

Un acercamiento a la probabilidad condicional a través de simulación computacional

GABRIEL YÁÑEZ CANAL

gyanez@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander (Profesor)

JULY KARINA CELIS BELTRÁN

karinitacelis@yahoo.es

Universidad Industrial de Santander (Estudiante)

Resumen. Los avances en la tecnología y la búsqueda de nuevas estrategias para la enseñanza y el aprendizaje en Educación Matemática, han generado una transformación, que llega también e involucra a la estadística y la probabilidad. En este sentido el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación contribuye a la generación de nuevas estrategias en el proceso de enseñanza y aprendizaje, permitiendo ampliar experiencias, conocimientos y habilidades en los individuos. Teniendo en cuenta esto, presentamos en este artículo algunas reflexiones acerca del efecto que podría tener una enseñanza basada en la simulación computacional en la comprensión de la probabilidad condicional así como en la superación de algunas concepciones erradas asociadas a este concepto.

Palabras clave: probabilidad condicional, teorema de Bayes, concepciones, sesgos, simulación computacional.

1. Presentación del problema

La probabilidad condicional da cuenta del efecto que tiene la realización de un evento condicionante en la probabilidad de un evento condicionado. Su enseñanza y aprendizaje tradicionalmente se realiza adoptando casi que exclusivamente la expresión algebraica:

Esta expresión, sencilla algebraicamente, da lugar en la práctica a muchas dificultades cuando se requiere su uso para resolver problemas. Las investigaciones en este campo reportan las dificultades y las malas concepciones que los estudiantes se forman alrededor de este concepto (Contreras, 2009), pero con ausencia de las razones para ellas. Tal vez, una de las causas más influyentes sea la adopción de la medida de probabilidad desde el

punto de vista clásico o laplaciano sin ninguna referencia a su interpretación frecuencial enfatizando excesivamente en la representación algebraica.

Si bien es cierto que desde hace un tiempo se ha generado entre la comunidad de estudiosos de la estadística educativa el interés por estudiar los efectos que podría tener el enfoque frecuencial de la probabilidad en la comprensión del concepto de probabilidad y de su modelación para resolver problemas prácticos (Serrano, 1996), también es cierto que en lo referente a la probabilidad condicional las investigaciones ya no son tan numerosas (Yáñez, 2003), razón por la cual vale la pena preguntarse hasta qué tanto sería benéfica para generar en los estudiantes una mejor comprensión y competencia para resolver problemas que se modelen con probabilidad condicional.

Presentamos en este trabajo algunas reflexiones acerca de las bondades que a priori se pueden suponer posee el enfoque de simulación computacional en la comprensión de la probabilidad condicional.

2. Reflexiones acerca de la simulación computacional

La simulación permite al estudiante explorar y descubrir conceptos o principios que de otro modo se construirían de manera abstracta, y con una visión de cercanía a la realidad que debería redundar en una mayor comprensión conceptual y mayor capacidad para resolver problemas, en particular, problemas no rutinarios. De otro lado, el ejercicio mismo de la simulación que implica la búsqueda de un modelo de urna isomorfo al problema propuesto, se constituye en un ejercicio de abstracción muy propio del pensamiento matemático. El enfoque frecuencial de la probabilidad, además de conceder un significado práctico a la medida de la probabilidad, acerca desde un comienzo la conceptualización probabilística con la estadística ya que con este enfoque no se obtienen probabilidades exactas sino solo estimaciones.

Para ejemplificar el trabajo de simulación y visualizar las posibles ventajas que podría tener su implementación en el trabajo de clase asociado con la probabilidad condicional, se plantea la siguiente situación tomada de Falk (1979):

Una urna tiene en su interior dos bolas blancas y dos bolas negras. Se extraen dos bolas sin reemplazar la primera.

1. *¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea blanca, dado que la primera bola fue blanca?*

2. *¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea blanca, dado que la segunda fue blanca?*

En notación matemática la primera pregunta pide calcular la probabilidad condicional $P(B_1|B_2)$, en tanto que en la segunda se indaga por la condicional inversa: $P(B_2|B_1)$. La solución a la primera pregunta es bien intuitiva pues habiendo sacado ya una bola blanca y teniendo en cuenta que no se sustituye, en la urna quedarán tres bolas, dos negras y una blanca, por lo tanto $P(B_1|B_2) = \frac{1}{3}$.

La segunda pregunta, en cambio, es mucho más exigente, su solución desde el punto de vista algebraico requiere de la regla de Bayes, que no es para nada fácil de comprender, no solo por su complejidad algebraica sino porque se opone a la concepción temporal de la probabilidad condicional que muchas personas asumen: la segunda extracción no puede condicionar al evento que sucede previamente: la primera extracción (Falk, 1986; Gras y Totohasina, 1995). Esta concepción lleva a las personas a asignar a esta probabilidad el valor $\frac{1}{2}$.

La solución algebraica es la siguiente:

Ahora veamos cómo se resuelve el mismo problema utilizando simulación. Utilizamos el paquete Fathom. Para ello basta definir los atributos que hacen referencia a las dos extracciones,

Esta programación da lugar a una tabla de resultados como la que se muestra en la Figura 1.

Para estimar $P(B_1|B_2)$ lo que hay que tener claro es que en el enfoque frecuencial la probabilidad se aproxima por las frecuencias relativas asociadas a la realización del evento que se está estudiando. En este caso se trata de contar las veces que se obtiene blanca en la segunda extracción (B2) cuando en la primera se obtuvo blanca (B1), es decir, se trata de

contar las veces en que estas dos cosas se dan conjuntamente y calcular las frecuencias relativas respecto al número de veces que sucede el evento condicionante.

Ahora bien, lo que es más interesante es que para estimar el razonamiento es exactamente el mismo: el numerador es el mismo de la primera pregunta, y como ahora el condicionante es extraer blanca en la segunda (B2), el denominador es el número de veces que se obtuvo blanca en la segunda extracción. En esencia, desde el punto de vista frecuencial, los dos procedimientos son completamente semejantes, cosa muy distinta en el plano algebraico que exige la utilización del teorema de Bayes para resolver la segunda pregunta. Adicionalmente, obsérvese que este enfoque permite darse cuenta que el asunto del antes o después, asociado a la concepción temporal, no tiene sustento porque la probabilidad condicional es una frecuencia relativa asociada a las repeticiones favorables a los dos eventos en cuestión sin consideraciones temporales.

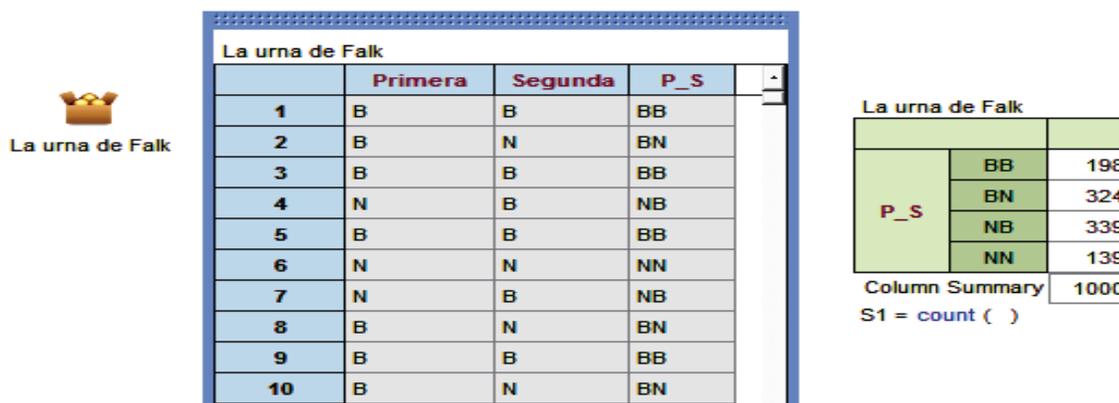


Figura 1. Pantalla de visualización problema de la Urna en Fathom.

3. Conclusiones

La simulación como estrategia de enseñanza de la probabilidad condicional goza, entre otras, de las siguientes propiedades:

- Vivencia paso a paso del experimento lo que permite identificar la condicionalidad y, por consiguiente, la independencia o no entre eventos. La definición de la condicionalidad a través del comando *if* puede permitir con mayor claridad la identificación de los eventos condicionante y condicionado
- Al tener los dos atributos, asociados a la primera y segunda extracción, con los valores de las diferentes opciones posibles, además de varios resultados producto de repeticiones del experimento, muy seguramente ayudará a combatir *el sesgo en el*

resultado aislado de Konold (1991) en que el individuo se interesa por un resultado específico, sin acabar de comprender que la probabilidad solo se refleja en los resultados de muchas repeticiones del experimento (ley de los grandes números).

- De otro lado, se observa que la simulación identifica claramente que se trata de un problema de dos dimensiones y que, por consiguiente, las probabilidades conjuntas, mejor dicho, las frecuencias relativas conjuntas, se constituyen en la primera prelación. Con el espacio muestral bivariado construido no hay lugar para pensar que un evento sucede antes o después y que lo único importante a la hora de calcular probabilidades condicionales es conocer quién juega el papel de evento condicionante y quién de condicionado. Precisamente, en los experimentos diacrónicos, que es donde se presenta la concepción temporal, son los que más fácilmente permiten identificar estos eventos.

Referencias bibliográficas

- Contreras, J. (2009). Recursos en internet para la enseñanza de la probabilidad condicionada. Universidad de Granada Departamento de Didáctica de la Matemática, España. Recuperado mayo 03 de 2.013 de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/tesis/Trabajocontreras.pdf>.
- Falk, R. (1979). Revision of Probabilities and the Time Axis. Proceedings of the third international conference for the psychology of mathematics education 64-66, Warwick, England.
- Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: Insights and Difficulties. Proceedings Second International Conference on the Teaching of Statistics, 992-997. University of Victoria, Quebec, Canadá.
- Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 15, N° 1, 49-55.
- Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs about Probability. En E. Von Glasersfeld (ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, 139-156.
- Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
- Yáñez, G. (2003). Estudios sobre el papel de la simulación computacional en la comprensión de las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional. Tesis doctoral no publicada. Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.