

---

## El álgebra geométrica como recurso didáctico en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar

Gladys Mejía Osorio  
gladys6m@hotmail.com  
Ninfa Yaneth Barrios Vásquez  
osaleja7@hotmail.com  
estudiantes X semestre  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

### Resumen

**L**a presente propuesta se enmarca en el proyecto de investigación que se está realizando como trabajo de grado, ésta se fundamenta en las experiencias de aula llevadas a cabo en el transcurso del proceso de formación de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, tiene como objetivo fundamental hacer un acercamiento significativo al álgebra escolar haciendo uso del álgebra geométrica como recurso didáctico, a través de este recurso es posible: establecer *relaciones de equivalencia que se encuentran presentes en las relaciones métricas subyacentes en las figuras y cuerpos geométricos, este tipo de relaciones permiten el establecimiento de expresiones algebraicas (ecuaciones) que las modelan, las relaciones de equivalencias establecidas se apoyan en construcciones geométricas. Didácticamente le otorga sentido a los objetos y procedimientos algebraicos.*

### Fundamentación teórica

La fundamentación teórica de la propuesta, tiene en cuenta cuatro marcos de referencia, histórico, didáctico, de políticas educativas e investigación. Al hacer una revisión a documentos dispuestos en el medio, y particularmente en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, se encontró que por lo general en la escuela se privilegia la enseñanza del álgebra a partir de:

- Una aritmética generalizada: Donde los objetos que se ponen en juego en la aritmética y la “aritmética generalizada son los mismos.
- La enseñanza desde un estudio de procedimientos, donde se privilegia la enseñanza de problemas tipo: “*Hace 10 años la edad de A era los 3/5 de la edad que tendrá dentro de 20 años. Hallar la edad actual de A*”.
- Estudios de relaciones entre cantidades, involucran relaciones que existen entre los números, las diferentes propiedades de la suma, resta, multiplicación y división, pero, el estudiante no logra evidenciar equivalencias básicas, como por ejemplo, que las partes conforman un todo, o que el todo menos la parte conforman la parte ( $a + b = c$ , por tanto  $a = c - b$ , o,  $b = c - a$ ).
- Desde un estudio estructural, donde no es clara la naturaleza de las cantidades que intervienen en la solución de ecuaciones.
- Un estudio funcional, donde las variables son usadas para describir cantidades del mundo real, de la disciplina matemática o de otras disciplinas del saber, así mismo, este modelo implica un



estudio de relación entre cantidades y se considera a las variables en su sentido completo de variabilidad.

Con lo anteriormente expuesto es posible decir sobre la enseñanza del álgebra en la escuela, que en ésta se ha dejado un poco de lado el estudio de: relaciones entre cantidades y magnitudes, estructuras que subyacen en las operaciones y relaciones aritméticas, y se hace poco uso de contextos geométricos y métricos para dotar de significación las expresiones que modelan fenómenos o situaciones.

Desde el marco histórico se considera, importante conocer sobre el origen del álgebra, los trabajos efectuados por las civilizaciones antiguas, pasando por los aportes de los hindúes, los árabes y los trabajos desarrollados en la época del renacimiento con Viète y Descartes; este conocimiento, posibilita la identificación de situaciones concretas que dieron origen a conceptos y procedimientos algebraicos. Conocer los problemas que desencadenaron mas situaciones para enriquecer la matemática en general y el álgebra en particular; teniendo en cuenta el contexto histórico, se ha diseñado las actividades, que le permiten al estudiante entender el origen de ciertas expresiones que son empleadas en la cotidianidad del álgebra sin un contexto significativo, la importancia de hacer un recorrido por el origen y primeros desarrollos del álgebra, de su lenguaje, de su estructura cobra importancia para nosotras como docentes, y aporta cultura general a los estudiantes.

En cuanto al marco didáctico, diversas investigaciones desarrolladas, entre otros por el grupo Arzaquiel de España, los efectuados por el profesor Juan Godino y Vincent Font desde el departamento de didáctica de las matemáticas en la universidad de Granada, los aportes del profesor Eugenio Filloy en la ciudad de México, los estudios desarrollados por el profesor Jorge Hernando Arce de la universidad del Valle, y los trabajos adelantados por el Grupo Pretexto de la Universidad Distrital, acerca del álgebra escolar y de su apropiación por parte de los estudiantes especialmente de grado octavo, han arrojado resultados poco satisfactorios, en la medida en que a los estudiantes les cuesta la transición de la aritmética al álgebra, el nuevo simbolismo al que se ven enfrentados, poco coherente con el que han venido trabajando en años anteriores, se convierte en una de las mayores dificultades a enfrentar por los profesores del área, dichas dificultades no permiten que los estudiantes construyan un sentido y significado que posibilite un uso adecuado del lenguaje algebraico, así como una idea diferente a la mera manipulación algorítmica de las expresiones.

La propuesta ha tenido en cuenta los requerimientos que tanto los Estándares Curriculares de Calidad como los Lineamientos Curriculares para el área de Matemática hacen en cuanto, al desarrollo de la temática y la apropiación de conceptos y procedimientos para estudiantes de grado octavo en el área específica de las matemáticas, permitiendo así que la propuesta se adapte a los requerimientos específicos en el área y particularmente lo concerniente a la iniciación al álgebra escolar.

Además, se han tenido en cuenta investigaciones efectuadas a nivel nacional e internacional, que tienen como temática la identificación de dificultades y/o el desarrollo de propuestas educativas para la iniciación del álgebra escolar, todos ellos han hecho aportes significativos a la propuesta, en la medida en que nos permiten tener una visión generalizada de las problemáticas en el desarrollo de cursos de álgebra escolar, además de la consideración de posibles campos de acción para superarlas.

## Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se reconoce la necesidad de dos metodologías, la metodología de investigación propiamente dicha y la metodología para la acción en el aula, al interior de ésta se reconocen la metodología de las situaciones didácticas propuesta por Brousseau. En cuanto a la metodología de investigación se tienen en cuenta la construcción del problema de investigación, una construcción teórica que involucre la elaboración de la fundamentación teórica que se requiere para el desarrollo de la investigación; un diseño de la acción que involucra, la consolidación del diseño de

situaciones problemas; una aplicación y recolección de la información así como un análisis de la información y una elaboración de conclusiones.

En cuánto la metodología para la acción en el aula del profesor, se enmarca bajo el modelo de investigación en el aula; de acuerdo con los planteamientos de Kemmis, S. y MacTaggart, R. (1988); Elliot, J. (1993); Julia Blández (1996), quienes plantean que ésta es uno de los modelos de investigación que más ayuda a proporcionar herramientas para la formación del sujeto profesor y gestión que éste desarrolla para la acción en el aula, además se considera que es uno de los modelos que mejor e adapta al acto educativo; en el cual la planeación, la acción, la observación y la reflexión son cuatro aspectos a tener en cuenta durante el proceso de una manera cíclica; es decir se proyecta una acción, se pone en práctica, se recogen los datos, se analiza la información, a la luz de los análisis a la información se generan cambios que conducen a un nuevo ciclo que permite evaluar las acciones, reorientar el diseño, rectificar los supuestos y reelaborar un nuevo plan, el cual nuevamente se pone en marcha.

### Actividades

La secuencia de actividades está dirigida a verificar que el álgebra geométrica como recurso didáctico posibilita: Encontrar significado a las relaciones de equivalencia entre las expresiones que refiere a la medida de las figuras (congruencias entre longitudes, equivalencia entre magnitudes) y comprender esos significados. La propuesta consta de ocho actividades, en ellas, se hace uso de material manipulativo, el cual le permite al estudiante una manipulación constante de fichas o de representaciones de figuras geométricas, que los conlleva a la identificación concreta de relaciones entre magnitudes. A continuación se muestra la intencionalidad de cada actividad dentro la propuesta de enseñanza.

SECUENCIA DE ACTIVIDADES	
ACTIVIDAD	INTENCIONALIDAD
<b>ACTIVIDAD DIAGNÓSTICO</b> "El antiguo mundo egipcio"	Identificar las concepciones de los estudiantes frente a la construcción e identificación de expresiones algebraicas, y la manera en que establecen relaciones numéricas y geométricas como base fundamental para el desarrollo de situaciones en el marco del álgebra geométrica.
<b>PRIMERA SITUACIÓN</b> "La tira geométrica"	Establecer relaciones aritméticas a partir de un contexto geométrico y efectuar las respectivas representaciones a través de expresiones.
<b>SEGUNDA SITUACIÓN</b> "Armando cuadriláteros"	Permitir que los estudiantes establezcan relaciones entre los triángulos que conforman diferentes cuadriláteros e identifiquen que: el área del triángulo es un medio del cuadrilátero que lo sustenta.
<b>TERCERA SITUACIÓN</b> "Rompecabezas pitagóricos"	Hacer que el estudiante observe geométricamente que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas construidas sobre los catetos y establezca una expresión que represente las respectivas relaciones.
<b>CUARTA SITUACIÓN</b> "Descubriendo el mundo egipcio"	Hacer que el estudiante encuentre relación entre los casos de factorización y los productos notables de la forma $(x+y)^2$ , $(x-y)^2$ , y por medio del lenguaje geométrico y algebraico compruebe éstas relaciones.
<b>QUINTA SITUACIÓN</b> "Siguiendo el mundo egipcio"	Hacer que el estudiante construya el desarrollo geométrico de la expresión $a^2 - b^2$
<b>SEXTA SITUACIÓN</b> "Orfebrería exacta"	Lograr que el estudiante establezca y compruebe, con argumentos geométricos y simbólicos, la reversibilidad entre procesos para desarrollar productos notables de la forma $(x+y)^3$ , $(x-y)^3$ y a la descomposición de la expresiones que representa el cubo de binomio.
<b>ACTIVIDAD DE EVALUACIÓN</b>	Efectuar un proceso de evaluación que permita reconocer el grado de apropiación de los estudiantes frente al lenguaje algebraico, una vez terminado el proceso de enseñanza aprendizaje con estudiantes de grado octavo.



ASOCOLME

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

Teniendo como referente los Lineamientos curriculares para el área de matemáticas del MEN, se ha efectuado un análisis de cada una de las actividades a la luz de los conocimientos básicos y los procesos generales, los cuales se encuentran desarrollados en los cuadros que se presentan a continuación.

PENSAMIENTOS ACTIVIDAD	NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
LA TIRA GEOMÉTRICA	Está presente la estructura aditiva para establecer equivalencias entre las longitudes de cada una de las tiras.	Se hace uso de una representación concreta de cada tira, susceptible a ser modificada en tamaño por parte del estudiante.	Se reconoce la longitud como la magnitud presente en cada una de las tiras	Se reconocen las letras como medidas sujetas a variación, y se establecen equivalencias entre éstas.
ARMANDO CUADRILÁTEROS	No se da	Se tienen representaciones concretas de triángulos, se permite la manipulación de éstos para establecer relaciones de equivalencias entre las áreas de los triángulos y los cuadriláteros obtenidos.	Se involucra el área como la magnitud sujeto de comparación.	No se da
ROMPECABEZAS PITAGÓRICOS	Está presente la estructura aditiva para establecer equivalencias entre las áreas de cada uno de los cuadrados para establecer equivalencia entre las expresiones obtenidas.	Con material concreto se permite la manipulación de las representaciones de las figuras que conducen al establecimiento de relaciones en términos de área.	Se reconoce la longitud (catetos e hipotenusa) y el área (de los cuadrados) como magnitudes comparables.	Se reconoce la letra como variable, se establecen expresiones que refieren al área de las figuras y equivalencias entre las magnitudes (área).

PENSAMIENTOS ACTIVIDAD	NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
<b>DESCUBRIENDO EL MUNDO EGIPCIO</b>	Se encuentra presente las estructuras aditiva y multiplicativa	A través de representaciones concretas de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos), los cuales se manipulan, con el fin de obtener figuras (cuadrados o rectángulos), cuyas áreas se pueden signar a través de expresiones algebraicas, como suma de partes o como producto de la suma de las medidas de longitud de sus lados.	Se identifica la medida de la longitud total como la suma de las medidas de las longitudes, de las medidas de los lados de las fichas utilizadas, y el área como la región interior contenida en el cuadrado o en el rectángulo y que puede ser expresada a partir del producto de los lados.	Se reconoce la letra como variable, las cuales pueden representar longitudes o áreas de figuras, éstas definen su naturaleza y por tanto no son susceptibles a ser operadas entre sí.
<b>DESCUBRIENDO EL MUNDO EGIPCIO</b>	Se encuentra presente las estructuras aditiva y multiplicativa	A través de representaciones concretas de figuras geométricas (cuadrados y rectángulos), los cuales se manipulan, con el fin de obtener figuras (cuadrados o rectángulos), cuyas áreas se pueden signar a través de expresiones algebraicas, como suma de partes o como producto de la suma de las medidas de longitud de sus lados.	Se identifica la medida de la longitud total como la suma de las medidas de las longitudes, de las medidas de los lados de las fichas utilizadas, y el área como la región interior contenida en el cuadrado o en el rectángulo y que puede ser expresada a partir del producto de los lados.	Se reconoce la letra como variable, las cuales pueden representar longitudes o áreas de figuras, éstas definen su naturaleza y por tanto no son susceptibles a ser operadas entre sí.
<b>ORFEBRERÍA EXACTA</b>		Se hace uso de material concreto, representación de cubos en cartulina y en plastilina; la manipulación de las representaciones concretas, conllevan al estudiantes al establecimiento de expresiones algebraicas	Se identifica la medida de la longitud de la arista total cubo como la suma de las medidas de las longitudes de las aristas de los cubos pequeños y los paralelepípedos, el área como la región de cada cara del cubo o paralelepípedo, y el volumen como el producto de las medidas de las longitudes de las aristas del cubo.	Se reconoce la letra como variable, las cuales pueden representar longitudes, áreas o volúmenes de figuras, éstas definen su naturaleza y por tanto no son susceptibles a ser operadas entre sí.



## Conclusiones

En el conjunto de las experiencias de aula desarrolladas con la propuesta, se ha logrado evidenciar una apropiación significativa de las expresiones algebraicas en los estudiantes que se inician en el álgebra escolar haciendo uso del álgebra geometría como recurso didáctico, entre otros aspectos destacamos:

- El trabajo desarrollado desde un contexto geométrico permitió identificar que algunos errores relacionados con el sentido y el significado que los estudiantes construyen en la escuela frente a la expresión y simbolización algebraica, lograron ser superados a partir del trabajo realizado.
- El álgebra geométrica se convierte en puente entre las representaciones y las expresiones algebraicas, porque permite que los estudiantes observen que una ecuación puede representar una equivalencia entre áreas de figuras geométricas.
- Los estudiantes frente a la expresión  $a^2$ , logran identificar que hace referencia al área de una región que tiene como dimensiones de lados  $a$ , y de igual manera expresiones de la forma  $b^3$ , representan unidades de volumen, situaciones que los conlleva a no cometer errores en la operación entre expresiones algebraicas.
- Los estudiantes dotaron de sentido y significado a algunas de las expresiones algebraicas por medio del referente geométrico.
- Una de los alcances, sin ser éste un objetivo del trabajo, es la introducción de uno de los objetos del álgebra, la ecuación, puesto que los estudiantes establecían equivalencias entre figuras geométricas.

La propuesta no está encaminada a superar la totalidad de las dificultades que se presentan en el transcurso de los cursos de iniciación al álgebra escolar, pero si permite un acercamiento significativo a las expresiones que pueden permitir la superación de algunos obstáculos.

## Bibliografía

- ARCE, Jorge Hernando y otros. (2004). Iniciación al álgebra escolar: Situaciones funcionales, de generalización y modelación
- BLÁNDEZ ÁNGEL Julia. (1996). La investigación acción un reto para el profesorado. España. Publicaciones INDE.
- BOYER, Carl, (1986). Historia de las matemáticas, Madrid, Alianza Editorial.
- FILLOY YAGUE, Eugenio (1998). Aspectos teóricos del álgebra educativa. México. Grupo Editorial Iberoamericano
- GODINO, Juan y FONT, Vicent (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Granada.
- GRUPO ARZAQUIEL (1993). Ideas y actividades para enseñar álgebra, Madrid. Editorial Síntesis S.A.
- GRUPO PRETEXTO (2002) Transición aritmética álgebra, Bogotá. Grupo editorial GAIA
- MASON, J. (1999). Rutas y Raíces del álgebra. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Traducción y edición: Cecilia Agudelo Valderrama.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2006). Estándares Básicos de calidad. Área de Matemáticas. Bogotá, MEN

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1998). Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Bogotá. D.C.

PEREZ DE DIAZ, Maria Cristina. (1996). Álgebra geométrica. El libro del estudiante. Bogotá. Programa RED, Universidad Nacional de Colombia

PUIG, Luis. (2005) Componentes de una historia del álgebra. [www.uv.es/puigl/mexicog6revisado03.pdf](http://www.uv.es/puigl/mexicog6revisado03.pdf)

SAGASTIZABAL. María Ángeles y PERLO, Claudia. (2002). La investigación-acción como estrategia de cambio en las organizaciones. Ediciones la crujía.

SÁNCHEZ, Pacheco (1991). Elementos de Euclides. Madrid, Editorial, Gredos

SOCAS, Martín. CAMACHO, M., y otros (1989). Iniciación al álgebra, Madrid. Editorial Síntesis S.A.

SESSA, Carmen (2005). Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas. Buenos Aires. Argentina. Editorial. Libros del Zorzal

---