Pruebas de teoremas del cálculo diferencial para programas de ingeniería

ERIC HERNÁNDEZ SASTOQUE
ehernandezs@unimagdalena.edu.co
Universidad del Magdalena (Profesor) - Universidad de Antioquia (Estudiante)

JESÚS TINOCO DEL VALLE
jestinoco@hotmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

ADA RADA GUETE
adaragu@hotmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

JORGE LARA OROZCO
matematicalara@yahoo.es
Universidad del Magdalena (Profesor)

Resumen. En este artículo presentamos algunos avances de los resultados de una investigación en curso sobre la Negociación de Significados de la Demostración por profesores de Cálculo. El objetivo de la investigación es analizar la negociación de significados de la demostración de profesores de cálculo diferencial en un trabajo colaborativo. La metodología es cualitativa bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico. El escenario de investigación es un Programa de Formación Continua dirigida a profesores de cálculo para programas de ingeniería. Presentamos algunos ejemplos de pruebas pre-formales y de la utilización del software GeoGebra para explicaciones de teoremas, elaborados por los profesores participantes de la investigación.

Palabras clave: Demostración, pruebas pre-formales, GeoGebra, cálculo diferencial.

1. Presentación del problema

La mayoría de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han llevado a cabo en el área de la geometría (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013). Para el caso del Cálculo se han tratado aspectos importantes de la demostración, sin embargo, poco explican los posibles significados de la demostración que puedan tener los profesores en esta área de las matemáticas (Calvo, 2001; González, 2012; Klisinska, 2009).

Es posible que algunos profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería prefieran omitir la demostración de teoremas o decidan promoverla bajo determinadas condiciones. Entre las razones para omitir la demostración en el primer año de universidad para programas de ingeniería, está el hecho de que la demostración de un teorema puede tardar mucho tiempo, o que la demostración es demasiado 'dura' (Van Asch, 1993).

Por lo general, cada profesor de forma individual y de acuerdo con su experiencia y concepciones sobre la demostración y otros aspectos como las matemáticas, la enseñanza, la formación matemática de un ingeniero, etc., toma decisiones aisladas sobre la demostración en las clases. Por lo tanto, esta investigación analiza cómo profesores universitarios negocian asuntos concernientes a la demostración en el área del cálculo diferencial para programas de ingeniería.

2. Marco de referencia conceptual

Con respecto a las aproximaciones conceptuales de la demostración nos interesa algunas perspectivas que la consideran no sólo como un producto sino como un proceso (Arsac, 2007; Camargo, 2010), o como una práctica social validada por una comunidad (Crespo, Farfán, & Lezama, 2010; Godino & Recio, 2001; Moreno, 1996). Entre las representaciones de la demostración tenemos las diferentes expresiones que ésta toma de acuerdo al criterio de rigor, o grado de abstracción. Algunas de estas representaciones son: *explicación, prueba*, y *demostración* (Balacheff, 2000); y *prueba con dibujos o ejemplos, pruebas pre-formales,* y *prueba formal* (Van Asch, 1993).

Las funciones de la demostración tomadas de referencia son: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación, desafío intelectual, y transferencia (Bell, 1976; De Villiers, 1993; Hanna, 2000; Hemmi, 2006). Para este estudio, la teoría que orienta la comprensión del proceso de negociación de significados es la teoría de la práctica social (Wenger, 2001).

3. Metodología

El estudio coincide con un paradigma cualitativo (Creswell, 2010; Denzin & Lincoln, 2012), y se gesta bajo el enfoque fenomenológico-hermenéutico (Guba & Lincoln, 1994; Sánchez, 1998). El escenario de investigación es un Programa de Formación Continua sobre la demostración en el cálculo diferencial. Este programa está diseñado como un espacio para la interacción entre profesores bajo elementos de la teoría de la práctica social de Wenger (2001). Los participantes son profesores de una facultad de ingeniería de una universidad colombiana.

La principal fuente de información son los encuentros de los profesores en el Programa de Formación Continua, los cuales son grabados por medio de una videograbadora. Estos registros muestran la interacción dialógica de los profesores, los modos de participación, las dinámicas de negociación de significados, etc. Para el análisis de la información los registros de audio y video son acompañados de sus respectivas transcripciones, y de un proceso de codificación abierta bajo un diseño emergente de categorías.

4. Algunos resultados

El grado de abstracción de una demostración fue uno de los elementos de negociación entre los profesores participantes. Algunos profesores expresaron la conveniencia de utilizar pruebas pre-formales (Van Asch, 1993) asociándola a las condiciones académicas de los estudiantes, y a la búsqueda de una mejor comprensión de la demostración. El siguiente comentario de un profesor responde ante la inquietud del uso de pruebas pre-formales:

En nuestros cursos de cálculo hacemos uso de muchos teoremas y al realizar sus demostraciones de forma rigurosa a nuestros estudiantes de ingeniería quizás no se logre la comprensión de estos. Es por esto, que la prueba pre-formal es una herramienta que aunque guarda estrecha relación con la prueba formal se ajusta al nivel de los saberes de los estudiantes, facilitando así su comprensión.

Una de las pruebas pre-formales realizada por los profesores es la siguiente:

Teorema del Valor Medio

Sea $f:[a,b]\to R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Prueba Pre-formal

Sea $f(x)=4x-x^2$, esta función es continua en el intervalo $[1,4]$ y es derivable en $(1,4)$.

Definimos una función auxiliar $g(x) = f(x) - h(x)$, donde $h(x)$ es la función que representa la recta secante que une los puntos $(1, f(1)) \wedge (4, f(4))$

$$h(x) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1) = \frac{0 - 3}{3}(x - 1) + 3 = -x + 1 + 3 = -x + 4$$

La cual es continua en $[1,4]$ y derivable en $(1,4)$.Luego, $g(x) = 4x - x^2 + x - 4 = -x^2 + 5x - 4$ también lo es, además, es fácil verificar que $g(1) = g(4) = 0$. Por tanto, resulta posible aplicar el teorema de Rolle a la función $g(x)$, es decir, existe un numero c en $(1,4)$ tal que $g'(c) = 0$ es decir $f'(c) - h'(c) = 0 \rightarrow 4 - 2c = -1 \rightarrow c = \frac{5}{2}$, calculando $f'\left(\frac{5}{2}\right) \wedge \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ tenemos que $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 4 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = 4 - 5 = -1$ y $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - 3}{3} = -1$, por tanto se cumple que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Otro de los aspectos relacionados con la negociación del grado de abstracción de una demostración fue el uso de algún software para probar un teorema. La importancia del uso de un software fue relacionada con la facilidad para la comprensión de los conceptos, al igual que permite superar un poco el problema de la carencia de tiempo para tratar teoremas y demostraciones en clase. Uno de los comentarios de los profesores fue:

Un aporte importante a las demostraciones es que mediante un software [Geogebra] *podemos lograr que los estudiantes interpreten de manera más rápido algunos teoremas de cálculo diferencial, que haciendo la demostración de manera formal. Eso permite mayor avance en el desarrollo de los temas en menor tiempo.*

El componente geométrico de algunos teoremas del cálculo diferencial permitió mostrar a través del GeoGebra, las condiciones de la hipótesis y la verificación de la tesis. En la Figura 1. Se muestra una imagen del trabajo realizado por los profesores usando GeoGebra para probar con un ejemplo y un gráfico (Van Asch, 1993), el teorema del Valor Medio.

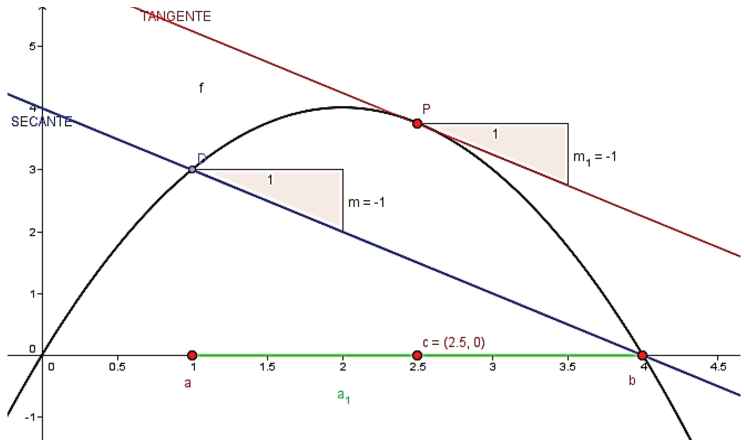

Figura 1. *Uso de GeoGebra en la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio*

5. Conclusiones

El grado de abstracción que puede tener una demostración es considerado como un elemento de negociación por parte de los profesores de cálculo diferencial. Se reconoce la importancia de las pruebas pre-formales, o de pruebas con ejemplos y gráficas apoyadas con el uso de un software como el GeoGebra. Algunos profesores consideran que este tipo de pruebas son apropiadas para estudiantes de ingeniería, pues facilita la comprensión de conceptos y no demandan demasiado tiempo. Las pruebas pre-formales son vistas, en ocasiones, como un medio para alcanzar el desarrollo de pruebas formales (demostración). Sigue siendo algo discutible la presencia de demostraciones en cursos de cálculo para la formación matemática de ingenieros. De acuerdo con el desarrollo de la investigación seguiremos comunicando los demás resultados que se presenten.

Referencias bibliográficas

- Arsac, G. (2007). Origin of Mathematical Proof. History and Epistemology. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 27–42). Rotterdam: Sense Publishers.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (P. Gómez, Trans.). Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.
- Bell, A. W. (1976). Study of pupil´s proof - explanation in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics, 7(1)*, 23–40.
- Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e Integral.* Disertación doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona.

- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Tesis Doctoral, Universitat de València, Valencia (España).
- Crespo Crespo, C., Farfán, R., & Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educactiva, 13*, 283–306.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto* (M. Lopes, Trans. 3 ed.). São Paulo: Artmed Editora S.A.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. [The rol and function of proof in matehematics]. *Epsilon 26*, 15–30.
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa.* (Vol. I): gedisa editorial.
- Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, 31, No. 2*, 181–205.
- Godino, J. D., & Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19 (3)*, 405–414.
- González, J. C. (2012). *Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales* Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid Valladolid.
- Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 105–117). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice.* Unpublished Doctoral Thesis, Stockholm University, Stockholm.
- Klisinska, A. (2009). *The fundamental theorem of calculus. A case study into the didactic transposition of proof.*Doctoral Thesis, Lulea University of Tecnology.
- Moreno, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1 (1)*, 123–136.
- Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la Investigación Educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Santa Fe de Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Van Asch, A. G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 301–313. doi: 10.1080/0020739930240214
- Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad* (G. Sánchez, Trans.). Barcelona: Paidós.