Estudio de caso: Los esquemas de demostración utilizados por estudiantes para profesor de matemáticas al momento de demostrar una prueba en torno al teorema de Pitágoras

JOHAN MANUEL BOHÓRQUEZ VARGAS
jm_bv@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Estudiante)

CRISTIAN ALEJANDRO GUZMÁN RUIZ
crisalegu@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Estudiante)

LAURA CAROLINA PARRA GUERRERO
laurac_2511@hotmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Estudiante)

***Resumen*.** La siguiente investigación (cualitativa) tiene como objetivo clasificar el modelo de demostración que es utilizado por dos estudiantes, para profesor de matemáticas (EPPM) al momento de desarrollar un ejercicio propuesto. En este estudio de caso se conceptualizó el término de razonamiento, dado que la demostración se orienta a todo tipo de razonamiento válido; luego de tener una idea general de la importancia de demostrar, se muestra una clasificación de cada uno de los modelos adoptados por Harel y Sowder, de los cuales se tuvo en cuenta el esquema de demostración externo, empírico y analítico. Luego de presentar el ejercicio de demostración se categorizan a ambos estudiantes mencionando el modelo al cual pertenecen y las dificultades encontradas en cada uno.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, esquemas de demostración, formación docente, argumentación, geometría.

1. Presentación del problema

En la investigación se busca identificar y clasificar los esquemas de demostración que presentan dos EPPM a la hora de enfrentarse a una prueba sin palabras; con la intención de observar si los estudiantes que llegan a tercer semestre de Licenciatura en Matemáticas, alcanzan un nivel riguroso de demostración. Para ello, se plantea un marco conceptual centrado en la demostración en el campo matemático, que permite el manejo de vocabulario común a la hora de clasificar los resultados obtenidos, la comprensión de los conceptos y las características de cada nivel de argumentación y demostración.

En la recolección de datos para la investigación, se realiza una prueba sin palabras (presentada posteriormente) a dos estudiantes de tercer semestre; de quienes, bajo la técnica de estudio de caso, se contrastan los resultados y se concluye a la luz de la caracterización de niveles de argumentación matemática que se vean reflejados.

2. Marco de referencia conceptual

Es notable la utilización de argumentos para que las personas puedan generar convencimiento de acciones y más aún en el área de matemáticas. Sin embargo, el tipo de razonamiento y los esquemas de demostración tienden a confundirse o a manejarse como un solo concepto utilizado en la actividad matemática. Es por ello que Molfino (2006) muestra y diferencia los dos términos a partir de dos autores (que sí están entrelazados con el pensamiento matemático); el primero, es mencionado por Duval (1992) y se entiende como la organización de proposiciones que se orientan hacia un enunciado dado para luego modificarlo utilizando un campo de conocimientos, mientras que según Balacheff (2000) la demostración se orienta hacia todo tipo de razonamientos que son válidos.

Si se sigue con este orden de ideas ¿Qué elementos debe tener el razonamiento para que pueda convertirse en demostración? Duval (1999) afirma que el razonamiento genera, en la mayoría de las veces, una argumentación innata y dependiendo al nivel de razonamiento, la demostración toma un rol social que busca aportar entendimiento más que verificar la veracidad de una proposición o enunciado, implicando el descubrir propiedades y argumentaciones integrándose dentro de un sistema de conceptos.

Las actividades de demostración se asocian al área de las matemáticas como un eje principal en la apropiación de conceptos, por ello el MEN (1998) toma el término demostración como un elemento importante del contexto matemático (ya sea aritmético, geométrico o álgebraico) en diferentes corrientes filosóficas de la matemática, dentro del formalismo las demostraciones deben ser muy rigurosas basadas únicamente en las reglas del juego deductivo. De aquí la importancia de implementar herramientas para el desarrollo de razonamientos lógicos para la construcción de campos de demostración, Lakatos (1976) menciona que el crecimiento de las matemáticas es consecuencia del mejoramiento en las conjeturas, la lógica de las demostraciones y sus respectivas refutaciones.

Ahora bien, para dar paso al estudio de los tipos de demostración se requiere una mirada en las categorías que se presentan en un razonamiento lógico para realizar una demostración. Harel y Sowder (1998), proponen unos esquemas de demostración cuyo centro es el convencimiento propio y la persuasión de ese individuo cuando se enfrenta a una situación determinada.

Esquemas de demostración externos.

Este esquema se divide en:

- Autoritaria. El estudiante se convence (demuestra) solo porque lo vio en un libro e incluso lo que dijo un profesor o compañero el cual considere con más conocimiento.
- Rituales. El estudiante considera válido un cambio de enunciado-objeto (razonamiento) por la forma del mismo, sin que se reflexione o se repare el contenido (rigor de la escritura).
- Simbólicas. Se usan símbolos sin hacer referencia y dejando atrás las relaciones que tienen con el objeto en cuestión.

Esquemas de demostración empíricos.

Se presentan dos diferenciaciones en la ejemplificación los cuales son:

- Perceptivos. La ejemplificación con la seriación de los dibujos es común para este esquema de demostración.
- Inductivos. El estudiante no alcanza a generalizar sino por el contrario a particularizar una situación.

Esquema de demostración analítico.

Para este esquema se reconocen dos tipos los de transformación y los axiomáticos.

- Transformación. Para este tipo de demostración se debe concurrir por estos momentos: Imágenes espaciales, transformación simbólica y construcción.
- Axiomático. Es una justificación que se deriva de resultados por consecuencias lógicas anteriores, considerados como válidos.

3. Metodología

En el desarrollo del ejercicio de investigación se hace uso de varios instrumentos de recolección de información; el primero de ellos es a una prueba escrita que permitirá a los estudiantes solucionar el problema propuesto. Esta prueba apunta a observar los esquemas de demostración que utilizan los estudiantes al momento de dar solución a un problema que articula conocimientos geométricos y algebraicos, presentando una prueba de demostración tipo prueba sin palabras.

El segundo instrumento nos remite a la observación no participativa, con la que se toman los datos que falten en la demostración escrita; tales como ideas, conjeturas verbales y caminos no tomados o descartados en la solución del problema propuesto. Así mismo, la investigación toma un rumbo cualitativo, por la necesidad de extraer todos los datos posibles a cada una de las dos pruebas aplicadas.

4. Análisis de datos

Estudiante 1. La actividad del estudiante puede dividirse en varios momentos: El primero, genera una estrategia que consiste en hallar la medida común entre el segmento b y el segmento a, para mirar cuántas veces cabe el menor dentro del mayor, luego el estudiante se da cuenta que no hay medida común entre estos dos segmentos; para ello no reflexiona ni aplica coherentemente lo que escribe y la imagen que se le presenta. Ver imagen en https://www.dropbox.com/s/wzv4p0qv15l6flz/ESTUDIANTE%201.pdf

Cuando se da cuenta que no le sirve hallar la medida común, el estudiante genera una demostración algebraica, formulando un razonamiento en donde utilizaba de manera correcta cada una de las propiedades de la igualdad, generando expresiones algebraicas sin guiarse de lo que indica la gráfica, en pocas palabras está utilizando una demostración analítica dada una transformación. Finalmente, el estudiante realiza una comparación entre lo encontrado y la representación gráfica para establecer la relación de equivalencia entre estas dos; aquí es cuando el estudiante genera un esquema de demostración empírico perceptivo, tomando y dando veracidad a su representación algebraica dada la figura: luego los cuadrados de a y b son iguales al cuadrado de a", los construye y afirma "tal y como se muestra en la figura"

Estudiante 2. Este estudiante comienza por generar y transformar la expresión del teorema, es decir, coge por un camino algebraico. Lo que el estudiante es construir y demostrar la igualdad de las razones para llegar al teorema de Pitágoras, para este momento el estudiante genera una demostración con forma de ritual ya que a partir de las nuevas manipulaciones logra llegar a la igualdad, pero estas manipulaciones no tienen ningún sentido con respecto al tema de estudio, no relaciona cada una de las acciones sobre la igualdad algebraica. Luego de tener la igualdad y por sustitución coge la igualdad $a^2 - c^2 = b^2$ reemplaza en la inicial que era $\frac{c+a}{b}=\frac{b}{c-a}$ y reemplaza el valor de b, no utiliza un procedimiento adecuado pero genera una demostración inductiva, teniendo como resultado una desigualdad (lógicamente) y justificándola a partir de un contraejemplo. Ver imagen en https://www.dropbox.com/s/w0362uxlhf5pyie/ESTUDIANTE%202.pdf

5. Contraste con las categorías de análisis

De acuerdo con el marco teórico consultado y propuesto, se extrajeron unas características generales resultado del análisis de datos; de acuerdo a cada una de las categorías propuestas se encuentra que los estudiantes:

Esquemas de demostración externo

- Autoritaria. El estudiante no utiliza argumentos basados en una fuente externa (profesor, compañero) para el convencimiento del problema, utiliza sus ideas intuitivas y pre-conceptos.

- Rituales. El estudiante considera válido el enunciado por la forma del mismo sin hacer una reflexión, por ejemplo se evidencia la utilización de la primera razón (c+a)/b =b/ (c-a) sin antes haber reflexionado sobre su veracidad se parte de la misma para justificar el resto.

- Simbólico: El estudiante nombra segmentos, no se hace una relación entre los mismos y la figura.

Esquemas de demostración Empíricos

- Perceptivos. El estudiante nombra segmentos y no se habla de lo que sucede en ellos dentro de la figura.

- Inductivos. No se evidencia la utilización de ejemplos para demostrar la situación, se parte de ideas intuitivas, se desarrollan pero no se alcanza una generalidad.

- Esquemas de demostración Analíticos

- Transformación. Se evidencia una justificación en cuanto la primera razón$\frac{(c+a)}{b} = \frac{b}{(c-a)}$ su procedencia para llegar a la segunda $a^2 + b^2 = c^2$y demostrar su relación, donde se hace uso de argumentos de tipo algebraico aun así no se toma en cuenta la gráfica.
- Axiomáticos: el estudiante no hace visible una conexión entre los razonamientos iniciales y el punto de llegada.

6. Conclusiones

Luego de realizar el ejercicio de investigación y observar los esquemas de demostración, se llega a las siguientes conclusiones:

Los esquemas utilizados por los estudiantes son la demostración ritual, la inductiva, la empírico-perceptiva y la analítica dada una transformación.

En el estudio de los casos se evidenció que los estudiantes al llegar al tercer semestre de LEBEM no alcanzan un rigor en la demostración, es decir, no logran construir un lenguaje lógico para validar el razonamiento hecho. En muchas ocasiones lo utiliza, pero no hay relación con el objeto involucrado.

Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en alumnos de matemáticas. Bogotá: Una empresa docente.
- Duval (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Tipos de justificación de los estudiantes. El profesor de matemáticas, Vol. 91. p. 670-675.
- Lakatos (1976). Pruebas y refutaciones. Descubrimiento de la lógica de la matemática. Universidad de Cambridge: Cambridge.
- MEN (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Edit. Magisterio: Bogotá
- Molfino, V. (2006). Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la demostración en la geometría? Instituto Politécnico nacional. Centro de investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada: Distrito Federal.