

Un aporte a la caracterización del comportamiento argumental y racional cuando se aprende a demostrar

LUIS F. LARA

luisfernandolara26@yahoo.es
Secretaría de Educación Distrital, Bogotá (Profesor)

CARMEN SAMPER

csamper@pedagogica.edu.co
Universidad Pedagógica Nacional (Profesora)

Resumen. Se reportan algunos de los resultados obtenidos en un estudio de caso en el cual se analizaron las interacciones de tres estudiantes de educación básica secundaria (14-16 años) cuando resuelven un problema geométrico dentro de un ambiente que propició actividad demostrativa. En particular, se describe e interpreta el comportamiento de los estudiantes con la integración que Boero, Douek, Morselli y Pedemonte (2010) hacen de los modelos de Toulmin para analizar la elaboración de argumentos (comportamiento racional) y de Habermas para indagar los tres aspectos que caracterizan un comportamiento racional (epistémico, teleológico y comunicativo).

Palabras clave: geometría, razonamiento deductivo, procesos de justificación, estudio de casos.

1. Presentación del problema

La problemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración es un tema que ha suscitado interés en la investigación en educación matemática (Pedemonte, 2005; Godino y Recio, 2001). Hanna (1996, citada en Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2007) señala que la demostración en el currículo escolar se restringe a la geometría, y si se enseña, prevalece el aprendizaje memorístico, así como indica Balacheff (2000), el método usual de enseñanza consiste en presentar demostraciones para que los estudiantes imiten el proceso sin comprenderlo. Jones (2000) menciona que los estudiantes no ven la necesidad de hacer una demostración deductiva, pues se ha privilegiado la verificación y se ha dejado de lado la exploración y la explicación. Para enfrentar esta realidad y al adoptar una perspectiva

sociocultural del aprendizaje, el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{E}\cdot\mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional ha propuesto estrategias metodológicas que favorecen la actividad demostrativa tanto en el contexto universitario como en el escolar, propiciando con ello aprender a demostrar (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013).

Se reportan algunos resultados de un estudio cuyo objetivo fue analizar las acciones de un grupo de tres estudiantes de básica secundaria cuando están aprendiendo a demostrar en un ambiente que favoreció actividad demostrativa (Fonseca y Lara, 2013). Para hacer dicho análisis se empleó el constructo integrado por los modelos de Toulmin para el comportamiento argumental y de Habermas para el comportamiento racional, herramienta útil para analizar detalladamente los aciertos y dificultades que presentan los estudiantes cuando aprenden a demostrar (Boero, Douek, Morselli y Pedemonte, 2010).

2. Marco de referencia conceptual

Actividad demostrativa. La *actividad demostrativa* (Perry et al, 2013) es un constructo en el cual, siguiendo a de Villiers (1993), se considera a la demostración como medio de comunicación, validación, explicación, sistematización y descubrimiento. Se compone de dos procesos. En el primero, denominado *conjeturación*, se establecen conjeturas luego de un proceso de exploración de una situación propuesta. En el segundo proceso llamado *justificación* se construye una argumentación que valide la conjetura formulada en el marco de un sistema teórico o con explicaciones empíricas según el respectivo nivel escolar.

Modelo de Toulmin para el comportamiento argumental. Un *argumento* es un enunciado oral o escrito, utilizado para convencerse o convencer a otros sobre la veracidad de un hecho particular, y consta principalmente de tres elementos (Pedemonte, 2007): unos *datos*, una *conclusión* expresada como una afirmación que se cree es consecuencia de los datos, y una *garantía* que es una regla (axioma, definición o teorema) que relaciona los datos con la conclusión. La manera como estos tres elementos se estructuran y relacionan al ser enunciados definen tres tipos de argumentos (Perry et al., 2013): *deductivo* si a partir de los datos y usando la garantía se obtiene la conclusión, *abductivo* cuando conociendo la conclusión se infieren los posibles datos y con ello la garantía que permite deducir dicha conclusión, e *inductivo* con el cual se establece la garantía a partir de varios ejemplos para los cuales los datos y conclusión son los mismos. Son *argumentos completos* cuando están explícitos los tres elementos del argumento, y *argumentos incompletos* cuando falta alguno de ellos.

Modelo de Habermas para el comportamiento racional. Habermas (2003, cap.2, citado en Morselli y Boero, 2009) establece para el comportamiento racional tres componentes interrelacionados: el epistémico, el teleológico y el comunicativo. De acuerdo con la propuesta de Morselli y Boero (2009) el *aspecto epistémico* tiene que ver con la validación consciente de las afirmaciones y el control de los requerimientos establecidos por la comunidad de discurso matemático para la argumentación; el *aspecto teleológico* se refiere a enfocarse en una meta y en la formulación de un plan y de estrategias para lograr dicha meta; y el *aspecto comunicativo* tiene que ver con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas matemáticas.

3. Metodología

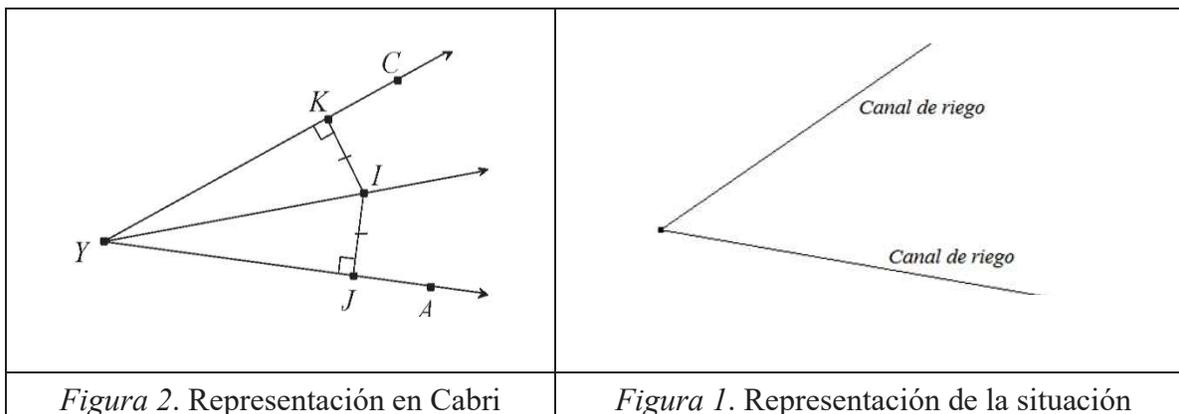
Se adoptó una metodología cualitativa centrada en la corriente descriptiva- interpretativa, y corresponde a un estudio de caso no participante y estructurado (Cohen y Manión, 1990), en el cual se analizaron las intervenciones de un grupo de tres estudiantes del curso (Daniela, Dana y Carlos)¹, cuando formularon y justificaron una conjetura.

Se diseñó e implementó una secuencia didáctica en una institución educativa pública del sur occidente de Bogotá, con los alumnos de una clase de grado noveno de educación básica secundaria. El propósito de dicha secuencia didáctica era construir un sistema teórico local para que los estudiantes en el último problema pudieran formular y demostrar una conjetura. Para ello, se generó un entorno favorable para aprender a demostrar caracterizado por tres elementos (Perry et al., 2013): primero, las *tareas* favorecieron la exploración, formulación de conjeturas y demostración de enunciados; segundo; la *interacción social en el aula* entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes permitió la comunicación y discusión de ideas que se validaron o rechazaron a través de la argumentación; tercero; el *uso de geometría dinámica* (Cabri) favoreció la exploración de propiedades geométricas para producir conjeturas que se organizaron en un sistema teórico local con apoyo del profesor.

Se grabaron en audio y video las dos últimas sesiones del desarrollo de la secuencia didáctica, que se transcribieron y analizaron junto con las producciones escritas de los estudiantes. En estas sesiones los estudiantes resolvieron el siguiente problema: *Uno de los terrenos en la finca de don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales de riego. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada*

¹ Se usaron seudónimos para mantener el anonimato de los estudiantes.

canal sea la misma (Figura 1). Los estudiantes lograron formular una conjetura, en forma de condicional, que se aproximó al hecho geométrico que se quería descubrir: “Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo” que lograron demostrar.



4. Análisis de datos

A continuación presentamos, a modo de ejemplo, parte del análisis del comportamiento argumental y racional de los tres estudiantes durante el proceso de justificación de la conjetura que habían obtenido. En el siguiente diálogo, Carlos y Daniela se dedican a justificar la congruencia del ΔIKY y del ΔIJY . Anteriormente, debido a que descubrieron que la distancia mínima de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta con extremos el punto y un punto de esta, se estableció eso como la definición de distancia de punto a recta. Por ello, llegaron a establecer que $\overline{IK} \cong \overline{IJ}$, $\overline{IK} \perp \overline{YK}$ y $\overline{IJ} \perp \overline{YJ}$ (Figura 2).

- | | |
|---|----------------|
| ¡Ay Gordo! Ahí es donde utilizamos lado, ángulo, lado [LAL]. [...] | Daniela: 848. |
| Muéstrame. ¿Dónde está el lado? [Pregunta cuáles son los lados congruentes.] | Carlos: 849. |
| [...] | |
| Pero podemos sacar el de acá [Señala el \overline{YI}] Que digamos que de forma inversa. Es que no me acuerdo cómo se dice | Carlos: 1111. |
| Aaah, la propiedad reflexiva. | Daniela: 1112. |
| [...] | |
| Entonces sería ángulo, ¿lado, lado [ALL]? Pero eso no existe. | Daniela: 1116. |

No.	Carlos:	1117.
Entonces sería lado, ángulo, ángulo [LAA]. ¡Ah, no! Tampoco.	Daniela:	1118.
Entonces sería H, C [Hecho geométrico Hipotenusa-Cateto]	Carlos:	1119.

Diana muestra el aspecto epistémico del comportamiento racional porque plantea un argumento deductivo completo [848] en el cual los datos son las conclusiones obtenidas en los pasos anteriores ($\overline{IK} \cong \overline{IJ}$, $\angle IKY$ y $\angle IJY$ rectos), la garantía es el hecho geométrico LAL para la congruencia de triángulos, y la conclusión es la congruencia de los triángulos IKY e IJY . Luego Carlos controla (aspecto epistémico) si se tienen los elementos para usar la garantía que propone Daniela. Daniela expresa de forma matemáticamente correcta la idea que expresa Carlos [1111, 1112] (aspecto comunicativo). El aspecto teleológico se refleja en la propuesta de diferentes elementos teóricos para demostrar la congruencia de triángulos. También se evidencia el aspecto epistémico cuando comparan los datos que tienen con las condiciones exigidas en la hipótesis de cada criterio y descartan los que no cumplen.

5. Conclusiones

El estudio muestra que los estudiantes tuvieron un comportamiento argumental y racional que les permitió justificar una conjetura, pese a su poca madurez matemática. Con respecto al análisis del comportamiento argumental, se encontró que es usual que los estudiantes se ayuden para construir argumentos. Por ello es necesario considerar dentro de la tipología descrita en el marco de referencia, los *argumentos individuales* y los *argumentos colectivos*. Como resultado del análisis del comportamiento racional de los estudiantes, se formularon indicadores de cada aspecto, útiles para quien quiera hacer un estudio parecido al aquí reportado. Por ejemplo, los correspondientes al aspecto epistémico son: proporciona garantías provenientes del sistema teórico, elabora argumentos completos, comprende el proceso para justificar una conjetura, solicita explicaciones de las ideas que permiten justificar una conjetura.

Referencias bibliográficas

- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry, en P. Boero (ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*, Rotterdam, Holanda, Sense Publishers, pp. 305-323.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*, Bogotá, Colombia, Universidad de los Andes, Una empresa docente.
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En M.F.F. Pinto y T.F. Kawasaki (eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Belo Horizonte, Brazil, PME, vol. 1, pp. 179-209.
- Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas*, 27 (especial), pp. 371-383.
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). "Métodos de investigación educativa", traducido por Francisco Agudo López, Madrid, España, Ediciones La muralla (primera edición en inglés, 1989).
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, pp. 15-29.
- Fonseca, J. y Lara, L.F. (2013). Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa (Tesis de maestría), Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional.
- Godino, J. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3), pp. 405-414.
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1-3), pp. 55-85.
- Morselli, F. y Boero, P. (2009). Proving as a rational behavior: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof, en V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (eds.), *Proceedings of CERME 6*, Lyon, France, vol. 2, pp. 211-220.
- Pedemonte, B. (2005). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 25, pp. 313-348.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23 - 41.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje*, Bogotá, Colombia, Universidad Pedagógica Nacional, pp. 13-36