Una expresión algebraica que genera infinitos números primos

SAULO MOSQUERA LÓPEZ
samolo@udenar.edu.co
Universidad de Nariño (Profesor Asociado)

Resumen. Es un resultado conocido que no existe un polinomio que genere todos los números primos, sin embargo con la integración de las tecnologías computacionales en el aula de clase, en el marco de la asignatura Teoría de Números en el cuarto semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, se desarrollaron una serie de actividades, indagaciones, experimentos y conjeturas alrededor de la "búsqueda" de una fórmula que permita generar tal clase de números. En esta presentación se sintetizan los esfuerzos realizados en esta dirección.

Palabras clave: Números primos, algoritmos, competencias, estándares.

1. Contextualización

En la formación de un Licenciado en Matemáticas es indispensable un curso en Teoría de Números en el cual se presenten los elementos básicos de esta área de las Matemáticas que le permitan orientar y potenciar, en el ejercicio de su labor, algunos de los procesos generales de la actividad matemática, en particular, la formulación, tratamiento y resolución de problemas y el razonamiento (Estándares básicos de Competencias, Ministerio de Educación Nacional, 2006).

De otro lado, la utilización de la TIC en Educación Matemática, proporciona elementos para la reflexión, el análisis y la práctica que permiten buscar alternativas las cuales posibiliten superar las dificultades en el aula. En particular, el uso de un CAS (Computer Algebra System, por sus siglas en inglés) posibilita:

- Reducir el tiempo y la atención dedicada al desarrollo de las habilidades de cálculo permitiendo realizar mayor énfasis en la asimilación de los procesos y en la comprensión de los conceptos.

- Utilizar el sistema como elemento de motivación, puesto que relegar al computador los cálculos posibilita la concentración en el análisis y planteamiento del problema, facilitando la realización de experimentación matemática, verificando conjeturas y proponiendo otras con base en los resultados.

En la perspectiva de conjugar en la clase de matemáticas tanto los aspectos teóricos como experimentales en él quehacer docente, en el programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, se ha intentado proporcionar, técnicas y teorías, que permitan, a los futuros docentes, apropiarse de algunos elementos teóricos y computacionales, que potencien determinados Estándares Básicos de Competencias y en consecuencia, el propósito de la ponencia es, presentar algunos de los resultados de esta labor.

2. Referentes teórico – prácticos básicos

Aunque en los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) o en los Lineamientos Curriculares no se vislumbra con claridad el papel que podría desempeñar el estudio de los números primos y sus propiedades en el desarrollo del pensamiento numérico en la enseñanza básica y media es un hecho innegable que el estudio de la Teoría de números proporciona elementos básicos, que permiten en el aula de clase: Reconocer patrones, conjeturar, experimentar, generalizar, entre otros.

Complementariamente (Bailey & Borwein, 2001) validan "la utilización de la tecnología computacional… con el propósito de explorar la estructuras matemáticas, de examinar conjeturas…" (p. 123), lo cual confirma lo expresado anteriormente es por ello que, el trabajo experimental complementado con la fundamentación teórica proporcionan el marco conceptual alrededor del cual se desarrolla esta propuesta.

3. Descripción general de la experiencia de aula

El propósito fundamental de la actividad era proponer situaciones que generaran, a través del trabajo colaborativo, ambientes de aprendizaje que plantearan inquietudes cognitivas frente a un problema "imposible resolver" cuál es el de: *"Construir una fórmula algebraica simple que genere todos números primos"* para ello se propusieron temas a tratar como: El concepto de número primo y algunas de sus propiedades, clases especiales de números primos (Fermat, Merssene), análisis de expresiones conocidas que generan algunos números primos y, finalmente, propuesta y análisis computacional y teórico de la fórmula.

El concepto de número primo y algunas de sus propiedades.

En este apartado se trataron temas, esencialmente orientados por el docente, tales como:

- *El Teorema Fundamental de la Aritmética*. Todo número entero mayor que uno, es primo o se puede expresar de manera única como producto de números primos.
- *La infinitud de los números primos*. Aquí se trató la demostración de este resultado dada por Euclides.
- *El Teorema de Dirichlet*. Si a y b son enteros positivos y $M.C.D.(a,b)=1$ entonces existen infinitos números primos de la forma $an+b$. Aunque los estudiantes no lo conocían este resultado tuvo un carácter decisivo en el desarrollo de la experiencia.
- *Clases especiales de números primos*. Existen muchas clases especiales de números primos, por ejemplo: Los Números primos de Prierpont, que son de la forma 2^a3^b+1, los Números primos de Proht, que son de la forma $k2^n+1$, los Números primos de Cullen, que son de la forma $n2^n+1$, sin embargo únicamente se trataron los números primos que, históricamente, han tenido mayor relevancia: Los Números primos de Merssene y los Números primos de Fermat.
- *Los números primos de Mersenne.* Son todos los números primos de la forma 2^n-1
- Bajo el desarrollo del proyecto GIMPS, el Dr. Curtis Cooper de la Universidad de Missouri descubrió el 13 de enero del 2013, el mayor número primo conocido hasta el momento, este es el primo de Mersenne $2^{57885161}-1$ el cual número posee 17.425.170 dígitos.
- *Los números primos de Fermat.* Son todos los números primos de la forma $2^{2^n}+1$, Fermat conjeturó que todos estos números eran números primos, sin embargo, en 1732, Euler demostró $2^{2^5}+1$ es compuesto puesto que: $2^{2^5}+1=641*6700417$.

Algunas fórmulas Polinomiales que generan números Primos.

En esta sección se desarrolló una parte complementaria del trabajo, cuál fue la búsqueda en diferentes fuentes bibliográficas de polinomios que generaran números primos y se trató el siguiente resultado fundamental:

Teorema: No existe un Polinomio que genere todos los números primos. Entre los polinomios que se presentaron se tienen, por ejemplo, los siguientes:

- El Polinomio de Euler $F(n) = n^2 - n + 41$, el cual genera primos para $n = 1,2,\ldots,40$ y para $n = 41$, se tiene que $F(41) = 41^2$.
- El Polinomio de Legendre $F(n) = n^2 + n + 17$, el cual genera primos para $n = 1,2,\ldots,15$ y para $n = 16$, se tiene que $F(16) = 17^2$.
- El Polinomio de J. Brox (2006) $F(n) = 6n^2 - 342n + 4903$, el cual genera primos para $n = 0,2,\ldots,57$ pero para $n = 58$, se tiene que $F(58) = 59 * 89$.

La fórmula propuesta y su análisis.

En este apartado se realizó la parte experimental que consistió en tomar como referencia la parte teórica expuesta y proponer diversas expresiones algebraicas que posibilitarán la generación de números primos. En este sentido y a pesar de conocer la imposibilidad de que la expresión buscada fuera un polinomio, los primeros intentos presentados fueron de este tipo.

Después de realizar las orientaciones correspondientes y de resaltar la importancia que en esta tarea podría tener el *Teorema de Dirichlet* se propusieron diferentes expresiones las cuales, en general, fueron invalidadas utilizando el CAS, MAPLE, hasta conciliar con la "mejor" expresión considerada

$$F(n) = \sqrt{24n + 1}$$

Esta expresión, para diferentes valores enteros de n, genera en ocasiones números "decimales", pero lo importante es que genera todos los números primos a partir del 5. Por ejemplo, los primeros diez números primos, es decir, $5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$ se generan para $n = 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 35, 40, 57$.

Para complementar esta parte se elaboró un código en MAPLE que permite experimentar con expresiones algebraicas de la forma $F(n) = \sqrt{an + b}$, donde $M.C.D.(a, b) = 1$ para verificar para que valores de n se producen números primos.

Complementariamente, el docente realizó la demostración de que efectivamente, a partir de la expresión dada, se generan infinitos números primos. Si Ud. desea conocer el código o la demostración puede solicitarlo al correo electrónico del ponente.

4. Logros y dificultades evidenciadas

Logros. Se presentaron conceptos cotidianos en un curso de Teoría de Números, sin embargo, estos fueron complementados con el uso de herramientas computacionales y se propusieron actividades diferentes a las usuales, con lo cual los estudiantes trabajaron con mayor interés y se evidenció cómo compartían sus ideas y cómo las exponían frente a los demás.

Dado que las respuestas iniciales a las actividades propuestas no fueron necesariamente satisfactorias, se propició el análisis y la discusión del trabajo realizado en los grupos y del porqué, en primera instancia, no se había logrado aprovechar de manera adecuada los resultados teóricos. Los estudiantes fueron capaces de colaborar en la elaboración del código en MAPLE que permitió realizar el trabajo experimental correspondiente.

Dificultades. Lo que mayor trabajo requirió fue lograr el compromiso de los estudiantes ya que inicialmente, algunos de ellos, mostraban indiferencia por las actividades. Los estudiantes, en principio mostraron poca comprensión teórica del "Teorema de Dirichlet" ya que en las propuestas presentadas al principio no utilizaban los resultados expresados en tal teorema. El docente observó falta de comprensión de las temáticas tratadas ya que los intentos realizados por ellos para demostrar que la expresión considerada produce infinitos números primos fueron infructuosos.

5. Reflexión final

La actividad realizada, en cuánto a búsqueda de la formula mencionada, fue enriquecedora pues permitió generar nuevos conocimientos y fomentar el trabajo en grupo. Las diversas ideas que cada grupo generó, y que fueron compartidas con sus compañeros, un ambiente de trabajo propicio para "*hacer matemáticas*", ya que alrededor de esta propuesta surgió una diversidad de conceptos y procedimientos que algunos de ellos aplican para llegar a resolver una situación dada.

Por último, es necesario considerar la importancia de la gestión del docente en el aula de clase en la búsqueda de actividades que generan ambientes de aprendizaje y en las cuales los estudiantes exploren, interpreten, argumenten, propongan alternativas y cuestionen la práctica educativa, sin embargo, es necesario realizar un equilibrio de ellas ya que es posible enfatizar demasiado en estas y no complementar los temas establecidos para la asignatura.

Referencias bibliográficas

- Bailey, D. & Borwein, J. (2001). *Experimental Mathematics: Recent development and future outlook.* En B. Engquist y W. Schmid (Eds.), Mathematics unlimited-2001 and beyond. New York: Springer-Verlag.
- Jiménez, R., Gordillo, E. & Rubiano, G. (2004). *Teoría de Números, para principiantes*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf