Análisis histórico-epistemológico de los elementos necesarios para la consolidación de una teoría general de conjuntos en Georg Cantor

MÓNICA APONTE
monica.aponte@correounivalle.edu.com
Universidad del Valle (Docente)

Resumen. En este trabajo se analizan algunos aspectos centrales de las dos obras principales de Cantor *los Fundamentos* y *las Contribuciones*, con el propósito de ilustrar cuales son desde un análisis histórico-epistemológico, los elementos necesarios para la consolidación de una Teoría general de Conjuntos. Es válido afirmar que fue Cantor el que revoluciono la historia y filosofía del pensamiento matemático con su gran invención de la teoría de conjuntos, especialmente en la introducción del infinito a las matemáticas dentro de la consolidación de los números transfinitos, en este sentido se puede hablar de un antes y un después en la historia de la matemáticas, pues atreverse a enumerar y contar lo infinito, represento para Cantor un gran paso arriesgado y polémico, especialmente por la vinculación y el proceso de aceptación del infinito actual.

Palabras clave: Infinito, teoría de conjuntos, axioma de elección, principio de buen orden, transfinitos.

1. Presentación del problema

Se debe resaltar, que dentro de los procesos de fundamentación matemática del infinito actual, fue Bolzano uno de los matemáticos que realizó grandes contribuciones a la conceptualización del infinito matemático, especialmente en su obra *Las Paradojas del Infinito,* la cual constituye la primera crítica directa a la concepción dominante del infinito potencial. La obra de Bolzano (1851) es la primera que se atreve a efectuar un tratamiento eminentemente matemático del infinito y donde es visto como el objeto central de un estudio, presentándose en este sentido un cambio de actitud frente a la tradición aristotélica del infinito.

En este sentido, Cantor se ve influenciado por la obra de Bolzano, afirmando que en esta "se encuentra una discusión correcta en muchos aspectos sobre el infinito impropio matemático" (Cantor 1883, p. 103). Aunque Cantor va más allá de las reflexiones de Bolzano, al tomar un conjunto infinito para especificar los conjuntos infinitos de puntos como un todo en un intervalo infinito, así el concepto de punto de acumulación se constituye en un soporte para la teoría de conjuntos Cantoriana. A partir de éste, Cantor definiría más adelante los conjuntos derivados; se puede decir, además, que el teorema de Bolzano-Weierstrass fue la clave para demostrar que $\mathbb{R}$ no es equipotente con $\mathbb{N}$. Con esto, Cantor se aleja de la creencia, que había perdurado durante más de veinte siglos, y que establecía la existencia de un sólo infinito inalcanzable y virtual, y en este sentido desarrolló una teoría acerca del tamaño de las colecciones infinitas y una aritmética infinita, que de alguna manera sirviera como una generalización de la aritmética ordinaria.

Así, la teoría de conjuntos de Cantor, como menciona Lavine, (1994), se generaliza de tal manera que incluye la totalidad de las matemáticas, volviéndose crucial para la filosofía de las matemáticas y las matemáticas. Además esta teoría se desarrolla a partir de la idea de que los conjuntos (las colecciones) pueden ser contados. De los estudios que realiza Cantor sobre las series trigonométricas en 1870, se evidencia un fuerte interés por los conjuntos arbitrarios de números reales, el estudio que realiza de las series trigonométricas lo conduce a esta progresión de "índices" transfinitos[1]: $0, 1,\ldots, \infty, \infty+1, \infty+2,\ldots, \infty.2,\ldots, \infty.3,\ldots, \infty^2,\ldots, \infty^3,\ldots, \infty^\infty,\ldots,\infty^{\infty^\infty},\ldots$

En este sentido los inicios de la teoría de conjuntos cantoriana, son un "intento" de desarrollar las consecuencias de la progresión en especial para los conjuntos de los números reales, así la teoría de conjuntos, es una teoría de las colecciones que pueden ser contadas utilizando los índices (los números ordinales finitos y transfinitos como él los llamo), vemos entonces que Cantor trata a sus colecciones infinitas como si fueran finitas.

2. La génesis de los fundamentos de la teoría de conjuntos

Cantor no era el único ni el primero en trabajar aspectos relacionados a los conjuntos. Se observa que en la década de 1870 y 1880 ya se tenían varios trabajos sobre álgebra, teoría de números y análisis, en los cuales se destacaron cuestiones conjuntistas, principalmente

[1] Estos índices son concebidos como números que cuentan las iteraciones de una operación, específicamente de la operación de conjunto derivado de Cantor. Podemos afirmar además que Cantor da sentido a los puntos suspensivos de la manera en la que tal vez nosotros lo hacemos: asimilando las progresiones infinitas representadas por ellos a las progresiones indefinidamente grandes.

los trabajos de R. Dedekind, H. Weber, G. Peano, Bois-Reymond, U. Din y J. Harnack; sin embargo los trabajos de Cantor tenían un sello particular, pues el matemático buscaba aclaraciones del infinito en acto, en aspectos filosóficos y matemáticos; en este sentido se cuestiona sobre la manera en que se constituye el universo de los conjuntos infinitos, evidenciándose así que el desarrollo histórico de la teoría de conjuntos estuvo fuertemente influenciada por el carácter y los intereses de quien más contribuyó a su desarrollo.

De acuerdo a los trabajos de Cantor, para el desarrollo de la teoría de conjuntos la obra clave fue los *Fundamentos*, en ella se estructura la teoría sobre la noción de infinito actual; esta incorporación del infinito actual le permitía a Cantor extender el concepto de número más allá de los niveles existentes. En la obra se encuentra una investigación matemático-filosófica sobre la teoría del infinito, resultando así una de las mayores invenciones de la imaginación matemática; parafraseando a Ferreirós (2006): los *Fundamentos* para Cantor, representan el momento de madurez y autonomía de la teoría de conjuntos transfinitos.

Cantor comienza estudiando los conjuntos de puntos, el de los números racionales y el de los reales, buscando diferencias relevantes entre ambos conjuntos, en relación de que los números reales son continuos y los racionales no. En 1874, en su artículo sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos, Cantor demuestra que los números racionales pueden ser puestos en correspondencia biunívoca uno a uno con los números naturales, mientras que no puede hacerse lo mismo con los números reales, estableciendo que el conjunto de los números racionales tiene el mismo tamaño que el de los naturales, sin embargo el conjunto de los números reales es mayor que el de los números racionales. En este sentido, se dice que la teoría de conjuntos transfinitos nació hace aproximadamente 140 años, el "acta de nacimiento" de la teoría de conjuntos transfinitos lleva la fecha del 7 de diciembre de 1873, con la demostración de la imposibilidad de la correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los números naturales.

En este sentido, Cantor empieza a enfrentarse a los primeros inconvenientes para hablar de una caracterización de los conjuntos infinitos, pues descubre, a partir de la no-enumerabilidad de $\mathbb{R}$, que hay distintos tipos de infinito, es decir no hay un único infinito. Además, la noción de infinito, lejos de lo que pensara la tradición aristotélica, deja de ser una idea vaga en virtud de los límites de la representación mental. Con este resultado de Cantor se abre paso a la formalización de la idea desde un punto de vista matemático; Cantor establece que hay diversos "tamaños" u "ordenes" del infinito, diferentes cardinalidades[2] que son además infinitas (Ferreirós, 1991, p. 212). La siguiente cuestión investigada era ver si es posible poner los puntos de un plano en correspondencia biunívoca con los puntos de una recta.

Dentro del desarrollo de la teoría cantoriana, se pueden señalar tres momentos claves sobre el perfeccionamiento de la misma, en un primer momento se centró en el estudio de las potencias infinitas, hasta formular la famosa hipótesis del continuo (H.C), posteriormente se dedica a una consolidación de la teoría de conjuntos derivados conectados éstos con la noción de potencia, básicamente como un puente o medio de estudio del continuo y sus subconjuntos, por esta vía desarrolla la idea de los números ordinales transfinitos desplazando su interés a una teoría de conjuntos bien ordenados.

Conjuntos derivados y cardinalidad

Durante el periodo de 1878 Cantor se centró en estudios sobre los procesos de derivación, estos estudios le permiten desarrollar la teoría topológica de conjuntos de puntos, de esta manera presenta a la comunidad matemática la idea de derivados de orden infinito, para caracterizar los conjuntos derivados, introduce "símbolos de infinitud"[3] que son el germen de los números ordinales transfinitos y define los conjuntos derivados de orden superior.

Los transfinitos de Cantor

Para Cantor incorporar los números transfinitos en la matemática era tan legítimo como fue la incorporación de los números irracionales, dado que ambos son definidos en función de conjuntos infinitos y por procedimientos similares, por lo tanto, ontológicamente, su estatus era el mismo.

Durante los años de 1879 a 1897, Cantor determina los elementos conceptuales que le permiten instaurar los cardinales y ordinales transfinitos. Apoyándose en el teorema de Bolzano-Weierstrass, clasifica los conjuntos infinitos de puntos en intervalos acotados, en este sentido el concepto de punto de acumulación constituye el soporte de la teoría de conjuntos, a partir de este concepto Cantor define los conjuntos derivados. Posteriormente Cantor define lo que son los conjuntos de primera especie, como aquellos conjuntos para

---

[2] En (Ferreirós, 2006, p. 13): Se dice que dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad, es decir son equipotentes, si y sólo si existe una aplicación f de A en B que es biyectiva (una correspondencia uno a uno entre los elementos de A y B).

[3] En el proceso de caracterización de los conjuntos derivados, tenían como base los conjuntos de puntos y sus propiedades, y los números transfinitos aparecían con merossímbolos, sin carácter objetivo, este es el motivo de que Cantor se refiriera a ellos con el nombre de "símbolos de infinitud". (Ferreirós, 1991, p. 245).

los cuales existe un n, talque $P^n = \emptyset$, y cuando se daba que $P^n \neq \emptyset$, los llamaba de segunda especie. La aparición de los números transfinitos, se da por primera vez, en un corto artículo de 1880, donde Cantor enunciaba el trasfondo de los números infinitos a partir de los conjuntos derivados de segunda especie.

Cantor, comprendió más adelante que la designación de los conjuntos a partir de P^∞ exigía la ampliación el universo de los números de contar más allá de los naturales. En las *Contribuciones* Cantor, definió los números transfinitos, y estableció que la introducción de estos nuevos números transfinitos, se realizara con respeto a las nuevas colecciones instauradas, conservándose la coherencia entre los nuevos números y los que se tenían anteriormente, así logra justificar la incorporación de los ordinales transfinitos.

En el *primer principio de generación* se da paso al número siguiente o sucesor, en este sentido se está garantizando que la existencia a través del proceso de creación de un sucesor es la misma que interviene en la producción de la serie de los números naturales, que otorga un sucesor (α+1) para todo α. Lo anterior recuerda la definición de Euclides del número como colección de unidades. El *segundo principio de generación* es un poco más complejo surge de una sucesión de números ordinales sin elemento mayor, en la cual se permite crear un nuevo número que será considerado como límite de aquellos números y será definido como el número inmediatamente mayor a todos aquellos.

Luego, al menos el proceso de formalización de los ordinales, mediante los dos "principios de generación" tiene cierta justificación en la mentalidad matemática clásica. Pero de esto, se desprende un proceso que parece interminable y en el cual parece que se corre el peligro de perderse en lo ilimitado. Cantor nos muestra que tomada una sucesión cualquiera que crece sin un máximo, se puede crear un número ordinal que será el siguiente de la sucesión. Él reconoce la fuerza de estos dos principios y más si se trabaja con ellos de manera combinada por lo cual se hace necesario tener un tercer principio llamado *principio de restricción*, que permite establecer, el conjunto de ordinales a los que Cantor llama clases numéricas, las cuales admiten definir cardinalidades sucesivas, por las limitaciones impuestas.

La noción de número Cardinal o Potencia

El *principio de restricción* nace a través del concepto de potencia. Para Cantor el concepto de potencia es la generalización del número de elementos de un conjunto, o número cardinal, en este sentido consideraba que a todo conjunto bien definido le corresponde una potencia determinada, el concepto de potencia fue quizás uno de los conceptos más importantes introducidos por Cantor dentro del proceso de caracterización de conjuntos infinitos, este concepto viene a solucionar el problema de comparar conjuntos con el mismo número de elementos. En la carta que envía el 5 de noviembre de 1882 a Dedekind, surge la necesidad del principio de limitación por medio del concepto de potencia, además trata de darle un tratamiento de números reales de segunda especie a los objetos ω, $\omega+1,\ldots$, porque con ellos se podía establecer una extensión de los números infinitos, a pesar de que estos números no cumplían con las propiedades de los números finitos. Es importante considerar que el hecho de que ω y $\omega+1$ sean dos números ordinales distintos pero con la misma cardinalidad, lo que conduce a una diferencia importante entre números finitos y transfinitos. En los finitos no hay diferencia entre su ordinal y su cardinal, en los infinitos sí.En este sentido, Cantor no solo probó que las potencias de las clases de números I y II son diferentes, sino que la potencia de los números de clase II es precisamente la que sigue a la potencia de los números de clase I. la demostración de que las potencias de (I) y (II) se siguen inmediatamente una a la otra, sin que exista ninguna otra potencia entre ellas, los números de la primera clase tenían la potencia de $\mathbb{N}$ ($\aleph_0$) y los de la segunda la de $\aleph_1$, y sucesivamente, en este sentido, los esfuerzos de Cantor se centran en establecer cuál es la hipótesis del continuo, supone que la hipótesis del continuo era equivalente a la de la segunda clase (sin embargo esto no lo logró demostrar). De esta manera, el tercer principio instaura el enlace entre ordinales transfinitos y cardinales: del mismo modo que el cardinal de $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$, es decir, por él se establecen conjuntos ordinales a los que Cantor llama clases numéricas, los cuales permiten definir una serie de cardinalidades sucesivas. Esto se realiza mediante la condición de cardinalidad.

Conjunto bien ordenado

Antes de caracterizar los conjuntos bien ordenados, Cantor realiza estudios sobre los tipos de orden de los conjuntos simplemente ordenados, en este sentido en las *Contribuciones* denomina a un conjunto M *"simplemente ordenado"* cuando entre sus elementos *m* se rige un determinado orden jerárquico, en el cual de cada dos elementos m_1 y m_2, toma uno el rango inferior y el otro el rango superior. En este sentido podemos ver, que la noción actual de conjunto totalmente, o linealmente ordenado como un conjunto M dotado de una relación binaria $\leq$ reflexiva, antisimétrica, transitiva y conexa (para cada $x, y \in M, x \leq y$ o $y \leq x$) es equivalente a la de Cantor.

Uno de los hechos cruciales y determinantes para la teoría de Cantor, era que todo conjunto pudiera ser bien ordenado, como resaltaba en los *Fundamentos*, de sus grandes logros se tiene que los ordinales transfinitos daban lugar a la noción de número ordinal de elementos de una variedad finita bien ordenada, de esta manera el concepto de conjunto bien ordenado aparece como fundamental para toda la teoría de conjuntos , en este sentido el matemático se propone justificar verdaderamente la introducción de los ordinales transfinitos como verdaderos números.

De esta manera se tiene, que un conjunto bien ordenado según el trabajo de Cantor de1883, es un conjunto bien definido en el que los elementos están relacionados entre sí mediante una sucesión determinada dada, tal que (i) hay un primerelemento del conjunto; (ii) cualquier elemento singular (a condición de que no sea elúltimo de la sucesión) es seguido por otro elemento determinado; y (iii) para cualquierconjunto de elementos finito o infinito deseado existe un elemento determinadoque es su sucesor inmediato en la sucesión (salvo que no exista absolutamente nadaen la sucesión que los siga a todos ellos).

Ahora bien, Cantor nos presenta otro nuevo concepto el de *enumeración*[4], cuando nos manifiesta que dos conjuntos "bien ordenados" tiene la misma *enumeración* (con respecto a las sucesiones dadas) cuando es posible una coordinación biunívoca entre dos elementos cualesquiera de un conjunto y los correspondientes elementos de otro conjunto, en ese sentido se deduce que los dos conjuntos bien ordenados son del mismo tipo, entiéndase del mismo tipo (o del mismo número) a aquellos conjuntos bien ordenados que permiten relacionar entre sí sus elementos biunívocamente, se entiende por número el signo o la noción para un tipo determinado de conjunto bien ordenado.

A partir de esa caracterización, muestra que para los conjuntos infinitos existe una cierta conexión entre la potencia del conjunto y la enumeración de sus elementos determinada por la sucesión dada, es decir que cada potencia está coordinada con un número, en este sentido la teoría de las potencias por parte de Cantor se basa fuertemente en su teoría de los números ordinales. Sin embargo no se debe obviar que estos resultados están conectados con la hipótesis del continuo, aunque como se mencionó anteriormente este problema quedo sin resolver, convirtiéndose quizás el teorema del buen orden en una "laguna de la teoría cantoriana" como expresa (Ferreirós, 2006), se puede notar además que esta "laguna" queda solucionada más adelante con los trabajos de Zermelo donde el teorema de buen orden se basa en el axioma de elección.

3. Consideraciones Finales

De acuerdo al análisis presentado a lo largo de este escrito, podemos inferir que se nos hace natural reconocer y afirmar que las matemáticas actuales implican el infinito, nuestras matemáticas tienen un fuerte compromiso con la existencia de objetos infinitos,

---

[4] Tomado de la definición que presenta Cantor en el libro 2 de los *Fundamentos*, traducción de (Ferreirós, 2006, p.88).

actualmente se demuestran teoremas donde se afirma la existencia de objetos infinitos, se estudian y enseñan propiedades acerca de objetos infinitos, en este sentido es pertinente indagar la manera como se realizan estos acercamientos a los objetos infinitos, en especial como se contempla desde la teoría de conjuntos cantoriana.

Tenemos además como elementos relevantes ciertos compromisos que conciernen al infinito: existen colecciones combinatorias actualmente infinitas, esencialmente existe algún conjunto que servirá como los números naturales y existe algún conjunto que servirá como potencia de este, el cual nos da los números reales. Todos tienen conjunto potencia, en ese sentido se tiene al menos cierto conocimiento autoevidente aparentemente inmediato y claro a cerca de las propiedades de las colecciones combinatorias actualmente infinitas, lo más sorprendente es que estas obedecen al axioma de elección y de remplazó.

Referencias bibliográficas

- BOLZANO, B. (1851). *Las paradojas del infinito*. Traducción del alemán de Luis Felipe Segura. Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1991.
- CANTOR, G. *Beiträgezur Begründung der transfiniten Mengenlehre.*Mathematische Annalen 46 (1895) pp. 481-512, 49 (1897), pp. 207-246.
- DAUBEN, J. (1990): *His mathematics and philosophy of the infinite.*Princeton University press.
- FERREIROS, J. (1991): *El nacimiento de la teoría de Conjuntos, 1854-1908*. En: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.
- FERREIROS, J. (2006): *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. Escritos y correspondencia selecta. Traducción comentada e introducción de José Ferreirós. En: Editorial Crítica, Barcelona.
- LAVINE S, (1994). *Understanding the infinite*. Harvard University press, Cambridge, Massachusetts, London, England.
- ORTIZ, J. (1994). *El Concepto de Infinito*. En: Publicación de la Asociación Matemática Venezolana, Boletín No 2, Vol. I.
- RECALDE, L. (2005). *Notas del curso de historia de las matemáticas*. Universidad del Valle, Cali-Colombia.