

# El aula taller y el modelo de Van Hiele como base para el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje de la Geometría Analítica en la Educación Superior

---

JORGE ELIÉCER VILLARREAL FERNÁNDEZ

jorgevf2005@gmail.com

Universidad de Antioquia (Profesor)

Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid (Profesor)

**Resumen.** El presente trabajo muestra el diseño, puesta en práctica y análisis de una propuesta de enseñanza de la geometría analítica en estudiantes de primer año de ingeniería del Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid. El proyecto, tiene como base el “Modelo de niveles de desarrollo de Van Hiele para la enseñanza de la Geometría” y utiliza material didáctico diseñado dentro de la metodología de aula taller, buscando con ello articular los conceptos matemáticos y el mundo real, recuperando el concepto de lugar geométrico. Los resultados dan cuenta no solo del proceso de enseñanza y aprendizaje si no que trasciende a analizar las habilidades de pensamiento inmersas en la implementación de la propuesta por parte de los estudiantes participantes.

**Palabras clave:** Educación Superior, enseñanza geometría analítica, desarrollo del pensamiento, aula taller, Van Hiele.

## 1. Contextualización

La enseñanza de la Geometría Analítica en la Educación Superior, en Ingeniería (en este caso) es base para la comprensión de otros conceptos matemáticos y a la vez para el desarrollo del pensamiento espacial. Una de las dificultades que se vienen presentando en el proceso de enseñanza de los conceptos de la Geometría Analítica es que por la automatización de procedimientos, la memorización de ecuaciones, los problemas tipo y repetitivos, se ha venido perdiendo la esencia de la geometría, en este caso el concepto de lugar geométrico. Los estudiantes resuelven ejercicios de los temas en discusión, pero no tienen claridad sobre el papel que juega cada uno de los puntos que encuentran, ni las

propiedades que cumplen. Además de esta situación en el proceso de enseñanza se enfrenta un problema mayúsculo que tiene que ver con el desfase que se presenta entre la forma en que se enseñan los conceptos geométricos y la manera en que se desarrollan los procesos de aprendizaje de los estudiantes, situación que se ve reflejada en las formas de razonamiento que dejan ver los alumnos, se presenta pensamiento concreto donde se deberían estar haciendo abstracciones o habilidades de pensamiento requeridas para la comprensión de los conceptos no se activan en los momentos requeridos. Por todo esto se plantea el problema de la enseñanza de la Geometría Analítica en la Educación Superior recuperando el lugar geométrico como esencia del análisis de las relaciones que se encuentran en cada una de las figuras a estudiar. De este problema surge una pregunta sobre el cómo lograr que este proceso de aprendizaje se dé ordenadamente de acuerdo a la forma en que se desarrollan las habilidades de pensamiento de los estudiantes, por lo que se propone una estrategia para esto.

## 2. Referentes teórico prácticos

Para el desarrollo de la propuesta se tienen en cuenta varias perspectivas teóricas, cada una de ellas referidas a la situación en particular que se trate, es decir a la enseñanza de la geometría, a las habilidades de pensamiento y a la metodología utilizada: el aula taller.

**La enseñanza de la geometría.** Se trabajó con el modelo de Van Hiele, el cual describe el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría como un desarrollo que parte de formas intuitivas de razonamiento hasta una formalización profunda de los conceptos. Jaime y Gutiérrez (1990) lo caracterizan diciendo que se pueden encontrar varios niveles de perfección en el razonamiento de los estudiantes, pero un estudiante solo puede comprender aquello que se le presente de acuerdo a su razonamiento; se debe trabajar sobre este nivel, alcanzar exigencia requerida para poder comprender las diferentes relaciones matemáticas es base para el aprendizaje. El modelo de Van Hiele plantea tres elementos, la percepción, que tiene que ver con el interés en el tema (Van Hiele, 1986); los niveles de razonamiento, son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles, en los cuales es progresiva la capacidad de razonamiento matemático de los sujetos y las fases. Los niveles de razonamiento son: Nivel 0, predescriptivo; nivel I, de reconocimiento visual; nivel II, de análisis; nivel III, de clasificación; nivel IV, de deducción formal. Las fases del aprendizaje son: la información, la orientación dirigida, la explicitación, la orientación libre y la integración (Burger y Shaughnessy, 1986).

**Las habilidades de pensamiento.** El contenido es, por definición: rígido y estático, las habilidades, por el contrario, son flexibles y crean alternativas, son transferibles y tienden a

formar competencia (Sánchez, 2002). La cadena del desarrollo de las habilidades de pensamiento inicia por la observación y finaliza en la contrastación de leyes y teorías, cada habilidad de pensamiento involucra inmediatamente anteriores, es decir, para realizar una clasificación es necesario que la persona haya desarrollado la habilidad de realizar comparación, descripción y observación.

**El aula taller.** La metodología de la experiencia fue la realización de actividades en ambiente de taller. Es una estrategia para la gestión del conocimiento, la innovación y la transformación de los ambientes de aprendizaje. En este tipo de trabajo el aprendizaje se obtiene por descubrimiento y asimilación propios (Pasel, 1993), teniendo como base el despertar la curiosidad en torno al problema o concepto, es decir, se busca que se aprenda haciendo. Permite el trabajo en equipo, y utiliza material didáctico para la exploración de situaciones concretas, en el caso de la propuesta se utilizó material concreto y guías de trabajo, que conlleva al desarrollo de las habilidades de pensamiento y a la integración de los diferentes pensamientos matemáticos (Jaramillo, 2012).

### 3. Descripción de la experiencia

El aspecto metodológico de la propuesta tiene como centro llevar a la práctica el modelo de Van Hiele, teniendo como estrategia el aula taller y como herramienta para la implementación técnica de las guías de trabajo, a partir de niveles básicos de razonamiento, la comprensión de los conceptos de la Geometría Analítica, la importancia del concepto de lugar geométrico y la activación de las habilidades de pensamiento que se requieren para ello. Se muestra a los estudiantes como se fueron construyendo históricamente los conceptos básicos de la Geometría Analítica, así como lo importantes que son hoy en día en diversos campos de la Ingeniería. Para lograr esto se trabajó en dos sentidos; primero en un diálogo guiado por el docente y luego con la visualización de dos videos que parten de ver la geometría analítica desde lo histórico para luego mostrar las posibilidades de aplicación en muchos campos, centrandose en la Ingeniería que es el campo en que se van a mover los futuros profesionales.

Para iniciar el proceso con los niveles se presenta el Cono de Apolonio con el fin de que se pueda observar de manera concreta como cada una de las secciones cónicas surge a partir de cortes determinados, con características específicas a este cono. Se identificaron las características del material mientras el docente enuncia los elementos del cono; finalmente, se mencionan las características que deben tener los cortes en el cono para generar cada una de las secciones cónicas. Los alumnos escuchan, observan y realizan las preguntas correspondientes a lo que podían ver (nivel predescriptivo). A partir de esto se inicia un

proceso de identificación de semejanzas de lo visto con objetos cotidianos, se reconoce la forma física de los objetos, aunque aún no es posible que se determinen las propiedades de estos objetos o de las figuras vistas (reconocimiento visual).

La presentación de la primera guía de trabajo inicia el segundo momento de la experiencia, que tiene como objetivo que el estudiante caracterice y establezca algunas de las propiedades generales de las secciones cónicas, para ello se utiliza el doblado de papel que se realiza a partir de instrucciones e imágenes que presenta el material de trabajo (nivel de análisis). Al finalizar la actividad los estudiantes tienen el espacio para compartir las experiencias que tuvieron con el trabajo de doblado de papel, generando un debate que permita la construcción colectiva de los conceptos.

La segunda guía de trabajo presenta una actividad cuyo objetivo se focaliza en el trazado de la parábola, la elipse y la hipérbola, con regla y compás, identificando en el proceso de construcción de las mismas sus propiedades fundamentales, articulando estas propiedades de orden geométrico con la representación analítica de estas curvas, conocidas como ecuaciones canónicas (nivel de clasificación). La forma en que se plantea este trabajo, permite que cada participante construya las tres curvas posibles, las que él decida y alcanzase en el tiempo disponible. Así cada uno podrá desarrollar y estudiar sus propias construcciones, siguiendo las indicaciones impresas en las guías para las actividades, y además, observar los hallazgos realizados por sus compañeros. El debate sobre lo conseguido permite que se establezcan relaciones entre unas propiedades y otras, determinando a que cónica corresponde cada propiedad, cuáles tienen similitudes y cuáles son las diferencias que presentan.

La última actividad tiene como objetivo la interpretación de las ecuaciones canónicas de las figuras cónicas, identificando el procedimiento algorítmico para llegar a ellas y teniendo en cuenta las propiedades antes descubiertas (fase de deducción formal). Luego de desarrollar estos pasos se plantea identificar relaciones entre estas curvas y fenómenos de la naturaleza, buscando que se le un mayor sentido a estas ecuaciones.

Se debe aclarar que en esta implementación se realizó el trabajo con las guías, siguiendo el orden establecido anteriormente pero aplicándolas figura por figura, primero la circunferencia, después la parábola, luego la elipse y por último la hipérbola. Es decir, se tomó la primera figura y se aplicaron las cuatro guías en su orden, luego la segunda y así sucesivamente. Esto permitía encontrar diferencias y semejanzas en cada construcción, en los elementos de cada curva, partiendo de la anteriormente vista. Al culminar el proceso de identificación de las ecuaciones de cada una de las curvas se realizaba un proceso de generalización y de problemas y ejercicios de aplicación.

## 4. Logros y dificultades

Lo que se puede determinar a partir de los resultados de la implementación es que el desarrollo de cada una de las fases de la metodología corresponde a los niveles planteados por Van Hiele. Cada nivel del modelo determina unas habilidades de pensamiento que se deben activar para poderlas desarrollar, es así como en el nivel 0 y I se realizan observaciones de los elementos que componen los conceptos de cónicas, en este momento de manera concreta. Además se realiza la descripción de cada uno de estos elementos y se comparan entre ellos también a nivel concreto. En el nivel de clasificación el estudiante debe establecer relaciones entre unas propiedades y otras para poder determinar clasificaciones de estas características, al lograr esto se llega a la conceptualización y de esta forma a niveles abstractos de pensamiento. El nivel IV, la deducción formal, ya es un razonamiento de tipo teórico, el trabajo sobre las ecuaciones de las cónicas planteado por la guía, exige un razonamiento de tipo inductivo que tiene como prerequisite el que el estudiante realice procesos de análisis y de síntesis, por lo que estas habilidades de pensamiento también fueron activadas en el proceso. Las fases de aprendizaje propuestas por el modelo también fueron implementadas. Inicialmente se informa a los estudiantes sobre el tipo de trabajo que van a realizar, para luego a través de la orientación dirigida (en este caso por las guías) los alumnos van construyendo los elementos de la red de relaciones en que se enmarcan las figuras cónicas, sus propiedades, sus características, lo cual se revisa y socializa al culminar cada una de las guías. A partir de esta red de relaciones cada estudiante puede aplicar lo que hasta ahora encontró o comprendió en los debates, a algunas de las figuras que no había construido con anterioridad, esta es la fase de orientación libre en la propuesta, para finalizar condensando todos los conocimientos hasta ahora desarrollados en el todo que es la construcción de la ecuación de las cónicas. El nivel de conocimientos declarativos fue alto, los estudiantes comprendieron los conceptos de manera profunda y los pudieron aplicar a situaciones de aplicación planteadas con posterioridad, por lo cual se observa también una mejora en el conocimiento procedimental conseguido. Se debe añadir a este procedimental el aprendizaje del manejo de algunos instrumentos como el compás, el mejoramiento del seguimiento de instrucciones y la posibilidad de activar las habilidades de pensamiento en los momentos en que se requiera. A nivel actitudinal los estudiantes comprendieron el valor que tienen los conceptos geométricos en general y la Geometría Analítica en particular, su nivel motivacional aumentó, así como la atención y la habituación, por lo que al mejorar estos dispositivos básicos de aprendizaje, mejora el aprendizaje mismo.

## 5. Reflexión final

La enseñanza de la geometría debe tener en cuenta cuáles son las habilidades de pensamiento o el tipo de razonamiento que interviene en el proceso de aprendizaje de estos conceptos, ya que de no hacerlo podría no permitirse que exista una adecuada relación entre exigencia y capacidad. Las estrategias de enseñanza se deben diseñar a partir del conocimiento de la forma, el nivel tanto matemático como cognitivo en el que se desarrolla la tarea planteada, con el fin de no contradecir formas de enseñanza con estilos de aprendizaje. El desarrollo de habilidades de pensamiento es un elemento esencial en el aprendizaje de los conceptos geométricos, el no tener en cuenta esto y si presionar porque las cosas se aprenda, conllevan a la búsqueda de aprendizajes memorísticos y faltos de significatividad. Las guías diseñadas permiten a los estudiantes realizar su trabajo con un alto grado de independencia respecto del docente, y que aquellos más rezagados encuentren en sus compañeros más adelantados un soporte para sus propios procesos, lo cual posibilita a su vez que el maestro focalice su acompañamiento en los estudiantes que más lo necesitan. Es por esto que para esta propuesta, la metodología del aula taller se ha erigido en una herramienta muy importante en el propósito de hacer de las Matemáticas un área más inclusiva. La actividad de aula taller dinamiza la activación de las diversas habilidades de pensamiento, por lo que se dispone el razonamiento para estar al nivel de los conceptos que se van a aprender.

## Referencias bibliográficas

- Burger, W. y Shaughhnessy, J. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.
- Jaime, A. & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En: S. Llenares, M. V. Sánchez, *Teoría y práctica en Educación Matemática*. España: Alfar.
- Jaramillo, L. (2012). *La proporcionalidad y el desarrollo del pensamiento matemático*. (Tesis de Maestría). Recuperada de <http://www.bdigital.unal.edu.co/6969/>.
- Pasel, S. (1993). *Aula taller*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.
- Sánchez, M. (2002). La investigación sobre el desarrollo y la enseñanza de las habilidades de pensamiento. *Revista Electrónica de investigación Educativa*, 4 (1).
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.