

Introducción a la geometría 3D con GeoGebra 5.0

ANDRÉS FELIPE CARO

candres44@hotmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Estudiante)

Resumen. A partir del software GeoGebra 5.0 en su versión 3D, proponemos un taller introductorio a la geometría afín en el espacio, en el que a través del uso del software, los asistentes lograrán visualizar, representar y estudiar en un entorno tridimensional puntos, rectas, planos y sólidos de acuerdo a sus definiciones en la geometría espacial.

Palabras clave: Recursos informáticos, cálculo simbólico, geometría dinámica.

1. Presentación

Este taller fue elaborado como fruto del trabajo desarrollado a través del programa de CIEM, con el cual se muestra una matemática más dinámica a partir de GeoGebra, concretamente el uso de GeoGebra 5.0 para la simulación de problemas matemáticos en R^3 . Puesto que no era posible realizar construcciones geométricas en R^3 con total libertad y a su limitación frente a un espacio bidimensional, la mayoría de docentes encontraba restringido su uso para trabajar la geometría espacial por medio de GeoGebra.

De acuerdo con los estándares básicos de competencias en matemáticas el uso de GeoGebra o de cualquier software que permita el estudio de comportamientos y propiedades geométricas, permite que los estudiantes en todo nivel de escolaridad puedan tener la posibilidad de construir, conjeturar y verificar los resultados de las transformaciones de figuras en los distintos planos (MEN, 2006). Por esto, es pertinente la utilización de herramientas tecnológicas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, pues como lo plantea el Ministerio de Educación “... *la era tecnológica en que vivimos nos obliga a replantear la forma en que se utiliza el cálculo hoy día*” (MEN, 1998), el uso de los software para la enseñanza del geometría afín y las matemáticas es cada día más popular. En otras palabras, de acuerdo con (Ruiz, 2011, p. 16), el uso de GeoGebra 5.0 como un software libre, permite que mayor disposición en su implementación y utilización en colegios oficiales y no oficiales.

2. Marco teórico

Un informe reciente de la National School Boards Association de los Estados Unidos, descubrió que el 96% de los estudiantes con acceso a Internet, usa herramientas de interacción con imágenes, videos y simuladores. Así mismo, se muestra que muchos de ellos son creadores de herramientas y contenidos, y conforme a sus calificaciones los que tienen menor rendimiento escolar son los que mayor habilidad en términos tecnológicos presentan, a lo que Morrissey (s.f) infiere que la implementación de tecnologías que permitan a los estudiantes ser diseñadores activos mediante el uso de programas, aplicaciones y demás, facilita que desarrollen mejor las habilidades de comprensión en todos los campos del conocimiento al que se expongan. Por consiguiente, trabajado desde las aulas, el software GeoGebra hace que los estudiantes interactúen o simulen las diversas situaciones planteadas en los problemas matemáticos.

Entre los contenidos del taller, se encuentran en consideración las distintas representaciones de las ecuaciones en el sistema de la geometría afín, puesto que GeoGebra reconoce únicamente el uso de las ecuaciones expresadas de manera implícita al momento de graficar, pero al determinar resultados en torno a intersecciones y transformaciones utiliza ecuaciones paramétricas:

Las formas de las ecuaciones en la geometría afín son:

Ecuaciones paramétricas	Ecuaciones Continuas	Ecuaciones Implícitas
$r \equiv \begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \\ z = z_0 + t v_3 \end{cases} \text{ con } t \in R$	$r \equiv \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$	$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$

Las definiciones de plano, punto, recta, intersección para la aplicación del taller son determinados a partir de la geometría Euclídea teniendo que:

El plano afín: es un conjunto, $E2$, formado por puntos (A, B, C, \dots) junto con una aplicación que asocia a cada par de puntos (A, B) un vector de R^2 de origen A y extremo B (\overrightarrow{AB}) con las siguientes propiedades:

$$\text{Dados } A, B, C \in E2, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Fijado A como origen, a cada $\vec{x} \in R^2$ le corresponde un único $B \in E2$ tal que $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$

Punto: es la intersección de tres planos. Y se determina a partir de las coordenadas de la forma (x, y, z)

Recta: Es la intersección de dos planos. Constituida de manera de ecuación implícita para su graficación en GeoGebra.

Dado que las anteriores son representaciones algebraicas de objetos geométricos en el plano R^3 , Losada¹ (2011) en el artículo *GeoGebra, la eficiencia de la intuición*, repasa las cualidades que hacen de esta aplicación una gran herramienta para la docencia de Matemáticas; incluso, según él, la visualización simultánea de lo que se realiza en las ventanas geométrica y algebraica en GeoGebra, permite realizar una elaboración compleja de los problemas geométricos y algébricos.

3. Metodología del taller

El taller se desarrollará en dos partes, la primera corresponde a la presentación en diapositivas explicando los pasos básicos de cómo utilizar el software Geogebra 3D, simultáneamente cada asistente trabajará directamente en cada computador, repitiendo los pasos presentados por el relator, de modo que aprenda personalmente a utilizar el software presentado y la segunda parte consiste en la solución de problemas para la aplicación de las herramientas.

Inicialmente se dará a conocer la aplicación de algunas herramientas que fueron modificadas y otras nuevas que trae GeoGebra 5.0 para la graficación en su espacio en 3D:

	Punto	$A=(x,y,z);$ $A=(x,y)$		Prisma	[punto, punto, punto, punto] [polígono, punto]
	Circunferencia	$c=[Eje,$ punto]; $c=[Centro,$ Radio, Dirección]		Pirámide	[punto, punto, punto, punto] [polígono, punto]
	Intersección de dos superficies	Interseca[objeto, objeto]		Plano Paralelo	[punto, plano]
	Plano	Plano[punto, punto, punto]; Plano[Recta, punto]		Rota vista grafica	
	Plano Perpendicular	[punto, vector]; [punto, recta]		Simetría Especular	[objeto, plano]

Posteriormente, para la aplicación de las herramientas dichas anteriormente se plantearán los siguientes problemas que permiten el estudio y la visualización de situaciones en 3D, las cuales según Sandoval (2009) posibilitan “... *explorar las variaciones de un problema y*

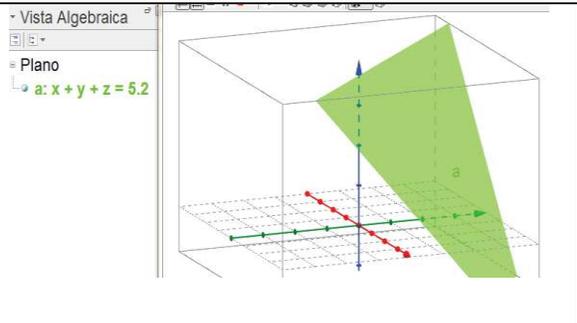
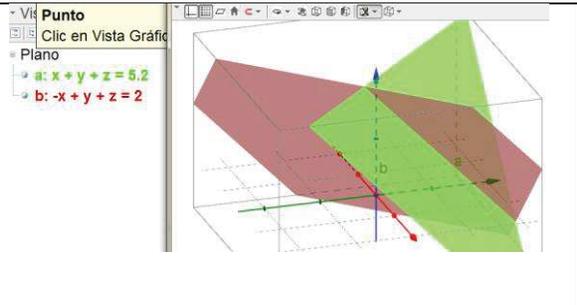
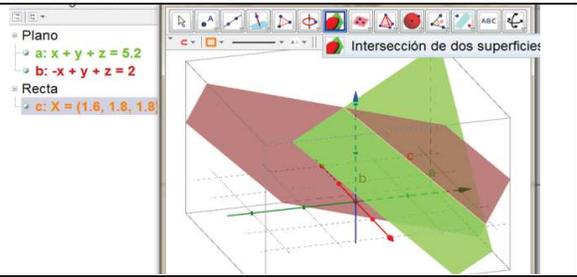
¹ Rafael Losada es uno de los expertos españoles en Sistemas de Geometría Dinámica y GeoGebra.

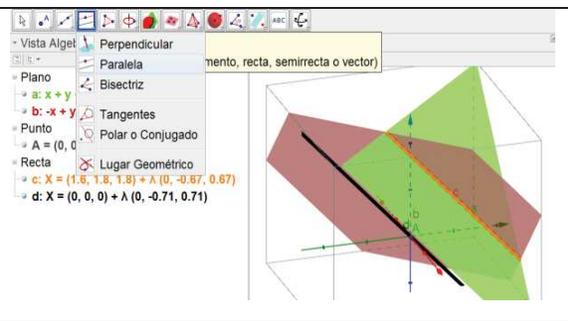
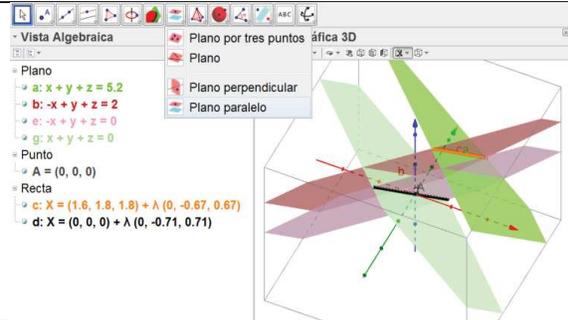
sacar conclusiones teóricas sobre el comportamiento de los elementos geométricos y sus propiedades, donde los alumnos o asistentes realizan conjeturas y comprueban, de manera sencilla, su validez” (Sandoval, p. 23-25). Tales problemas fueron tomados de las pruebas de admisión de la Universidad de Andalucía:

Encuentra la ecuación de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos π_1 de la ecuación $x + y + z = 3\sqrt{3}$ y π_2 de la ecuación $-x + y + z = 2$. Hallar la distancia de la recta r al plano π_1 .

Considera el punto $P(1,0, -2)$ y la recta r definida por $2x - y = 5$ y $2x + y - 4z = 7$. a) determina la recta perpendicular a r que pasa por P . b) halla la distancia entre el punto P y su simétrico Q respecto de la recta r .

El desarrollo del taller se realizara guiado paso a paso, a continuación se presenta el ejemplo referente al primer problema planteado que será desarrollado en el taller.

<p>Representación de los datos</p>	<p>$\pi_1: x + y + z = 3\sqrt{3}$</p>	<p>En la barra de entrada se debe escribir: Plano[x+y+z=3*sqrt(3)]</p>	
	<p>$\pi_2: -x + y + z = 2$</p>	<p>En la barra de entrada se debe escribir: b: x+y+z=2</p>	
<p>Def. de Recta Una recta es la intersección de dos planos no coplanares</p>		<p>En la barra de herramientas se encuentra la opción Intersección de dos superficies, con ella se eligen los dos planos, obteniendo la recta de intersección.</p>	

<p>Solución por medio del uso de segmentos paralelos</p>		<p>Para realizar una paralela solo basta con buscar la herramienta paralela y trazar una paralela de la recta que realizamos con respecto al origen.</p>	
<p>Trabajo de comprobación, solución por medio del uso de planos paralelos</p>		<p>La otra forma de resolver el problema es realizando planos paralelos al origen y a estos trazar la intersección. $R // \quad r = \{z = -y \quad x = 0\}$</p>	

Referencias bibliográficas

- Losada, R. (2011). GeoGebra, la eficiencia de la intuición. [En línea]. [Citado 2011-06-09]. Disponible en: <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RecursosInternet/RecInternet/Geogebra/Geogebra1.asp>.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional: Bogotá.
- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Ministerio de Educación Nacional: Bogotá.
- M. Anzola; J. Caruncho (1981). Problemas de Algebra, Tomo 6. Geometría Afín y Euclidea.
- Montesdeoca Delgado, Angel (2012). Geometría afín y Euclidea, Universidad de La Laguna.
- Morrissey, Jerome (s.f), El uso de TIC en la enseñanza y el aprendizaje. Cuestiones y desafíos, <http://coleccion.educ.ar/coleccion/CD30/contenido/pdf/morrissey.pdf>
- SADA, Manuel. Webs interactivas de matemáticas [Sitio de Internet]. Consultado junio 18, 2011]. Enlace: <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/index.htm>.
- Sancho Gil, Juana M^a (2006). *Tecnologías para transformar la educación*. Madrid: Akal.
- Sandoval Cáceres, Ivonne Twiggy (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, vol. 21, núm. 1, pp. 5-27.
- Stewart. J. Calculo de una variable. 6^a edición Colombia: Thomson Editores S.A
- Stewart. J. Calculo varias variables. 6^a edición Colombia: Thomson Editores S.A
- Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 289-321
- Vera, H & Silva, M. (2005). Una propuesta educativa en informática educacional para la enseñanza de la matemática. Recuperado de <http://www.sadpro.ucv.ve/agenda/online/vo16n17a0.html>.