 6. En este sentido, esta planificación implica un ciclo: (a) primero, el profesor debe describir la tarea en todos sus elementos; (b) segundo, el profesor debe producir el grafo de secuencias de capacidades de la tarea con base en esa información; y (c) tercero, el profesor debe planificar las ayudas a partir de la información que surge de ese grafo de secuencias de capacidades.

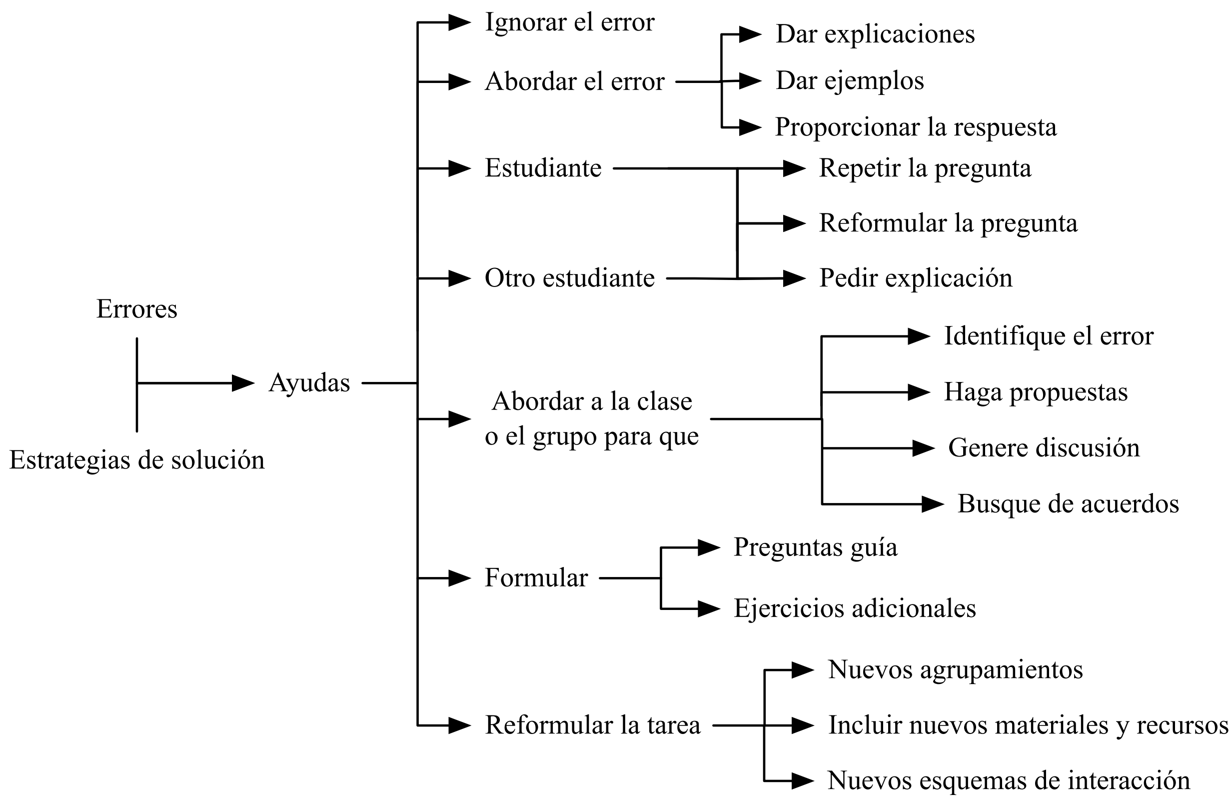

Figura 12. Previsión de la actuación del profesor en la interacción

4.7. Temporalidad de la tarea matemática escolar

El profesor puede prever que una tarea matemática se desarrolle como una secuencia de etapas. En cada etapa, el profesor puede establecer qué parte de la formulación de la tarea se realiza, qué materiales y recursos se utilizan, de qué manera se agrupan los estudiantes y qué formas de interacción desea promover. Una *etapa* es, por consiguiente, una parte de la tarea que tiene unos valores constantes en términos de su formulación, los materiales y recursos que utiliza, y los esquemas de agrupamiento e interacción que propone. El profesor tiene que decidir qué periodo de tiempo considera que se debe dedicar a cada momento y en qué orden. La temporalidad de la tarea es la descripción de estas etapas en términos de las cuestiones anteriores. Para describir la temporalidad de la tarea, el profesor debe describir esos elementos.

5. Ejemplo de la descripción de una tarea

En la figura 9, establecimos los elementos de una tarea que describimos en el apartado anterior. Para cada tarea, el profesor debe establecer sus elementos y describirlos con suficiente detalle. Con esta descripción, el profesor podrá prever su actuación y la de los estudiantes cuando ellos aborden la tarea. Como veremos más adelante, con base en esa previsión, el profesor puede analizar la tarea y establecer en qué medida y de qué forma la tarea contribuye al logro de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, y a la superación de sus limitaciones de aprendizaje. A continuación, describimos la tarea Reparto de papel silueta de acuerdo con las técnicas propuestas en el apartado anterior.

5.1. Requisitos

La situación es realizable por los niños (adecuada a sus capacidades) y se relaciona con un material manipulativo familiar (el papel silueta) que tiene una unidad bien conocida por los estudiantes (las hojas de forma cuadrada). El papel permite el fraccionamiento de manera sencilla, particularmente porque la fracción utilizada (mitades) permite su construcción mediante plegado (hacer coincidir una parte con la otra). Además, sugiere utilizar el conocimiento informal que poseen los alumnos sobre fracciones (como las nociones de reparto en partes iguales o de medición) y hacer uso del lenguaje que los niños utilizan como igualdad, mitad, parte, dividir, partir y repartir.

5.2. Metas

Con la tarea, se pretende contribuir a que los estudiantes perciban la necesidad de tener números que expresen partes no enteras en situaciones de repartir; a las capacidades de referir a estos números de forma verbal y escrita; y a superar errores como escribir $\frac{n}{m}$ en lugar de $\frac{m}{n}$ (E3).

5.3. Formulación de la tarea matemática escolar

La formulación de la tarea incluye la presentación del profesor. El final de la formulación de la tarea se expresa como una instrucción de su parte.

> Reparte 5 hojas de papel silueta en partes iguales a tus dos compañeras. Di y escribe qué cantidad de hojas le correspondió a cada una.

5.4. Materiales y recursos

Si seguimos las ideas que presentamos en el apartado 4.4 en el caso de la tarea que nos ocupa, es importante que se promuevan experiencias en las que los estudiantes reparten cantidades de manera equitativa y utilizan material concreto —como dibujos, por ejemplo— de modo que ellos puedan conectar las acciones con los símbolos matemáticos (Llinares, 2003).

Los recursos disponibles serán las hojas de papel silueta. Con estas hojas, se pueden realizar repartos equitativos. Las hojas de papel silueta se entregan a los estudiantes en forma cuadrada. Esto puede facilitar la partición de formas distintas y, con ello, el reconocimiento de la igualdad entre cantidades de superficie. El contenido matemático es la fracción (introducción a la noción de fracción) que se presenta como un fraccionamiento (dividir una hoja en dos partes), mediante su representación física (media hoja de papel silueta), y luego como porción (un medio del papel original). También se aborda su representación verbal y simbólica (medio, mitad, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}$ o 0,5).

Análisis de los materiales y recursos

En este apartado, analizamos el recurso que se utiliza en la tarea: el papel silueta en cuadrados. Para ello, abordamos las preguntas que formulamos en el apartado anterior. Este recurso es de fácil acceso. Se encuentra disponible en los almacenes de las instituciones públicas. Si ese no es el caso, resulta cómodo pedirlo a los estudiantes, ya que tiene un precio bajo (preguntas del numeral 1). El manejo del papel silueta tampoco requiere de una preparación previa. Como se mencionó en los requisitos, el papel silueta permite el fraccionamiento de manera sencilla (preguntas de los numerales 2, 3 y 4).

En cuanto a los conceptos y procedimientos que permite poner en juego (preguntas del numeral 5), la forma del papel (independientemente del tipo) favorece pensar en diversos tipos de particiones. En la figura 13, ilustramos algunas particiones que se pueden presentar.

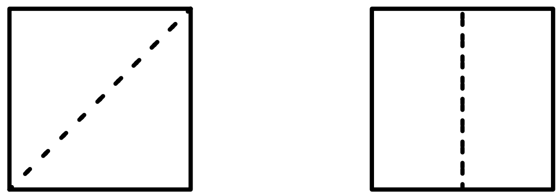

Figura 13. Diferentes particiones equitativas con el papel silueta

La magnitud a dividir es continua y la acción realizada lleva a reconocer la equivalencia entre diferentes particiones. Por otro lado, la idea de la mitad se representa con la partición. De esta forma, lo concreto sirve de modelo a la idea matemática de $\frac{1}{2}$ o, si se atiende a la pregunta planteada en la formulación de la tarea, a la idea de $2\frac{1}{2}$ o $\frac{5}{2}$ (preguntas del numeral 6).

Un recurso también puede favorecer que una tarea constituya un reto para el estudiante (preguntas del numeral 7). Sin embargo, en el caso particular de la tarea de papel silueta en que la repartición no tiene una explicación —se debe hacer porque es una instrucción del profesor—, el recurso podría contribuir a constituir un reto si implica una tarea no rutinaria que puede abordarse con diferentes estrategias de solución. No obstante, en los estudios que se han hecho sobre esta tarea (Rojas, 2010, p. 60), se evidencia que el profesor propone explícitamente un reparto y no se aprecia que la tarea se pueda abordar con diversas estrategias de solución. La tarea promueve un único método de solución: repartir dos papeles a cada niño y partir la unidad sobrante. Por estas razones, consideramos que la tarea no constituye un reto para el estudiante.

El recurso puede también contribuir a la superación de errores (preguntas del numeral 8). En este caso, tener una representación concreta de la mitad de la hoja de papel favorece referir de manera verbal a un medio o la mitad y, a la par, hacer uso del signo $\frac{1}{2}$, lo que puede contrarrestar errores como escribir $\frac{n}{m}$ en lugar de $\frac{m}{n}$.

Dado que la tarea promueve una única estrategia de solución, consideramos que ella no fomenta necesariamente procesos de indagación, exploración o descubrimiento de propiedades (preguntas del numeral 9). La tarea limita la interacción entre los estudiantes y entre ellos y el profesor (preguntas del numeral 10).

El recurso utilizado puede favorecer la curiosidad de los estudiantes de 9 a 10 años debido a que implica utilizar números hasta el momento no abordados en la clase (preguntas del numeral 11). Esto último aporta a la expectativa afectiva “desarrollar curiosidad por el trabajo con nociones de la fracción que permitan matematizar situaciones de la vida real" (preguntas del numeral 12).

El análisis que hemos hecho hasta ahora del papel silueta pone de manifiesto que este recurso tiene algunos atributos positivos dentro de la tarea. No obstante, también hemos constatado que el recurso utilizado y la forma como se pone en juego dentro de la tarea no contribuyen a algunas de las cuestiones que formulamos anteriormente (preguntas de los numerales 7 a 10). Cabe preguntarse si un cambio aparentemente menor en el recurso puede implicar cambios importantes en la contribución de un nuevo recurso a la tarea. En el caso especifico de las hojas de papel silueta, ¿qué pasaría si se optara por entregar cinco hojas y que todas fuesen de diferente color? Aún si se siguiera con el mismo esquema —el profesor da una instrucción—, ¿el recurso podría contribuir a que uno o varios estudiantes pensaran que entregar dos hojas completas a cada estudiante y partir la otra para, finalmente, entregar una mitad a cada estudiante no sería la única forma de repartir las partes?

A continuación, analizamos el papel de este nuevo recurso. Las respuestas a las preguntas de los numerales 1 a 4 serán las mismas para los dos recursos. Para las preguntas del numeral 5, usar papel silueta de diferente color puede implicar que el estudiante decida partir todas las hojas, en cambio de partir únicamente una sola (la que queda después de repartir las hojas completas). Esto puede implicar al menos dos cosas diferentes en el momento de la repartición. Por un lado, el estudiante puede entregar las partes por pares del mismo color. De esta forma, se reparten dos hojas y una mitad, que corresponden a $2\frac{1}{2}$. Por otro lado, el estudiante podría entregar cinco de las partes resultantes, sin tener en cuenta el color de las partes. En este caso, se reparten cinco partes, que corresponden a $\frac{5}{2}$.

El análisis que acabamos de hacer pone de manifiesto que el cambio en el recurso promueve la aparición de dos estrategias de solución diferentes. Se aborda tanto la idea de la mitad, como la idea de suma de mitades para obtener la unidad o de suma de fracciones con el mismo denominador (en este caso 2). Por tanto, la tarea fomenta que se active un mayor número de capacidades. La tarea puede constituir un reto para el estudiante (preguntas del numeral 7). Puede contribuir a la superación del error que referíamos con el recurso anterior, y, adicionalmente, contribuye a que los estudiantes no sumen numeradores y denominadores con el objetivo de obtener la suma de dos fracciones (preguntas del numeral 8). El recurso puede inducir a los estudiantes a que identifiquen propiedades como "cuando se suman fracciones con el mismo denominador se obtiene otra con el mismo denominador" (preguntas del numeral 9). Dado que hay al menos dos estrategias de solución, la introducción del recurso motiva la interacción (preguntas del numeral 10).

Al favorecer otras estrategias, también puede aportar en el interés que los estudiantes tengan por la tarea (preguntas del numeral 11) y, con ello aportar, a por lo menos una expectativa afectiva adicional: generar interés por el aprendizaje de las fracciones representando los resultados a un problema de distintas maneras (preguntas del numeral 12).

Resumimos en la tabla 5 el análisis que acabamos de hacer sobre la eficiencia y eficacia de dos recursos —el papel silueta de un color y el papel silueta en diferentes colores—.

Tabla 5
Pertinencia de los materiales y recursos

	Eficiencia				Eficacia							
	Acc	PrepP	PrepE	T	C	Afectivo						
MoR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
PS de un color	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓				✓
PS de diferente color	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Nota. MoR = material o recurso; Acc = acceso; PrepP = preparación profesor; PrepE = preparación estudiantes; T = tiempo; C = cognitivo (metas); PS = papel silueta.

Para el tema de decimales a fracciones, se cuenta con un número grande de materiales y recursos. Algunos de estos son el pastel de fracciones, el círculo de fracciones, el diagrama de Freudenthal (muro de fracciones) y la escala de fracciones (figura 14).

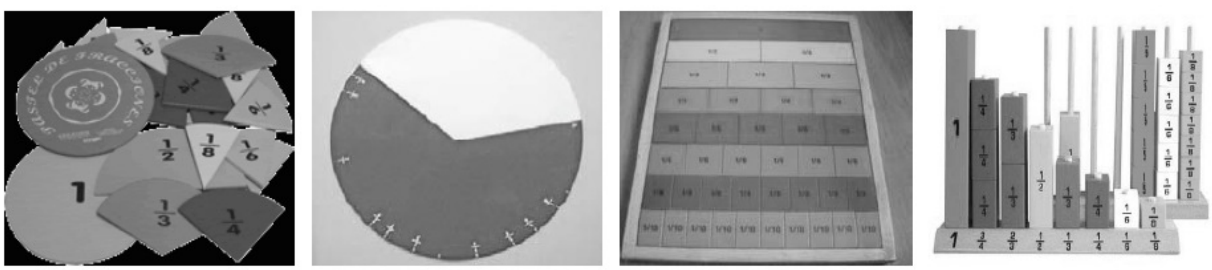

Figura 14. Materiales y recursos para el tema de fracciones a decimales

Estos materiales se pueden analizar con el procedimiento que acabamos de ejemplificar. En lo que sigue, continuamos describiendo los elementos de la tarea original de la tarea Reparto de papel silueta (de un mismo color).

5.5. Agrupamiento

La tarea original con el papel silueta requiere que los estudiantes se organicen en el gran grupo de la clase. Este esquema de agrupamiento se mantiene a lo largo de toda la tarea.

5.6. Comunicación e interacción en clase

La comunicación predominante es entre el profesor y la alumna. El profesor da indicaciones y la alumna las sigue.

5.7. Temporalidad de la tarea matemática escolar

La tarea se desarrolla en varias etapas, según la transcripción que hemos citado. En la primera, el profesor presenta el nuevo tema. La segunda etapa es un enlace con los deberes que quedaron pendientes de la clase anterior. La tercera etapa corresponde a la formulación de la tarea. Finalmente, en la cuarta etapa la estudiante empieza a abordar el reparto.

6. Previsiones de una tarea

Como mencionamos en el apartado 4.6, las previsiones de la actuación del profesor y de los estudiantes cuando ellos abordan una tarea constituyen la información básica con la que el profesor puede analizar la tarea y establecer su pertinencia en su diseño curricular. Las previsiones de una tarea incluyen dos tipos de información que el profesor debe producir: el grafo de secuencias de capacidades de la tarea y la relación de ayudas.

En el módulo de análisis cognitivo, se describieron las características del grafo de secuencias de capacidades de una tarea cuando se analizaron las tareas prototípicas de los objetivos de aprendizaje. El grafo de secuencias de capacidades de una tarea recoge todos los caminos de aprendizaje que el profesor prevé que los estudiantes pueden activar cuando aborden la tarea. Por consiguiente, es un grafo compuesto de secuencias de capacidades vinculadas entre sí, que representan las diferentes estrategias de solución de la tarea, desde la perspectiva de los estudiantes. El grafo incluye también los errores en los que los estudiantes pueden incurrir cuando activan cada una de las secuencias de capacidades (González y Gómez, 2015).

Una vez que ha producido el grafo de secuencias de capacidades de una tarea, el profesor puede prever las ayudas para la tarea. Él puede producir una tabla como la tabla 7 que presentamos más adelante, en la que incluye las ayudas para cada error. También puede incluir opcionalmente otras ayudas que correspondan a momentos o caminos de aprendizaje de la tarea.

6.1. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea reparto de papel silueta

Como mencionamos anteriormente, la tarea que estamos usando como ejemplo promueve una única estrategia de solución: repartir dos papeles a cada niño y partir en dos la unidad sobrante. Con base en esta consideración, hemos hecho una previsión de las secuencias de capacidades que se pueden activar y de los errores en los que los estudiantes pueden incurrir (tablas 1 y 2).

Antes de la orientación del profesor hacia repartir cuatro hojas y partir la quinta, el estudiante puede llegar a repartir dos hojas para una persona y tres para la otra. O bien, al tener en cuenta que la repartición debe ser en partes iguales, él puede entregar dos hojas a una persona y dos hojas a la otra persona y quedarse con la quinta hoja. Relacionamos estas dos situaciones con la consideración de unidades continuas como no susceptibles de ser divididas (E9). Para superar lo anterior, el profesor deberá dejar muy claras las dos condiciones principales de la repartición. Para dar comienzo a la repartición en partes iguales y del total del papel, el estudiante debe identificar la unidad que debe partir. Luego, él debe realizar la partición (C14-9). En este caso, se trata de una hoja cuadrada de papel silueta. Para partir la hoja en dos partes iguales, el estudiante puede hacer uso de puntos medios (C1) o de la diagonal del cuadrado (C26), ya que la partición no tiene que ser de la misma forma (el direccionamiento va hacia repartir las cuatro hojas y partir en mitades la otra). Sin embargo, es posible que él rompa la hoja en partes con cantidades de superficie diferentes (E10). El estudiante nombra cada una de las partes resultantes en el proceso anterior de forma verbal como la mitad o un medio, con motivo de las demandas del profesor. Al tiempo, él escribe de forma simbólica la cantidad $\frac{1}{2}$ (C2-3). Sin embargo, el estudiante puede en este momento incurrir en el error de cambiar el lugar del numerador y denominador (E3) o escribir como denominador la cantidad total de partes que resultan al dividir las unidades y no por el número de partes en que se ha dividido la unidad (E4). El estudiante escribe el signo con el que representaría la cantidad de papel dada a cada estudiante. Él puede hacerlo de dos formas: puede escribir $2\frac{1}{2}$ (C11), o puede introducir el lenguaje natural y escribir 2 y $\frac{1}{2}$ (C24). Sin embargo, puede confundir la cantidad de objetos de cada parte con el número de partes obtenidas (E6). Debe reconocer que las dos formas son equivalentes para responder la pregunta (C15-25), aunque puede considerar que representen partes diferentes (E11). Finalmente, el estudiante relaciona las partes de papel con los números que usó para representar su respuesta (C27). Sin embargo, es posible que presente un resultado que no corresponda a las partes obtenidas. Presentamos el grafo de secuencias de capacidades de la tarea en la figura 15.

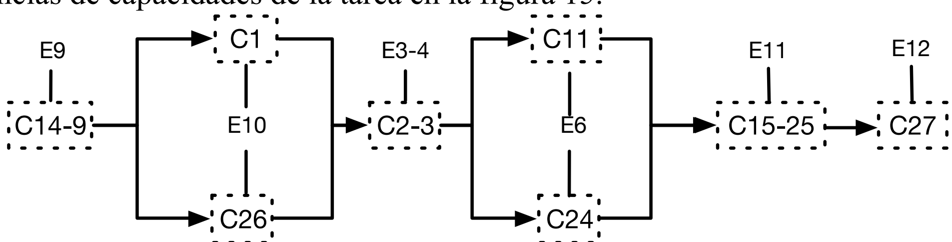

Figura 15. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea papel silueta

En la tabla 6, describimos las secuencias de capacidades que se activan con la tarea.

Tabla 6

Descripción de secuencias de capacidades de la tarea

S	CyE	Descripción
1	C14-9 E9	Identificar la unidad y reconocerla como susceptible de ser dividida
2	C1	Dividir un cuadrado en dos partes iguales haciendo uso de sus puntos medios
3	C26 E10	Dividir un cuadrado en dos partes iguales haciendo uso de una de sus diagonales
4	C2-3 E3-4	Representar una fracción mediante el cociente de dos números enteros identificando el rol del numerador y el denominador
5	C11	Expresar una fracción mayor a uno con un número mixto
6	C24 E6	Expresar una fracción mayor a uno con un número mixto que incluye lenguaje natural
7	C25-15	Reconocer formas equivalentes de escribir un número mixto e identificar la equivalencia entre fracción impropia y numeral mixto

Tabla 6

Descripción de secuencias de capacidades de la tarea

S	CyE	Descripción
	E11	
8	C27	Relacionar los objetos obtenidos con el símbolo usado para representar la respuesta
	E12	

Nota. S = secuencia de capacidades; CyE = capacidades y errores.

Al identificar cada una de las secuencias con un número como lo hacemos en la tabla 6, podemos representar el grafo de secuencias de capacidades de la tarea como mostramos en la figura 16.

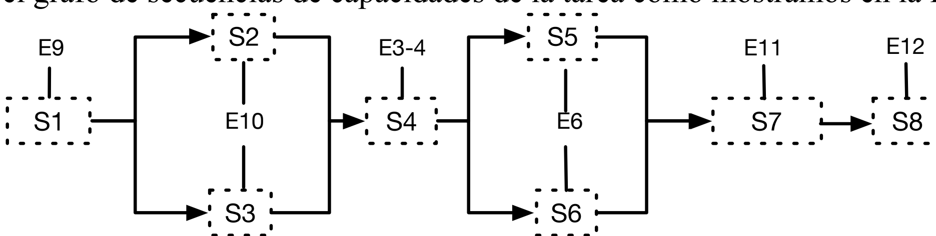

Figura 16. Grafo de secuencias de capacidades numeradas de la tarea Reparto de papel silueta

6.2. Ayudas para tarea reparto de papel silueta

En el momento en que se presenten errores o los estudiantes no logren seguir la estrategia que han emprendido para solucionar la tarea, el profesor debe tener a su disposición un conjunto de ayudas con las que él pueda encaminar nuevamente a los estudiantes hacia sus propósitos. Si la estudiante decidiera entregar dos hojas a una de sus compañeras y tres hojas a la otra, o entregara dos hojas de papel silueta a cada una de sus compañeras y ella se quedara con una hoja, el profesor debería traer a colación las condiciones de la tarea. Para ello podría formular preguntas direccionadas hacia ese objetivo (A1 y A2 de la tabla 7). Además, es posible que la estudiante no active la capacidad C1 ni la capacidad C26 y que rompa la hoja sin obtener dos partes iguales. El profesor podría tener a disposición otra hoja e invitar a la clase completa a sugerir formas de partirla (A3). Para la secuencia de capacidades S4, el profesor debe indicarle a la clase el nombre con que se conoce cada una de las partes obtenidas mientras escribe el signo. Esto, como se ha descrito anteriormente, puede contribuir a evitar el error E3 que consiste en cambiar numerador por denominador. En la tabla 7, describimos cada una de las ayudas que hemos mencionado.

Tabla 7

Descripción de las ayudas de la tarea

E	A	Descripción
9	1	¿La repartición ha implicado que las dos estudiantes resulten con la misma cantidad de papel?
9	2	¿Se ha repartido todo el papel?
10	3	¿De qué otra manera se podría partir la hoja para obtener dos partes iguales?
3	4	Escribir el signo $\frac{1}{2}$ a la vez que se menciona en voz alta la mitad o un medio.

Nota. E = error; A = ayuda.

7. Análisis de las tareas

Una vez que hemos descrito una tarea, debemos preguntarnos ¿cómo saber que es una tarea matemática pertinente en una secuencia de tareas sobre un tema de las matemáticas escolares?, ¿qué significado asignamos a la pertinencia de una tarea? y ¿cómo determinamos su grado de pertinencia? Establecemos la pertinencia de una tarea en términos de su contribución al logro de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, y a la superación de las limitaciones de aprendizaje de los estudiantes. Para establecer en qué medida una tarea matemática escolar contribuye a esos propósitos, debemos analizarla desde la perspectiva de las previsiones del profesor sobre cómo se desarrollará cuando se implemente. Estas previsiones, que describimos en el apartado anterior, nos permitirán establecer en qué medida la tarea es pertinente. En la figura 17, presentamos esquemáticamente estas ideas.

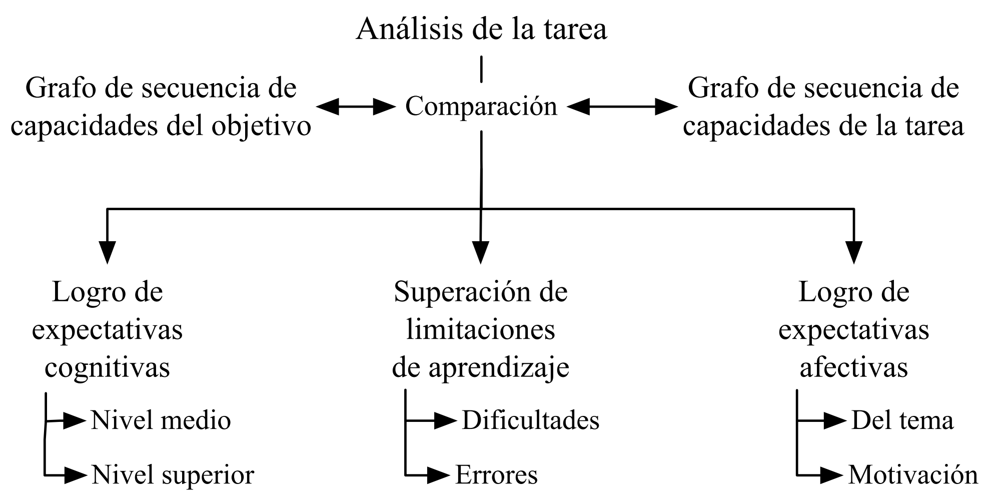

Figura 17. Análisis de una tarea matemática escolar

El análisis de la tarea se basa en la comparación entre el grafo de secuencias de capacidades de la tarea y el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje correspondiente. Este análisis permite establecer de qué manera y en qué medida la tarea contribuye (a) al logro del objetivo de aprendizaje y de las expectativas de aprendizaje de nivel superior, (b) a la superación de las limitaciones de aprendizaje (dificultades y errores), y (c) al logro de las expectativas afectivas establecidas para el tema y a la motivación de los estudiantes. Abordamos estas cuestiones a continuación.

7.1. Dimensión cognitiva

La caracterización de un objetivo de aprendizaje, en términos de su grafo de secuencias de capacidades, permite al profesor establecer en qué medida y de qué forma una tarea contribuye al logro de ese objetivo de aprendizaje. Para ello, él debe comparar las secuencias de capacidades que prevé que se pueden activar con una tarea y los errores en los que los estudiantes pueden incurrir (que se encuentran en el grafo de secuencias de capacidades de la tarea), con las secuencias de capacidades y los errores que caracterizan el objetivo de aprendizaje (que aparecen en el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje). Al hacer la comparación, él puede prever cuáles de las secuencias de capacidades que caracterizan el objetivo de aprendizaje se activan con la tarea y cuáles no, y qué errores se abordan. De esta manera, el profesor puede determinar cómo la tarea contribuye al logro del objetivo de aprendizaje y a la superación de los errores.

Es importante destacar que usualmente el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje no incluye capacidades relacionadas con el agrupamiento, la interacción y el uso de materiales y recursos específicos. Por consiguiente, el grafo de secuencias de capacidades de la tarea puede incluir varias capacidades que no aparecen en el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje. No obstante, debe ser siempre posible establecer la relación entre las secuencias de capacidades de los dos grafos para precisar la relación entre ellos.

Dado que el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje está compuesto por caminos de aprendizaje, el profesor puede indicar cuáles de esos caminos de aprendizaje se activan con la tarea. En principio, el profesor debe revisar si los errores que él ha previsto pueden ser activados con la tarea. Por otro lado, el profesor debe establecer a qué procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales la tarea puede contribuir. Para ello, él puede diligenciar una tabla como la tabla 8, en la que el profesor indica, para las secuencias de capacidades que se activan con la tarea, a qué procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales la tarea contribuye.

Tabla 8

Contribución de la tarea a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
S	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
1	✓			✓													✓				
2						✓			✓									✓			✓
…																					
T																					

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; S = secuencia de capacidades; T = total.

Dimensión cognitiva: ejemplo con la tarea reparto de papel silueta

Siguiendo con nuestro ejemplo, comparamos el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje con el grafo de secuencias de capacidades de la tarea. En la figura 18, presentamos el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje.

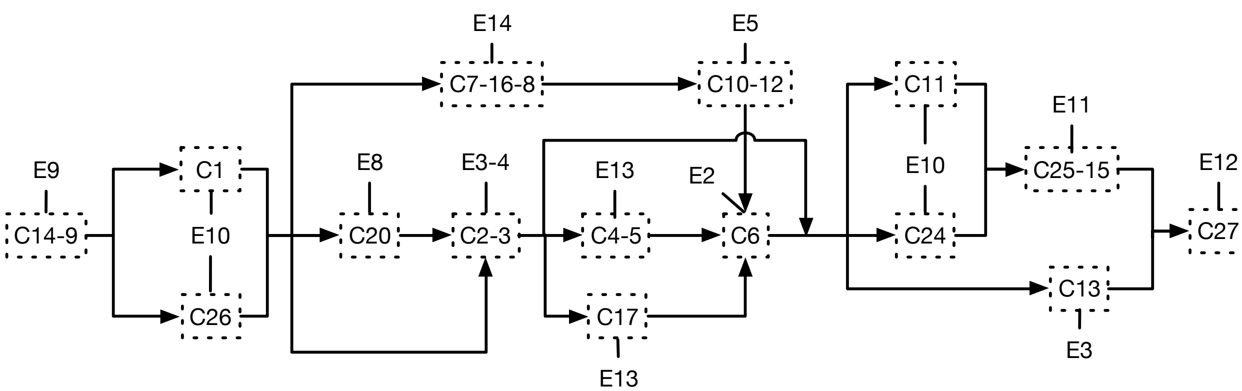

Figura 18. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo

Para establecer la contribución de la tarea Reparto de papel silueta al objetivo de aprendizaje, resaltamos con una línea continua las secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje que se activan con la tarea, como mostramos en la figura 19.

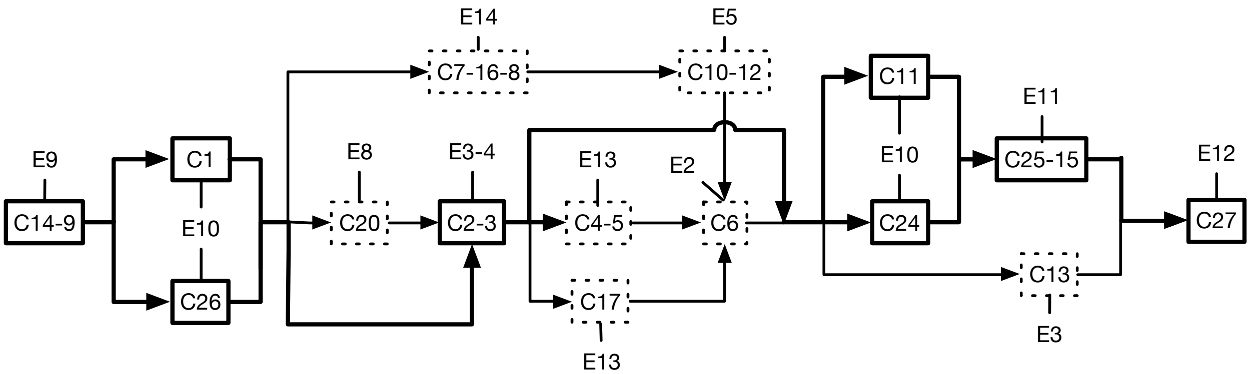

Figura 19. Contribución de la tarea al objetivo de aprendizaje

El análisis de la información de la figura 19 nos proporciona información sobre aquellos aspectos del objetivo de aprendizaje que son activados por la tarea.

Para determinar la contribución de la tarea a las expectativas de nivel superior (capacidades fundamentales y procesos matemáticos), deberemos analizar cada una de las secuencias e identificar su relación con esas expectativas de aprendizaje. La primera secuencia de capacidades requiere que el estudiante reconozca, desde la lógica de la situación o la orientación del profesor, que las hojas se pueden partir, dividir o romper. Por tanto, esta secuencia de capacidades tiene alguna relación con el proceso matemático de formular y la capacidad fundamental de matematizar. La segunda y tercera secuencias de capacidades implica que el estudiante divida la hoja. Para hacer la partición, el estudiante puede usar los puntos medios de dos de los lados del cuadrado o hacer uso de la diagonal del cuadrado. El estudiante debe pensar en una estrategia antes de romper el papel. Con ello, el estudiante lleva a cabo una estrategia para lograr solucionar la situación planteada: es el resultado de la elección de un plan. Estos procedimientos están vinculados con la capacidad matemática fundamental de diseño de estrategias para resolver problemas en el proceso matemático de formular. Luego, cuando el estudiante debe utilizar un signo o una palabra para referirse a cada una de las partes obtenidas, crea una representación matemática de información del mundo real. Esto contribuye al desarrollo de la capacidad fundamental de representar en el proceso matemático de formular. La sexta secuencia de capacidades está direccionada hacia la misma capacidad fundamental y proceso matemático debido a que también implica crear una representación matemática de información del mundo real. La última secuencia de capacidades implica que el estudiante argumente su respuesta usando las partes obtenidas y haga referencia a los símbolos usados para representarla. Esto contribuye a la capacidad matemática fundamental de razonamiento y argumentación en el proceso matemático de emplear. Resumimos este análisis en la tabla 9.

Tabla 9
Contribución de la tarea a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
S	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
1				✓																	
2	✓																				
3	✓																				
4																✓					
5																✓					
6																✓					
7																✓					
8											✓										
T	2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; S = secuencia de capacidades; T = total.

La comparación del grafo de secuencias de capacidades con el grafo del objetivo y el análisis en relación con la contribución de la tarea a las expectativas de nivel superior nos permiten establecer dos cuestiones. En primer lugar, aunque con una sola tarea no se puede pretender contribuir a todas las secuencias de capacidades de un objetivo de aprendizaje, se pueden cambiar ciertos elementos (como los materiales y recursos estudiados con anterioridad, además de otros elementos, como el agrupamiento y la interacción) con el propósito de activar otras de las secuencias de capacidades que caracterizan el objetivo de aprendizaje. La tarea es coherente con el énfasis que se tiene para el objetivo de aprendizaje: contribuir al desarrollo del proceso matemático de formular. También se fomenta el desarrollo de las capacidades fundamentales de matematizar y representar. No pasa lo mismo con la capacidad fundamental de comunicación. Esto último puede deberse a la poca interacción que se motiva con la tarea.

7.2. Dimensión afectiva

El profesor debe hacer el análisis de la tarea desde la perspectiva de las expectativas afectivas en términos de las secuencias de capacidades que la tarea activa. En este apartado, consideramos la contribución de la tarea a las expectativas de tipo afectivo que el profesor ha establecido y a algunos aspectos generales relacionados con la motivación de los estudiantes.

Análisis en términos de las secuencias de capacidades

Las secuencias de capacidades dan cuenta de la actuación del estudiante al abordar la tarea. Para determinar la contribución de las secuencias de capacidades que se prevén activar con la tarea a las expectativas afectivas, se puede seguir el esquema con el que, en el módulo de análisis cognitivo, se formularon estas expectativas. Para plantear las expectativas afectivas, se tuvieron en cuenta tres aspectos: el enfoque teórico, las capacidades fundamentales en las que se enfoca la unidad didáctica, y los conceptos y procedimientos específicos del tema matemático. El profesor, en este punto del análisis, ya ha determinado las capacidades fundamentales hacia las que se apunta con la tarea, a partir de cada una de las secuencias de capacidades. Lo mismo ha pasado con los conceptos y procedimientos específicos del tema, ya que ha hecho la previsión de la tarea y producido un grafo de secuencias de capacidades. Falta, entonces, el análisis en relación con el primer aspecto: el enfoque teórico. Para realizar este análisis, el profesor, debe evocar nuevamente el enfoque teórico que había escogido para plantear las expectativas afectivas. Los enfoques que fundamentan la formulación de las expectativas afectivas son los siguientes: el centrado en las expectativas sobre uno mismo, el centrado en los factores intrínsecos y extrínsecos, y el enfoque que entrelaza la motivación y el aprendizaje. Una vez identificado el enfoque, el profesor debe revisar sus características principales y redactar dos o tres preguntas que, al contestarlas, le permitan tener una previsión respecto al aporte que tiene la tarea para cada una de las expectativas afectivas planteadas en relación con el enfoque. Con la información respecto a la contribución a las capacidades fundamentales, a los conceptos y procedimientos del tema, y con la nueva información que brindarán las respuestas a las preguntas planteadas en relación con el enfoque escogido, el profesor puede establecer la contribución de la tarea a las expectativas de tipo afectivo. Para resumir la información que resulte con motivo de este análisis, el profesor puede hacer una tabla como la tabla 10.

Tabla 10
Contribución de la tarea a las expectativas de tipo afectivo

S	EA1	EA2	…	EAn
1		✓		
2	✓			
…				
n				
T				

Nota. S = secuencia de capacidades; T = total; EA1 = nombre de la primera expectativa de tipo afectivo; …; EAn = nombre de la expectativa de tipo afectivo n

En la tabla, el profesor debe poner una marca para cada secuencia de capacidades que contribuya a cada expectativa de tipo de afectivo. Al final de la tabla, el profesor puede hacer el conteo total de contribuciones a cada expectativa de tipo afectivo. Los resultados de este análisis le deben indicar qué expectativas afectivas no se están abordando apropiadamente y, si es necesario, modificar la tarea para lograrlo.

Análisis de la tarea desde aspectos que contribuyen a la motivación
Los expertos han establecido algunos aspectos de las tareas que pueden contribuir al dominio afectivo del estudiante, en particular, a su motivación (Blanco, Guerrero, Caballero, Piedehierro y Gómez del Amo, 2010; Guerrero y Blanco, 2004; Skovsmose, 2012; Zimmerman, 2004). Hemos seleccionado algunos de estos aspectos con los que el profesor puede analizar la tarea. Estos aspectos son los siguientes.

Adecuación de las demandas cognitivas. Las demandas cognitivas de la tarea se adaptan al conocimiento y a las destrezas que el estudiante tiene antes de abordar la tarea. El estudiante puede abordar la tarea con los conocimientos y destrezas que tiene en ese momento.

Reto. La tarea es un reto para el estudiante. El estudiante no puede resolver la tarea al utilizar un procedimiento básico de manera rutinaria. El estudiante percibe que puede resolverla, pero debe esforzarse para establecer las estrategias adecuadas de resolución. El estudiante puede abordar la tarea con más de una estrategia de solución.

Reacción a los errores. La tarea prevé los errores en los que el estudiante puede incurrir y tiene previstas actuaciones del profesor para abordar esos errores y contribuir a su superación.

Contribución a la interacción. La tarea contribuye a que el estudiante interactúe con sus compañeros y el profesor. La tarea requiere que el estudiante comunique sus razonamientos, que presente los resultados de su trabajo, justifique esos resultados, cuestione las propuestas de sus compañeros y llegue a acuerdos con sus compañeros de grupo, con los demás grupos y con el profesor.

Contexto. El contexto de la tarea (en términos de PISA 2012) es auténtico. Ese contexto promueve el interés y la curiosidad del estudiante por resolverla.

Compartir metas. El estudiante sabe por qué y para qué es necesario abordar la tarea. El hecho de compartir metas se tratará en detalle en el módulo 5.

Con base en los criterios anteriores, el profesor puede analizar cada tarea y hacer una previsión de su contribución a cada criterio. Él debe justificar con un argumento breve, que puede estar basado en las secuencias de capacidades que la tarea activa, por qué y de qué manera la tarea hace esas contribuciones. En este módulo, no se tiene en cuenta el último criterio. Este criterio se abordará en el módulo de análisis de actuación.

7.3. Dimensión afectiva: ejemplo con la tarea Reparto de papel silueta

Siguiendo con nuestro ejemplo, en este apartado, nos detendremos a analizar la tarea Reparto de papel silueta desde el punto de vista de su posible contribución a las expectativas afectivas. También haremos un breve análisis en relación con cada uno de los elementos que contribuyen a la motivación, sin detenernos en el último.

Las expectativas afectivas formuladas para esta unidad didáctica están en relación con el enfoque que centra su interés en analizar los factores personales y extrínsecos que intervienen en la motivación del estudiante. Este enfoque, como se mencionó en el módulo de análisis cognitivo, está relacionado con las razones por las cuales un estudiante se compromete en su propio aprendizaje. Puede haber razones intrínsecas y extrínsecas. Nos interesa analizar las razones que tengan que ver concretamente con lo que permite la tarea. Las preguntas que pueden guiar este análisis son las siguientes: (a) ¿la tarea puede verse por parte del estudiante como útil, de interés o importante?; (b) ¿la tarea está al alcance de los estudiantes y promueve el reconocimiento del trabajo de cada uno de ellos?; o (c) ¿la tarea le implica al estudiante un reto, dando pie a la utilización de procedimientos no rutinarios y a la búsqueda de propiedades, regularidades o análisis de información?

La falta de un contexto que le de sentido a la situación puede implicar que los estudiantes no evidencien la importancia de utilizar otros números (en este caso $\frac{1}{2}$ o $\frac{5}{2}$). Las tres estudiantes que están en frente de todos sus compañeros y al lado de su profesor, podrían preguntarse, durante y/o después de haberse enfrentado a la tarea: ¿para qué hacer esta repartición? En cuanto a la segunda pregunta, la tarea sí está al alcance de los estudiantes. Sin embargo, la tarea no promueve el reconocimiento del trabajo de cada uno de ellos. Y, por último, en cuanto a la curiosidad, el direccionamiento hacia un única estrategia puede implicar que no sea un reto. No obstante, si se tiene en cuenta que la tarea propende por determinar una cantidad de papel para la que los números naturales no son útiles. El hecho de que, hasta ese momento, los estudiantes solo hayan cuantificado con números naturales, puede generales curiosidad acerca de cómo se simboliza o se refiere a esa cantidad. Podemos concluir, entonces, que la tarea no contribuye a las expectativas de interés. Sin embargo, la tarea puede contribuir a la expectativa de curiosidad, si se tiene en cuenta que esta expectativa se relaciona con la capacidad fundamental de representar a la que la tarea contribuye, de acuerdo con el análisis hecho anteriormente para la dimensión cognitiva. En la tabla 11, resumimos el anterior análisis.

Tabla 11
Contribución de la tarea reparto de papel silueta a las expectativas de tipo afectivo

S	EA1	EA2	EA3
1			✓
2			
3			
4			✓
6			✓
7			✓
8			
T			4

Nota. S = secuencia de capacidades; T = total; EA1 = nombre de la primera expectativa de tipo afectivo; …; EAn = nombre de la expectativa de tipo afectivo n

Presentamos a continuación el análisis de la tarea desde el punto de vista de los aspectos que contribuyen a la motivación.

Adecuación de las demandas cognitivas. Como se describió en los requisitos de la tarea, su desarrollo requiere de conocimientos que se prevé que un estudiante de 9 a 10 años tenga: el fraccionamiento en dos partes de un material en forma cuadrada y las ideas de mitad y de reparto en partes iguales.

Reto. La tarea puede no implicar un reto ya que, como se describió anteriormente, está orientada hacia una única estrategia de solución.

Reacción a los errores. Hay tres errores que se prevén pueden tener los estudiantes en esta tarea. Para el primero (E9), el profesor debe aclarar dos condiciones necesarias para solucionar la tarea: se debe repartir el total de hojas y la repartición debe hacerse en partes iguales. El error E10 se deslegitima con la segunda condición. En cuanto al error E3 se reacciona con el trabajo en paralelo de las representaciones verbal y simbólica.

Contribución a la interacción. En esta tarea, la interacción se concibe solo entre el profesor y la estudiante. El hecho de que el profesor direccione hacia solo un camino de solución limita la interacción. En la transcripción con la se introduce la tarea, se puede evidenciar cómo el profesor restringe la participación del resto de la clase.

Contexto. La tarea se genera como una instrucción del profesor. El contexto no proporciona a la estudiante información que justifique por qué la repartición en partes iguales del papel es necesaria.

8. Modificación de las tareas

Las técnicas de análisis que hemos propuesto en los apartados anteriores le permiten al profesor caracterizar la tarea en su relación con cuatro referencias: (a) el grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje, (b) las expectativas de aprendizaje de nivel superior (procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales), (c) las expectativas de tipo afectivo seleccionadas por el profesor para el tema y (d) aspectos de la tarea que pueden influir en la motivación de los estudiantes. El resultado del análisis de la tarea informa al profesor sobre en qué medida y de qué manera la tarea contribuye a esas cuatro referencias. Esa información puede inducir al profesor a modificar la tarea porque considera, por ejemplo, que no contribuye suficientemente al objetivo de aprendizaje (en términos de caminos de aprendizaje y de errores), a las expectativas de aprendizaje de nivel superior que él pretendía abordar, a una o más de las expectativas de tipo afectivo que seleccionó, o a uno o más aspectos de la motivación del estudiante sobre los que él tiene interés. El profesor debe ser consciente de que una tarea no puede contribuir a todas las expectativas que él tiene previstas. No obstante, la información que surge del análisis sí le puede indicar que, al modificar la tarea, ella puede contribuir a aquellas expectativas para las que la diseñó originalmente u otras que considera pertinentes.

La modificación de la tarea puede afectar cualquiera de sus elementos. El profesor puede decidir que desea alterar las metas, cambiar aspectos de la formulación o variar, eliminar o agregar esquemas de agrupamiento e interacción. Estas modificaciones tendrán un impacto en la temporalidad de la tarea.

Una vez modificada la tarea, el profesor debe precisar los cambios realizados en una nueva descripción de la tarea. En la figura 20, resumimos esquemáticamente estas ideas.

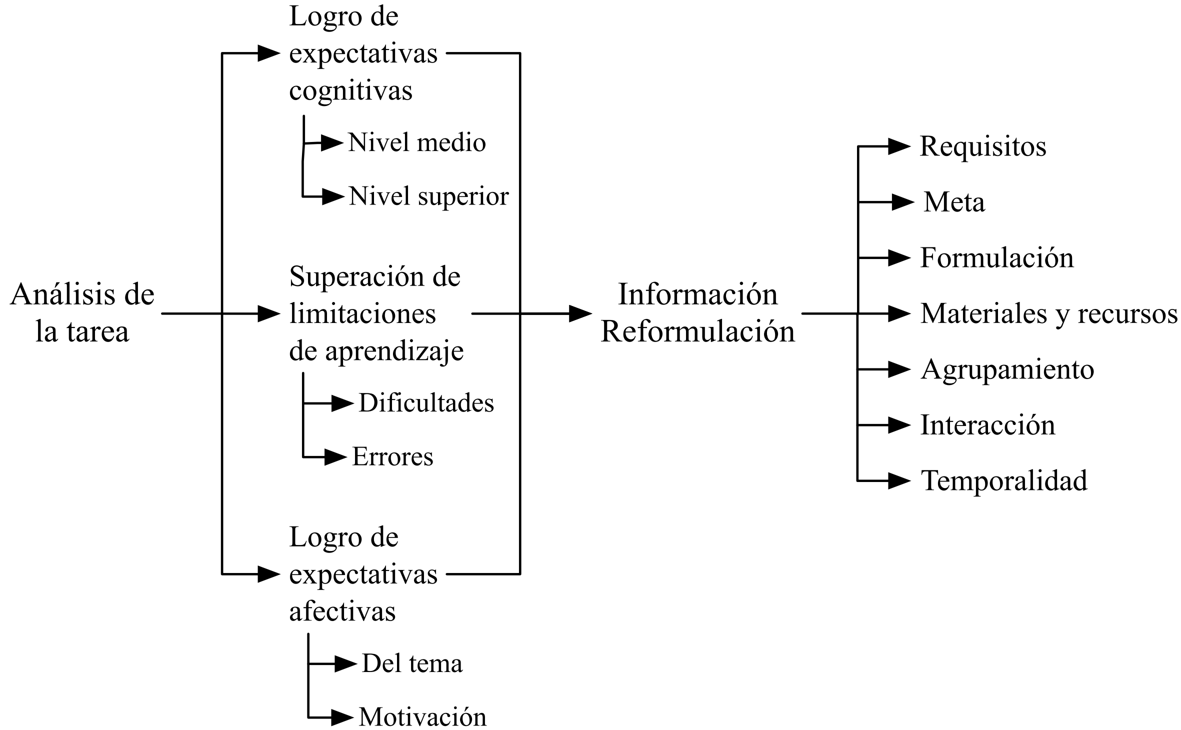

Figura 20. Reformulación de una tarea matemática escolar

8.1. Modificación de la tarea Reparto de papel silueta

Para que la tarea no se reduzca a demandar a la estudiante que cumpla una exigencia del profesor, podemos concebir una nueva tarea que involucre a todos los estudiantes de la clase. En esta nueva tarea, el profesor organiza a los alumnos en parejas y entrega 5 hojas de papel silueta, de diferente color cada una, a cada pareja. Luego, les solicita a las parejas que repartan en partes iguales el papel silueta de tal manera que a cada miembro de la pareja le corresponda la misma cantidad de papel. Con esta nueva tarea, el profesor no promueve una estrategia específica de solución y espera que cada pareja decida cuál o cuáles son las estrategias de solución apropiadas. Si el profesor constata en algunas parejas que sus miembros han identificado una sola estrategia de solución (p. ej., partir la hoja por su diagonal), él puede formular preguntas con el objetivo de que la pareja considere y ensaye otra alternativa. Por otra parte, y dado que los estudiantes pueden llegar a utilizar diferentes signos para representar la cantidad de hojas dadas a cada persona, es importante que esas diferentes representaciones se socialicen. Para ello, el profesor puede sugerir que cada pareja escriba en una ficha de cartulina el signo y la pegue —cuando él indique— alrededor del tablero. Al hacerlo, puede hacerse evidente que algunas parejas incurrieron en errores al escribir el signo. Estos errores son parte esencial de la tarea.

Las ideas anteriores nos permiten replantear la tarea, al modificar cinco de sus elementos: formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad. Para este nuevo planteamiento, proponemos otro grupo de ayudas. Describimos la nueva versión de estos elementos de la nueva tarea a continuación.

Formulación. Reparte en partes iguales, entre tú y tu compañero, las cinco hojas de papel que te he entregado. Determina qué cantidad de hojas de papel le correspondió a cada uno. Junto con tu compañero, escribe la cantidad de papel que le correspondió a cada uno en la ficha de cartulina que les he entregado y pégala (cuando yo lo indique) en algún espacio alrededor del tablero para que el resto de la clase lo observe. Conserva las hojas tal cual quedaron luego de hacer la repartición.

Materiales y recursos. A cada pareja de estudiantes les será entregadas cinco hojas de papel silueta en forma cuadrada. Todas las hojas son de diferente color.

Agrupamiento. El profesor propone que el trabajo se realice en parejas. Sin embargo, no es suficiente con que se generen estrategias al interior de las parejas que no se socialicen al resto de la clase. Al tener pegadas las fichas alrededor del tablero, se continúa con un trabajo en gran grupo. El profesor invitará a algunas parejas a compartir la forma con la que hizo la repartición y el signo que utilizaron para designar la cantidad de papel que le correspondió a cada miembro de la pareja.

Interacción. Prevemos una interacción entre los miembros de las parejas. Ellos tendrán que determinar los criterios para la repartición del papel, el gusto por determinado color, la igualdad en cuanto a colores, o solamente las condiciones necesarias de la tarea le llevaran a repartir el papel. Cuando los estudiantes estén haciendo la repartición, el profesor debe revisar el trabajo de los grupos y reiterarles, si es necesario, los dos requisitos indispensables de la tarea: la repartición en partes iguales y la repartición del total del papel. Si evidencia algún problema con alguna de estas condiciones o con las dos, deberá hacer preguntas que orienten a la pareja de estudiantes para que puedan superar los errores. El profesor, al revisar el trabajo de las parejas, también puede advertir que solo están siguiendo una de las estrategias y cuestionarlos sobre si es la única forma de hacerlo. Una vez que las fichas estén pegadas alrededor del tablero, comenzará otro tipo de interacción. Algunas parejas pasarán y mostrarán a sus compañeros la forma en que hicieron la repartición. Para facilitar la socialización, los estudiantes seleccionados podrán mostrar el papel silueta luego de la repartición y justificar tanto la repartición, como el signo que propusieron. La pareja explicará, mientras el profesor y compañeros escucharán la estrategia. En esta parte de la tarea, ocurrirá otro tipo de interacción: el profesor deberá moderar la socialización. Él tendrá que tomar nota de los errores y estrategias que percibe en lo dicho por los estudiantes y luego tendrá que motivar que se llegue a acuerdos y se establezcan conclusiones por parte de toda la clase.

Temporalidad. La tarea empieza en parejas. Cada grupo diseñará su propia estrategia para hacer la repartición en partes iguales. En esta fase de la tarea, cada pareja debe haber hecho la repartición y posteriormente haber escrito en la ficha de cartulina el signo que le resultó. La segunda fase implica que, al tener pegadas la fichas de cartulina en el tablero, se escoge la partición de ciertos grupos para que socialicen la forma en que hicieron la repartición. Y, la tercera y última fase consiste en el debate que concluya con los acuerdos a los que la clase llegue.

Previsiones de la nueva tarea
La nueva versión de la tarea puede implicar más estrategias de solución y, con ello, la activación de una mayor cantidad de capacidades. Las parejas de estudiantes, además de identificar la unidad como susceptible de partirse y escoger un plan para hacer la partición (por ejemplo, partir las hojas por la mediana), pueden encontrar que hay otra forma de hacerlo (partir las hojas por la diagonal) y concluir que esas dos formas son válidas, porque ambas implican tener la misma cantidad de papel (C20). Esto es viable ya que, al trabajar en parejas, cada miembro de la pareja puede proponer una forma distinta de hacer la partición. También es posible que la pareja de estudiantes no opte por partir solo una de las hojas, sino que decida, por alguna razón, partirlas todas, al tener en cuenta, por ejemplo, el atributo del color. Esta última decisión puede tener implicaciones cuando ellos representen la cantidad de hojas que le correspondió a cada uno. Una posibilidad consiste en identificar que cada miembro tiene dos hojas y media, y reconstruir la unidad, al unir pares de partes (C4-5). La pareja también puede llegar a representar matemáticamente esta reconstrucción de la unidad con las ayudas que el profesor proporcione (C10-12). Otra posibilidad consiste en contar todas las partes (C17). La pareja también puede representar matemáticamente esta unión con las ayudas que el profesor proporcione y afirmar que tiene cinco mitades que se pueden representar como $\frac{5}{2}$ (una fracción impropia) (C13).

Por otro lado, la nueva tarea incluye formas de agrupamiento y esquemas de interacción que implican un nuevo tipo de capacidad relacionada con la interacción entre los miembros de la pareja, entre todos los estudiantes, y entre los estudiantes y el profesor. Estas capacidades de interacción son transversales a los diferentes momentos de la resolución de la tarea y adquieren significado en cada uno de esos momentos. En el caso de esta tarea, estas estrategias se refieren a expresar las estrategias que previeron para realizar cierta demanda (C29); expresar las estrategias propias que se emplearon para realizar cierta demanda (C28); escuchar estrategias diferentes a las propias para dar solución a un interrogante o para realizar cierta demanda (C30); y comparar estrategias propias y ajenas y llegar a acuerdos al respecto (C31). Por ejemplo, cuando los miembros de una pareja constatan que, cada uno por su lado, ha establecido una forma diferente de realizar la partición, ellos pueden comunicar cómo lo piensan hacer (C29), mostrar cómo lo hicieron (C28), escuchar la propuesta del otro (C30), y/o comparar las dos formas y llegar a acuerdos al respecto (C31). Este conjunto de capacidades configura una nueva secuencia de capacidades que denominamos S17. Estas nuevas capacidades relacionadas con la interacción (y la correspondiente secuencias de capacidades) deben incluirse en las previsiones que el profesor hace de la actuación de los estudiantes.

Vemos entonces que la nueva tarea activa tanto capacidades que no se activaban con la tarea original, como nuevas capacidades relacionadas con la interacción. El análisis de los dos párrafos anteriores nos permite construir el grafo de secuencias de capacidades de la nueva tarea que presentamos en la figura 21. Observamos que, dentro de una misma secuencias de capacidades (p. ej., C20/29-28-30-31), distinguimos con una barra oblicua las capacidades que se habían identificado previamente cuando no se tenía en cuenta la interacción (C20), de aquellas que se refieren a la interacción (C29-28-30-31). Es importante, recordar que, dado que el grafo del objetivo de aprendizaje se construyó con tareas prototípicas que no implicaban interacción, estas nuevas capacidades no aparecerán en ese grafo.

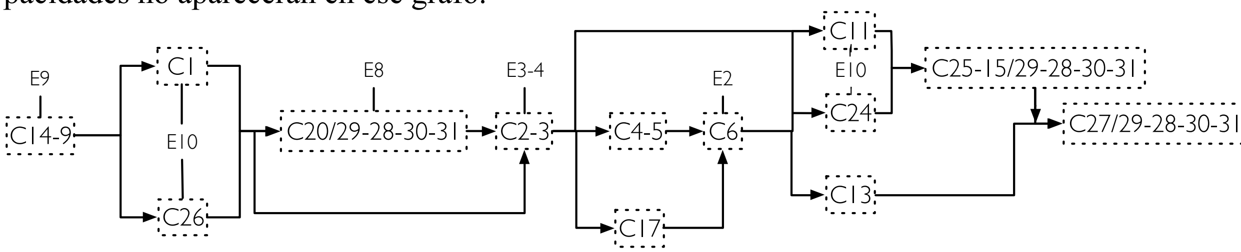

Figura 21. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea papel silueta

Observamos que las capacidades relacionadas con la interacción se acoplan con una o más de las otras capacidades. Es el caso de las capacidades C20/29-28-30-31, que representan tanto la capacidad para establecer una forma de partición a partir de dos formas dadas, como el proceso de negociación de significados que está implicado en la decisión que la pareja toma al respecto. Dada la complejidad que el grafo ha adquirido, resulta conveniente simplificarlo en términos de secuencias de capacidades. En la tabla 12, describimos las nuevas secuencias de capacidades que se activan con motivo de la nueva versión de la tarea.

Tabla 12
Descripción secuencias de capacidades que se activan con la tarea modificada

S	CyE	Descripción de la secuencia de capacidades
9	C20	Identificar la equivalencia entre cantidades de superficie
10	C4-5	Reconstruir la unidad
12	C17	Unir fracciones del mismo tamaño.
11	C6 E2	Sumar fracciones con el mismo denominador
13	C13 E3	Expresar una fracción mediante una fracción impropia
17	C26-27-28-29	Expresar y escuchar estrategias previstas y utilizadas para realizar cierta demanda y comparar las propias y ajenas para llegar a un acuerdo

Nota. S = Secuencia de capacidades; CyE = capacidades y errores.

Podemos entonces presentar, en la figura 22, el grafo de secuencias de capacidades de la tarea en el que incluimos las secuencias de capacidades en términos del número con el que las hemos identificado en las tablas 6 y 12.

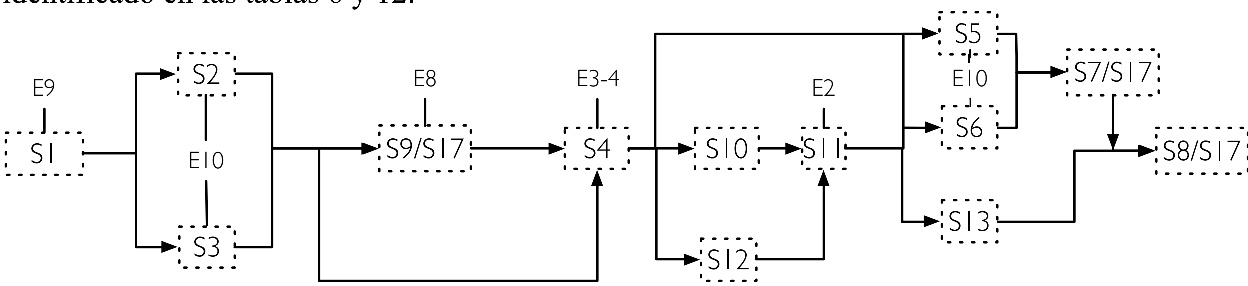

Figura 22. Grafo de secuencias de capacidades de la tarea papel silueta

Ayudas

El listado de ayudas cambia significativamente en relación con el de la tarea original. Además de las tres ayudas descritas con la primera versión de la tarea que estaban relacionadas con los errores que se habían identificado, también se deben diseñar ayudas relacionadas con las estrategias de solución de la tarea. Es posible que haya caminos de aprendizaje previstos que no se aborden debido a que los estudiantes, a diferencia de los que se ha previsto, no conciban forman distintas de partir la unidad o de hacer el reparto total del papel. El profesor deberá verificar el trabajo delas diferentes parejas y constatar estrategias y errores. Una ayuda que el profesor puede usar sistemáticamente es preguntar si hay otras formas de hacer la partición de una hoja o el reparto del total del papel. Además de esta ayuda, él puede orientar a los estudiantes a la realización de representaciones de sumas de fracciones con el mismo denominador, ya sea para el caso de la reconstrucción de la unidad o de la unión de todas las partes. Él puede hacerlo en dos fases de la tarea: en el momento que las parejas están abordando la tarea y en el momento de la discusión y acuerdos. Las siguientes son las ayudas que el profesor puede proponer.

A3 ¿Hay otra forma de hacer la partición?

A4 ¿Hay otra forma de hacer el reparto del papel?

A5 Cuando están juntando dos de las mitades de papel: esto puede representarse como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

A6 El contar todas las partes se puede representar como $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

Análisis de la dimensión cognitiva de la nueva tarea

Para establecer la contribución de la nueva versión de la tarea al objetivo de aprendizaje, resaltamos con una línea continua las secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje que se activan con la tarea, como mostramos en la figura 23.

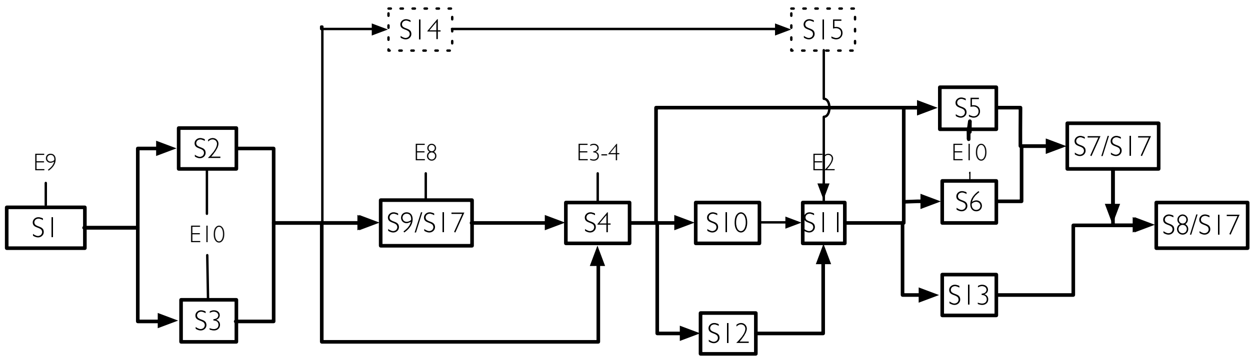

Figura 23. Contribución de la nueva versión de la tarea al objetivo de aprendizaje

Para identificar la contribución de esta nueva tarea a las expectativas de nivel superior, seguimos el esquema propuesto anteriormente. Estudiamos, desde la perspectiva de los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales, cada una de las secuencias de capacidades que se activan con la tarea. La secuencia S9, al implicar dos formas de ver la mitad o un medio desde una perspectiva geométrica, puede llevar al estudiante a que active esta secuencia de capacidades al comparar dos signos de una misma idea matemática. Esto puede contribuir a la capacidad fundamental de representar, en el proceso matemático de interpretar. Las secuencias de capacidades S10 y S12 implican seleccionar un plan para reformular matemáticamente la cantidad de hojas. Esto contribuye a la capacidad matemática de diseño de estrategias para resolver problemas, en el proceso matemático de formular. En las secuencias de capacidades S11 y S13, el estudiante realiza una representación matemática de información del mundo real. En el caso de la primera secuencia de capacidades (S11), él realiza una suma de fracciones al representar la unión de los pedazos de papel que ha obtenido. En el caso de la secuencia de capacidades (S13), él representa el total del papel repartido. Las secuencias de capacidades S7 y S8 se refieren a los procedimientos que el estudiante realiza al comparar o valorar dos o más representaciones de una situación. Esto contribuye a la capacidad fundamental de representar, en el proceso matemático de interpretar. Por otra parte, la secuencia de capacidades S17 contribuye a las capacidades fundamentales de comunicación y razonamiento y argumentación. Específicamente los estudiantes deberán defender el signo que sugieren para representar la cantidad de papel con el que ha quedado cada uno luego de la repartición y llegar a un acuerdo respecto al signo que finalmente colocarían en la lámina de cartulina. Con esto, se contribuye a la capacidad fundamental de razonamiento y argumentación en el proceso de formular. Por otro lado, ellos deberán presentar explicaciones en el contexto de la demanda de la tarea, especialmente en el momento de la socialización, lo que contribuye a la capacidad fundamental de comunicación en el proceso de interpretar. En la tabla 13, presentamos el resultado de este análisis.

Tabla 13

Contribución de la tarea a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
S	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
9																		✓			
10	✓																				
12	✓																				
11																✓					
13																✓					
7																		✓			
8							✓					✓						✓			
T	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	3	0	0	0

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; S = secuencia de capacidades; T = total.

Análisis de la dimensión afectiva de la nueva tarea

Para analizar las contribuciones de esta nueva tarea a las expectativas de tipo afectivo, haremos uso de las preguntas utilizadas en el apartado anterior: (a) ¿la tarea puede verse por parte del estudiante como útil, de interés o importante?; (b) ¿la tarea está al alcance de los estudiantes y promueve el reconocimiento del trabajo de cada uno de ellos?; y (c) ¿la tarea le implica al estudiante un reto, dando pie a la utilización de procedimientos no rutinarios y a la búsqueda de propiedades, regularidades o análisis de información? La nueva tarea sigue sin tener un contexto que explique la razón por la cual se debe realizar la repartición: no se logra enmarcar el sentido de esta acción. Consideramos que la nueva tarea promueve el reconocimiento del trabajo de cada estudiante, en la medida en que se pone a la vista de todos (profesor y estudiantes) las soluciones de cada una de las parejas. Estas soluciones serán importantes en el momento de la socialización. Por último, la tarea puede implicar un reto debido a que se presta para abordarla con diferentes estrategias y los miembros de la pareja deben discutir al respecto. Con base en el análisis anterior, consideramos que la tarea aporta tanto a la curiosidad, como al interés de los estudiantes. Teniendo en cuenta que la secuencia de capacidades S17 contribuye a las capacidades fundamentales de comunicación y razonamiento y argumentación, podemos afirmar que la tarea contribuye a la primera expectativa afectiva. Resumimos la contribución de la tarea a las expectativas afectivas en la tabla 14.

Tabla 14
Contribución de la tarea reparto de papel silueta a las expectativas de tipo afectivo

S	EA1	EA2	EA3
9		✓	
10			
12		✓	
11		✓	✓
13		✓	✓
7		✓	
8		✓	
17	✓		
T	1	6	2

Nota. S = secuencia de capacidades; T = total; EA1 = nombre de la primera expectativa de tipo afectivo; …; EAn = nombre de la expectativa de tipo afectivo n

Presentamos a continuación el análisis de la nueva versión de tarea desde el punto de vista de los aspectos que contribuyen a la motivación.

Adecuación de las demandas cognitivas. La tarea sigue siendo adecuada para estudiantes de 9 a 10 años. Los requisitos no cambian.

Reto. La nueva agrupación y la interacción que la tarea promueve implican que la tarea se puede resolver con varias estrategias de solución diferentes. De esta forma, un estudiante puede verse en la situación de cambiar la estrategia que ha pensado, si su compañero le propone una que puede parecer más eficaz. La variedad de estrategias de solución y la interacción que puede generar implican que la tarea sea un reto para los estudiantes.

Reacción a los errores. Además de los errores previstos para la versión original de la tarea, también se prevé reaccionar frente al error de identificar como diferentes las particiones que resultan al dividir la hoja de papel por sus puntos medios y por sus diagonales. Es posible que se presenten las dos alternativas de partición cuando se trabaja en parejas. Los estudiantes deberán argumentar la razón por la cual creen que esas dos partes son iguales. El profesor, mientras tanto, deberá evaluar si es o no necesario mediar en cada una de las parejas respecto a este punto. Este será uno de los elementos que se deben negociar en el momento de la socialización.

Contribución a la interacción. Hay interacción desde el inicio de la tarea. Las parejas de estudiantes deben llegar a acuerdos antes de accionar con el papel, a no ser que una persona de la pareja decida accionar sin preguntar primero la opinión del otro. Los miembros de la pareja también deberán llegar a acuerdos y tomar decisiones en el momento en que escriban el signo que van a socializar: ¿qué escribir?, ¿por qué así y no de otra manera? Estas son solo algunas de las preguntas que se pueden generar al interior de las parejas. En el momento de la socialización, la interacción entre estudiantes que no están acostumbrados a este tipo de tareas no suele ser fácil. Los estudiantes no han desarrollado necesariamente sus capacidades para escuchar y comunicar sus pensamientos. El profesor deberá promover estas capacidades, particularmente cuando las parejas presenten sus resultados al grupo clase.

Contexto. Aunque la tarea, desde su primera versión, implica repartir un objeto que de hecho es divisible, la tarea no se encuentra ubicada en un contexto que le de sentido y los estudiantes no pueden reconocer por qué se debe realizar la repartición del papel o qué se va a hacer con ese papel luego de la repartición. Por tanto, la tarea se enmarca en un contexto que no es auténtico y que promueve muy poco el interés y la curiosidad de los estudiantes.

9. Descripción de la secuencia de tareas

Hasta ahora, hemos presentado técnicas para describir, analizar y modificar una tarea. No obstante, nuestro propósito es proponer un diseño curricular para un tema de las matemáticas escolares para el que hemos establecido un conjunto de objetivos de aprendizaje, limitaciones de aprendizaje y expectativas afectivas. Ese diseño curricular se debe concretar en una secuencia de tareas. Ya establecimos la noción de secuencia de tareas que describimos esquemáticamente en la figura 2. En este apartado, proponemos técnicas para la descripción de una secuencia de tareas.

9.1. Descripción inicial

Una vez que el profesor ha descrito, analizado y modificado las tareas que propone, es necesario presentar de manera estructurada la secuencia de tareas. Para ello, se requiere que el profesor indique el orden en que las tareas se van a presentar, las sesiones de clase en las que se van a trabajar, el objetivo con el que se relacionan, sus metas y el tiempo previsto para cada una de ellas. El profesor puede hacer una tabla como la tabla 15. No es necesario incluir más información, dado que el profesor ya tiene la descripción detallada de cada tarea.

Tabla 15
Descripción de la secuencia de tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
1	1	1	Descripción breve de las metas	50
2	1	2		
3	2	3		

Tabla 15

Descripción de la secuencia de tareas

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
4	2	3		
5	2	4		
…				

Nota. T1 = nombre de la tarea 1; …; Tn = nombre de la tarea n.

10. Análisis de la secuencia de tareas

De la misma forma que el profesor debe analizar y puede reformular las tareas, él también debe analizar la secuencia de tareas, con el propósito de decidir si es necesario modificarla. De nuevo, los criterios de referencia son las expectativas de aprendizaje (de nivel medio y superior), las expectativas de tipo afectivo y las limitaciones de aprendizaje. En este caso, el interés consiste en tener una visión global de la contribución de la secuencia de tareas a esos criterios de referencia.

El análisis de la secuencia de tareas se basa en el mismo tipo de análisis que se realizó para las tareas individuales. Agregamos un cuarto criterio de análisis que se refiere a la coherencia de la secuencia de tareas. Para ello, el profesor debe establecer la relación de las tareas desde la perspectiva de sus requisitos y metas. Describimos las técnicas en cuatro apartados que corresponden a estos cuatro criterios.

10.1. Contribución de la secuencia de tareas a las expectativas de aprendizaje

El profesor ya ha hecho el análisis de la contribución de cada tarea individual a las expectativas de aprendizaje, con base en la comparación de su grafo de secuencias de capacidades con los grafos de secuencias de capacidades de los objetivos de aprendizaje. Cuando ya se tiene la propuesta completa de la secuencia de tareas, el profesor cuenta con un resumen de ese análisis para argumentar que las tareas sí abordan apropiadamente los objetivos de aprendizaje. Esto quiere decir que el profesor puede justificar que, para cada camino de aprendizaje de cada grafo de secuencias de capacidades de cada objetivo de aprendizaje, hay al menos una tarea que motiva su activación. En caso contrario, el profesor debe realizar los cambios que sean necesarios en las tareas de tal forma que esas tareas contribuyan apropiadamente al objetivo de aprendizaje correspondiente.

10.2. Contribución a las expectativas de aprendizaje de nivel superior

El profesor puede analizar la contribución de la secuencia de tareas a las expectativas de aprendizaje de nivel superior. A partir de los análisis de la contribución de cada tarea individual a esas expectativas de aprendizaje realizados con anterioridad (tabla 8), se puede obtener el conteo total de activaciones de los tres procesos matemáticos y de las siete capacidades matemáticas fundamentales. Para ello, el profesor puede construir una tabla (como la 16) en la que cada fila corresponde a una capacidad matemática fundamental y hay una columna para cada proceso matemático. De esta manera es posible que el profesor haga un conteo general de la contribución de cada tarea a esas expectativas de aprendizaje y resumir así la información.

Tabla 16
Contribución a expectativas de aprendizaje de nivel superior

	Procesos matemáticos			
CMF	Formular	Emplear	Interpretar	Total
DRP				
M				
C				
Ra				
U				
Re				
H				
Total				

Nota. CMF = capacidad matemática fundamental; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; S = secuencia de capacidades.

Los datos de la tabla 16 proporcionan una caracterización resumida de la contribución de la secuencia de tareas a las expectativas de aprendizaje de nivel superior. Con esta información, el profesor puede describir su secuencia de tareas desde esta perspectiva. Adicionalmente, el análisis de los datos de la tabla puede llevar al profesor a identificar procesos matemáticos o capacidades matemáticas fundamentales que se activan en un nivel o proporción diferente del que esperaba. Si es así, el profesor puede regresar a la tabla 18 y, en ella, identificar aquellas tareas que serían susceptibles de mejora de acuerdo con esos nuevos propósitos.

10.3. Contribución de la secuencia de tareas a las limitaciones de aprendizaje

Para establecer la contribución de las tareas a las limitaciones de aprendizaje, es necesario producir una tabla que describa esa contribución. El profesor puede producir una tabla como la tabla 17.

Tabla 17

Contribución de las tareas a las limitaciones de aprendizaje

	Limitaciones de aprendizaje	
Tarea	Dificultades	Errores
Nombre tarea 1	Di,…	Ej,…
Nombre tarea 2		
…		
Nombre tarea n		

Nota. El listado de limitaciones de aprendizaje se encuentra en…

El profesor debe indicar si se están abordando todas las limitaciones de aprendizaje. En caso de que haya uno o más errores que no se aborden, debe explicar por qué no se aborda o de qué manera se deben reformular una o más tareas para hacerlo.

10.4. Contribución a las expectativas de tipo afectivo

El análisis de la contribución de la secuencia de tareas a las expectativas de tipo afectivo se basa en las mismas técnicas que se utilizaron para analizar la contribución de las tareas individuales a ese tipo de expectativas (tabla 10). Hacemos este análisis desde dos perspectivas: (a) la contribución de las secuencias de capacidades a las expectativas afectivas que el profesor ha establecido y (b) el análisis de la contribución de la secuencia de tareas a algunos aspectos de la motivación de los estudiantes. Abordamos estas dos técnicas a continuación.

Análisis en términos de las secuencias de capacidades

Las secuencias de capacidades dan cuenta de la actuación del estudiante al abordar la secuencia de tareas. Esa actuación debe incluir evidencias de la contribución de la secuencia de tareas a las expectativas de tipo afectivo. Para ello, el profesor puede hacer una tabla como la tabla 18.

Tabla 18

Contribución de las tareas a las expectativas de tipo afectivo

S	EA1	EA2	…	EAn
		Nombre de la tarea 1		
1		✓		
2	✓			
…				
n				
T				

	Nombre de la tarea 2
n+1	
…	
T	
	Nombre de la tarea n
…	
T	

Nota. S = secuencia de capacidades; T = total; EA1 = nombre de la primera expectativa de tipo afectivo; …; EAn = nombre de la expectativa de tipo afectivo n

En la tabla, el profesor debe poner una marca para cada secuencia de capacidades que contribuya a cada expectativa de tipo de afectivo. Para cada tarea, el profesor puede hacer un conteo de la cantidad de secuencias de capacidades que contribuyen a cada expectativa de tipo afectivo. Al final de la tabla, el profesor puede hacer el conteo total de contribuciones a cada expectativa de tipo afectivo. Los resultados de este análisis le debe indicar al profesor qué expectativas de aprendizaje no se están abordando apropiadamente y qué tareas se podrían modificar para lograrlo.

Análisis de aspectos que contribuyen a la motivación

Con base en los criterios que presentamos para el análisis de una tarea individual, el profesor puede analizar la secuencia de tareas y hacer una previsión de su contribución a cada criterio. Para hacer este análisis, él producir una tabla como la tabla 19.

Tabla 19

Contribución de las tareas a aspectos de motivación

	Aspectos de motivación				
Tarea	Demandas cognitivas	Reto	Errores	Interacción	Contexto
1	✓				
2		✓	✓		
…					
n					

El profesor debe justificar las marcas que haga en la tabla con argumentos que muestren cómo cada tarea contribuye a cada aspecto. Esta justificación puede basarse, si así se desea, en las secuencias de capacidades que caracterizan el grafo de secuencias de capacidades de la tarea.

10.5. Análisis de coherencia de la secuencia de tareas

La coherencia es una de las cuestiones que el profesor debe verificar en relación con la secuencia de tareas. Centramos esta cuestión en un aspecto de la secuencia de tareas: la relación entre los requisitos y las metas de las tareas. Para ello, el profesor ha hecho explícitos, en la descripción de las tareas, dos de sus atributos: (a) los conocimientos y destrezas que la tarea requiere para ser abordada (requisitos) y (b) los conocimientos y destrezas que se espera que los estudiantes hayan desarrollado una vez han abordado la tarea (metas). El análisis de la coherencia de la secuencia de tareas se realiza al analizar la relación entre los requisitos de una tarea y las metas de las tareas anteriores. El profesor puede producir una tabla como la tabla 20, en la que indique la relación entre los requisitos de una tarea y las metas de las tareas anteriores.

Tabla 20
Coherencia de las tareas

	Tareas				
T	CP	T1	T2	…	Tn
T1	✓				
T2		✓			
…					
Tn					

Nota. CP = conocimientos previos; T = tareas

El profesor debe poner, para cada tarea de las filas, una marca que corresponda a la tarea de las columnas cuya meta satisface el requisito de la tarea de la fila. En el ejemplo de la tabla 20, la meta de la tarea T1 satisface los requisitos de la tarea T2. No es necesario poner marcas relacionadas con los conocimientos previos, excepto para la primera tarea o en caso de que una tarea posterior haga referencia explícita a conocimientos previos específicos.

11. Modificación de la secuencia de tareas

Los análisis que hemos propuesto en el apartado anterior permiten caracterizar la secuencia de tareas de acuerdo con los cuatro criterios que hemos expuesto. Estos análisis puede indicarle al profesor que la secuencia de tareas no tiene las características que él esperaba. Por ejemplo, los análisis le pueden mostrar al profesor que la secuencia de tareas no contribuye, en la medida que él esperaba, a las expectativas de nivel superior, a los objetivos de aprendizaje o a las expectativas de tipo afectivo. De igual manera, los análisis le permiten al profesor constatar que hay errores en los que los estudiantes pueden incurrir y que la secuencia de tareas no promueve adecuadamente su superación, o establecer que hay tareas que tienen requisitos que no están satisfechos por tareas anteriores. En cualquiera de estos casos, el profesor debe modificar la secuencia de tareas. La secuencia de tareas se puede modificar de dos maneras: (a) al agregar, eliminar o cambiar el orden de las tareas que la conforman y (b) al modificar una o más tareas de la secuencia de tareas.

12. AGRADECIMIENTOS

El profesor Pablo Flores es el primer autor de los apuntes del módulo de análisis de instrucción en sus primeras dos versiones (MAD 1 y MAD 2). Estos apuntes se han inspirado en las ideas que él desarrolló en esos dos documentos. Le agradecemos también su contribución al desarrollo del ejemplo de la tarea Reparto de papel silueta. También agradecemos a la profesora María José González su contribución a la concreción de los aspectos que contribuyen a la motivación y que fundamentan el proceso de análisis de las tareas desde esa perspectiva afectiva.

13. REFERENCIAS

Benavides, D., Carrillo, A., Ortiz, M., Parra, A., Velasco, C. y Gómez, P. (2016). Permutaciones sin repetición. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 2* (pp. 265-327). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6508/

Blanco, L., Guerrero, E., Caballero, A., Piedehierro, A. y Gómez del Amo, R. (2010). El dominio afectivo en la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas: una revisión de investigaciones locales. *Campo abierto: Revista de educación, 29*(1), 13-31. Disponible en http://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/29002

Carretero, R., Coriat, M. y Nieto, P. (1993). *Etapa 12/16. Area de matemáticas: secuenciación, organización y actividades de aula*. Granada: Universidad de Granada.

Flores, P., Gómez, P. y Marín, A. (2013). *Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2061/

Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 61-88). Madrid, España: Pirámide.

González, M. J. y Gómez, P. (2015). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD 3*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6454/

González, M. J., Gómez, P. y Restrepo, A. (2015). Usos del error en la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Educación, 370*, 71-95. Disponible en https://www.sugarsync.com/pf/D18779_94704537_128620

Guerrero, E. y Blanco, L. (2004). Diseño de un programa psicopedagógico para la intervención en los trastornos emocionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de educación, 33*(5), 1-14. Disponible en http://tinyurl.com/aznb5xg

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón desde la relación parte–todo al razonamiento proporcional en Didáctica de las Matemáticas para primaria. En M. C. Chamorro, J. M. Belmonte, F. Vecino, L. Ruiz y S. Llinares (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias. Descargado el 30/1/2014, de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Ponte, J. P., Boavida, A., Graça, M. y Abrantes, P. (1997). Funcionamiento de la clase de matemáticas. En J. P. Ponte, A. Boavida, M. Graça y P. Abrantes (Eds.), *Didáctica da matemática* (pp. 71-95). Lisboa, Portugal: Ministerio da Educaçao, PRODEP. Disponible en http://tinyurl.com/cgcwdbn

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno.* Didáctica de la Matemática. Tesis de Máster no publicada, Universidad de Granada, Granada.

Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education, 21*(5), 491-508.

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 109-130). Bogotá: una empresa docente. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/2004/

Zimmerman, B. J. (2004). Sociocultural influence and students' development of academic self-regulation: A social-cognitive perspective. En D. M. McInerney y S. Van Etten (Eds.), *Big theories revisted* (pp. 139-164). Greenwhich, CT: Information Age.