De la descripción de figuras geométricas a la formulación y evaluación de definiciones

CLAUDIA VARGAS
claudiavargas90@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional (Estudiante)

JORGE BETANCUR
jorgebetancur@gmail.con
Universidad Pedagógica Nacional (Estudiante)

CARMEN SAMPER
carmensamper@gmail.con
Universidad Pedagógica Nacional (Profesora)

Resumen. Se analizan las actuaciones de un grupo de estudiantes de décimo grado de educación secundaria, cuando construyen definiciones en torno a una figura geométrica, así como los argumentos que utilizan para validar o refutar una posible definición. El análisis se realiza a partir de la construcción de unas categorías que toman como referentes teóricos el modelo de comportamiento racional de Habermas y el modelo de Toulmin para la argumentación.

Palabras clave: Definir, argumentar, comportamiento racional.

1. Presentación del problema

El trabajo que se realiza en las clases de geometría generalmente no favorece el paso del mundo empírico al mundo teórico (Hoyles & Jones, 1998). Consideramos que una de las causas es el tipo de actividades que usualmente se realizan en la clase. Por ejemplo, no se favorece que los estudiantes se involucren en la construcción y evaluación de definiciones, tareas que requieren la identificación de propiedades suficientes y necesarias a través de acciones empíricas, como medir, visualizar y comparar, para así establecer la definición teórica, y la capacidad de argumentar desde una teoría los resultados.

La problemática presentada se convirtió en el centro de nuestra investigación, el cual es determinar si en un ambiente que favorece las actividades descritas anteriormente, se propicia el paso hacia el mundo teórico. Para responder esta inquietud, encontramos necesario analizar las actuaciones de los estudiantes cuando realizan este tipo de tareas y los argumentos que construyen, para lo cual se decidió utilizar el modelo de Habermas del comportamiento racional y el modelo de Toulmin para la estructura de un argumento de acuerdo a la propuesta de Boero, Douek, Morselli, & Pedemonte (2010).

2. Marco de referencia conceptual

La definición en geometría

Una definición en geometría puede entenderse como un enunciado que contiene las propiedades necesarias y suficientes para que una figura o relación pueda ser etiquetada por una expresión o una palabra (Herbst, González, & Macke, 2005). Las definiciones predeterminan al concepto dentro de un sistema teórico de una manera no circular y consistente (Calvo, 2001). Para definir en geometría es necesario establecer las diferencias de un objeto con otros objetos similares, pues una definición agrupa a las figuras que cumplen con un conjunto específico de propiedades (Herbst et al., 2005).

Al considerar el papel de las definiciones en matemáticas, Vinner (1991) evidencia las siguientes posturas de autores de libros de texto e incluso de profesores en el aula de clase: 1) los estudiantes usarán las definiciones para resolver problemas y demostrar teoremas cuando sea necesario; 2) las definiciones deben ser mínimas y económicas, es decir, contener solo las propiedades suficientes y necesarias para definir el objeto; y 3) las definiciones son arbitrarias, pues se escogen de acuerdo a sus fines.

Modelo de comportamiento racional de Habermas

El modelo de Habermas (Boero et al., 2010) distingue tres componentes interrelacionados del comportamiento racional: el *epistémico*, que consiste en el control de la validez de proposiciones y la manera de relacionarlas, de acuerdo a una teoría y la formas válidas de razonamiento; el *teleológico*, que hace referencia a la formulación de un plan y la elección consciente de las herramientas con el fin de lograr el objetivo planteado, la determinación de las estrategias que pueden contribuir a su ejecución y la culminación de la meta propuesta; y el *comunicativo*, que consiste en la elección adecuada de términos para comunicar ideas, o el acuerdo o desacuerdo de resultados.

Modelo de Toulmin para la argumentación

Los principales componentes de un argumento según Toulmin son los *datos,* las *garantías* y la *aserción*. Los *datos* son los que llevan a la *aserción*, siempre y cuando exista una *garantía* o principio que permita realizar inferencias que relacionen los datos con la aserción (Boero et al., 2010). El argumento es inductivo si a partir de varios *datos* particulares que conllevan a un mismo resultado (*aserción*) se establece una garantía que relacione los datos con la aserción; es deductivo cuando a partir de los *datos* y de la garantía se obtiene la *aserción* y abductivo cuando teniendo certeza de la *aserción* se evalúan posibles garantías que permitan para establecer los *datos* adecuados para justificar la aserción (Perry, Samper, Camargo, & Molina, 2012).

3. Metodología

Nuestra hipótesis de investigación es que el uso de un software de geometría dinámica contribuye a que los estudiantes propongan y evalúen a través de argumentos definiciones de figuras geométricas. Para validar nuestra hipótesis, se llevó a cabo un experimento de enseñanza. Se diseñaron actividades que se implementaron durante siete sesiones de clase con un grupo de siete estudiantes de grado décimo. En las primeras seis sesiones, las actividades tenían como propósito que los estudiantes analizaran sus definiciones de figuras que ya conocían (triángulo isósceles y cuadrado), para determinaran si estas cumplían con los criterios establecidos para una definición en geometría, y en caso contrario, propusieran las modificaciones necesarias. La última sesión, que fue grabada en audio y video, buscaba que los estudiantes construyeran la definición de una figura geométrica para ellos desconocida (cometa). Es la transcripción de esta última sesión, la que provee los datos para el análisis.

4. Análisis de datos

Para evaluar las actuaciones de los estudiantes se conformaron unas categorías de análisis, algunas de ellas basadas en el marco teórico de referencia y otras emergentes (Tabla 1).

Tabla 1. *Categorías de análisis*

Argumentación	
Estructura	Deductivo dinámico Visual: Los datos se determinan a partir de lo que perceptualmente parece cierto al arrastrar una figura geométrica. No visual: Las datos observados al realizar el arrastre de una figura son comprobados por medio de las herramientas del software.
	Deductivo Teórico
	Abductivo dinámico
	Abductivo teórico
	Inductivo
Finalidad en relación con la definición	Argumentos para criticar una definición
	Argumentos para proponer una definición
	Argumentación por medio de contraejemplos
	Argumentos a favor o en contra de la inclusión de una condición como una propiedad de la figura
	Argumentos para decidir si la propiedad es parte de la definición
Comportamiento racional	
Aspecto epistémico	
Aspecto teleológico	
Aspecto comunicativo	

A continuación, se muestra un ejemplo del análisis realizado, que corresponde a la primera reacción de los estudiantes cuando ven en la pantalla del computador la representación de una cometa, cuadrilátero con dos pares de lados adyacentes congruentes y ningún par de lados opuestos congruentes. Tanto Noé como Saúl mencionan que la figura (Figura 1) podría ser un rombo después de haber realizado una exploración usando el arrastre.

27 Noé: ¿Es que sabe qué es lo que no me convence?

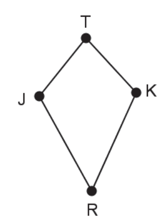

Figura 1

28 Saúl: Que para que sea un rombo tendría que ser esto [señala el $\underline{JT}$] igual a esto [señala el $\underline{JR}$].

29 Noé: Si, porque si… vea… ¿Se acuerda lo del cuadrado? Cuando un cuadrado se estira forma un rombo. Lo cual no hace esto [señala la pantalla] porque estos dos lados [señala al $\underline{JT}$ y al $\underline{KT}$] no son iguales a estos dos lados [señala al $\underline{RJ}$ y al $\underline{RK}$]. El lado JR y KR no es igual a JT… Espere, espere, espere…
[…]

45 Noé: De todos modos la figura se mantiene. O sea, eso es lo importante. Pero es que si fuera un rombo [arrastra el punto K] tendría que ser como un cuadrado estirado [arrastra el punto R]… Y es que acá [señala la figura] no se forma como un cuadrado. ¿Ve?

Un análisis de la reacción inicial de Saúl y Noé permite inferir que su imagen conceptual de rombo está asociada a la forma de esta figura. Por ello, deciden realizar el arrastre (aspecto teleológico) para determinar si su anticipación es válida. Esta acción les permite darse cuenta de que la imagen no corresponde a un rombo. El grupo ha descubierto dos propiedades que son importantes para definir la figura: tiene dos lados adyacentes congruentes y dos lados adyacentes no congruentes [28 y 29]. Por otra parte, en la intervención de Saúl [28] se evidencia que su definición de rombo está asociada a un cuadrilátero con lados de igual medida, mientras que para Noé [29 y 45] su definición personal de rombo es un "cuadrado que se estira" [29]. Estas definiciones personales son la garantía de un argumento construido colectivamente cuyos datos son la no congruencia de dos pares de lados [28 y 29] y cuya aserción es que la figura no es un rombo. El hecho de argumentar para defender su idea, a partir de sus propias definiciones es evidencia del aspecto epistémico. El argumento de Saúl es deductivo dinámico visual, mientras que el de Noé es abductivo dinámico. Los argumentos de ambos tienen como finalidad criticar la definición personal.

5. Conclusiones

Con el análisis que se ha realizado hasta el momento, se puede evidenciar que el uso de la geometría dinámica permite la incursión de los estudiantes al mundo teórico, como lo demuestran los argumentos del ejemplo anterior. El desarrollo de las actividades proveyó dos cosas. La primera, que los estudiantes se apersonaran de la norma de defender sus ideas y rechazar otras a partir de argumentos teóricos. La segunda, adquirir la habilidad de interpretar y expresar la información suministrada por el software de manera matemática. El uso de la geometría dinámica permitió generar un ambiente que favoreció una participación genuina de los estudiantes en las actividades.

Referencias bibliográficas

- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. F. F. Pinto & y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179–205). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Herbst, P., González, G., & Macke, M. (2005). How Can Geometry Students Understand What It Means to Define in Mathematics ? *The Mathematics Educator*, *15*(2), 17–24.
- Hoyles, C., & Jones, K. (1998). Proof in Dynamic Geometry Contexts. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 121–128). Dordrecht: Kluwer.
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L., & Molina, Ó. (2012). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. In *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learnig of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–80). Dordrecht: Kluwer Academic Press.