Pruebas Pre-Formales de teoremas del Cálculo Diferencial para estudiantes de primer semestre de ingeniería

ÁLVARO ESPINOSA PÉREZ
alespinosape1@gmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

ELIAS LARA TINOCO
eliaslaratinoco@hotmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

ERIC HERNÁNDEZ SASTOQUE
ehernandezs@unimagdalena.edu.co
Universidad del Magdalena (Profesor)/Universidad de Antioquia (Estudiante)

Resumen. En esta comunicación breve se presentan algunos avances de los resultados de una investigación sobre la Negociación de Significados de la Demostración por profesores de Cálculo de una universidad colombiana. Estos avances se refieren a las presentaciones de demostraciones dadas por los profesores participantes de la investigación. Una de esas presentaciones de demostraciones es una prueba pre-formal de un teorema en el Cálculo Diferencial. La metodología de este estudio es cualitativa, bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico.

Palabras clave: Demostración, pruebas pre-formales, cálculo diferencial, negociación de significados.

1. Presentación del problema

Uno de los aspectos relevantes de la educación matemática consiste en que los estudiantes aprendan a demostrar o al menos ver la necesidad de ello (Alsina, 2003). La demostración es sin duda, un proceso valioso para la validación de saberes matemáticos. Sin embargo, no se debe reducir el papel de la demostración en el aula de clase al proceso de verificación de veracidad de una proposición.

Para Balacheff (2000), la demostración no solo sirve como un método de validación, sino también para comunicar ideas. Este autor plantea la demostración como una herramienta esencial de prueba, que conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez.

Sin embargo, Dreyfus (1999), considera que una las razones por las cuales la demostración no se lleva al aula de clase es que los estudiantes tienen dificultad para comprenderlas, e incluso las que aparecen en libros de texto. Para programas de ingeniería, en ocasiones no se presentan demostraciones en el aula de clases porque puede tardar mucho tiempo para ser explicada (Van Asch, 1993). En este sentido, es posible que algunos docentes de Cálculo Diferencial en programas de ingeniería, dejen a un lado la demostración de teoremas, o bien, las promuevan bajo ciertas condiciones especiales. Estas decisiones sobre la demostración en el aula, dependen de la experiencia y concepciones que tengan los profesores sobre la importancia de la demostración para el aprendizaje y aplicación de las matemáticas en la ingeniería.

Por lo tanto, para esta investigación es importante conocer las negociaciones de los significados de la demostración por profesores de Cálculo Diferencial para programas de ingeniería.

2. Marco de referencia conceptual

Varios son los autores que proponen una clasificación de la demostración, de acuerdo al rigor o a su grado de abstracción (Balacheff, 1988; Gutiérrez, 2001; Harel & Sowder, 1998; Van Asch, 1993). La presentación de categorías o niveles de la demostración juegan un papel importante en la negoción de significados de la demostración para programas de ingeniería.

Balacheff (1988), plantea las demostraciones *pragmáticas*, asociadas a manipulaciones o a ejemplos concretos, y demostraciones *conceptuales,* fundamentadas en propiedades abstractas y de relaciones deductivas entre ellas. Van Asch (1993), da especial relevancia a las pruebas pre-formales, que las concibe como unas pruebas que contienen la idea esencial de la demostración y pueden fácilmente llegar a ser formalizadas a una demostración.

Con relación a la enseñanza de la demostración, para Dos Santos y Ortega (2013), algunos profesores asumen la demostración como una competencia esencial para enseñar y saber matemáticas, hay otros que opinan de manera contraria y algunos que no saben qué decir sobre eso. D´Andrea (2010), propone un modelo didáctico para la presentación de un teorema a demostrar en el ámbito áulico. Este modelo consiste de una serie de estrategias didácticas mostradas como una secuencia de tareas. Leron (1983), por ejemplo, propone el *método estructural* para las clases, que consiste en presentar pruebas como alternativa al método tradicional, aconsejando que cualquier demostración debe estar bien preparada y precedida de un esclarecimiento general.

3. Metodología

Para la realización de este estudio, se cuenta con un paradigma cualitativo (Creswell, 2010; Denzin & Lincoln, 2012) y bajo el enfoque fenomenológico-hermenéutico (Guba & Lincoln, 1994; Sánchez, 1998). A través de un programa de formación continua, concebido bajo el enfoque de la teoría de la práctica social de Wenger (2001), se estudia la negociación de significados de la demostración por profesores de cálculo diferencial.

Las interacciones dialógicas de los profesores, los modos de participación, las dinámicas de negociación de significados entre otras, son grabadas y los registros de audio y video son acompañados con sus respectivas transcripciones, y de un proceso de codificación abierta bajo un diseño emergente de categorías. Para el análisis de la información, se tuvieron en cuenta algunos indicadores de negociación como son la confusión, el conflicto, la participación, y la materialización.

4. Resultados preliminares

Una de las discusiones del proceso de negociación, se centró en la dificultad que tiene los estudiantes en la realización de las demostraciones de teoremas en el Cálculo Diferencial. De igual forma se planteó la necesidad que tienen los profesores de buscar formas adecuadas que le faciliten al estudiante la comprensión y el aprendizaje dichas demostraciones. Algunos profesores manifestaron su interés en las pruebas pre-formales (Van Asch, 1993). Para ellos, la prueba pre-formal, aunque guarda estrecha relación con la prueba formal se ajusta al nivel de los saberes de los estudiantes, y facilita su comprensión. Un ejemplo de pruebas pre-formales realizadas por los profesores es la siguiente:

Teorema: Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c

a. Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo
b. Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo

c. Si $f''(c) = 0$ el criterio no decide.

Prueba Pre-Formal:

Sea $f(x) = x^2 - 2$ una función definida en [-1, 1]. Si $f'(x) = 2x$ *y* $x = c = 0$, entonces $f'(c) = f'(0) = 0$, además $f''(x) = 2 > 0$.

Como $f''(c) = 2 > 0$, es positiva, entonces:

$$f''(x) = \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Luego existe un intervalo I = (-1. 1) tal que:

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \frac{f'(x)}{x-c} = \frac{2x}{x-c} = \frac{2x}{x} = 2 > 0 \quad x \ \bar{}c \ \ \mathrm{I}$$

Ahora:

a) *Si* $x < c$ ® $x < 0$, *entonces* $f'(x) = 2x < 0$ (negativa)

b) *Si* $x > c$ ® $x > 0$, *entonces* $f'(x) = 2x > 0$ (positiva)

Como $f'(x) = 2x$ cambia de signo en c = 0, y el criterio de la primera derivada implica que $f(c) = f(0) = -2$, *el punto* $(0, -2)$ es un mínimo relativo para la función.

Conclusiones

Se reconoce la importancia de encontrar nuevas formas para la enseñanza y comprensión de la demostración de teoremas en cursos de Cálculo Diferencial. La implementación de las pruebas pre-formales en la demostración de teoremas para estudiantes de ingeniería facilitaría la comprensión, no demandando mucho tiempo en su realización.

Sigue siendo tema de discusión la demostración de teoremas en las clases de cálculo diferencial y su conveniencia para la formación matemática de los estudiantes de ingeniería.

Referencias bibliográficas

- Alsina C., (2003) C. D. Q. Como quisiera demostrar, Epsilon 57. España, 345-356
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (ed.) Mathematics, Teachers and Children, (pp. 316-230), London: Hodder and Stoughton
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (P. Gómez, Trans.). Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto* (M.
- D´Andrea, R.E. (2010). Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa.* (Vol. I): gedisa editorial.
- Dos Santos y Ortega (2013). Perfiles del profesorado sobre la enseñanza y uso de la demostración. AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, Nº 4, 27 – 45.
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona. Graó, S.R.L. pp.125– 133)
- Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105–117). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la Investigación Educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador. Santa Fe de Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Van Asch, A. G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 301–313. doi: 10.1080/0020739930240214
- Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad (G. Sánchez, Trans.). Barcelona: Paidós.