SOBRE LAS RAZONES Y LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: ¿QUÉ TRATAMIENTO HACEN LOS LIBROS DE TEXTO?

Ferney Tavera Acevedo, Jhony Alexander Villa-Ochoa
Universidad de Antioquia. (Colombia)
ftavera827@yahoo.es, jhony.villa@udea.edu.co

Palabras clave: textos universitarios, razones trigonométricas, funciones trigonométricas

Key words: textbooks, rates and tigonometric functions

RESUMEN: En este artículo presentamos los resultados obtenidos de un estudio cualitativo que indagó por las maneras en que algunos libros de texto hacen el tratamiento de las razones y las funciones trigonométricas. Para ello, hicimos un análisis de contenido a cinco libros de texto que se reportaron como los más usados en la asignatura de matemáticas el primer año de Educación Superior, en algunas universidades de Medellín-Colombia. Los resultados muestran que algunos libros de texto hacen un tratamiento indistinto para los términos funciones y razones, asimismo identificamos que en algunos textos la transición de las razones a las funciones trigonométricas hacen un cambio de notación en los que los significados no se hacen explícitos.

ABSTRACT: This paper presents the results of a qualitative study, its purpose was inquiry the treatment that textbooks do of trigonometric rates and functions. The method was content analysis; we used to analize five university textbooks. The results show that some textbooks do an indistinct treatment for rate and functions words; also we identified that in some texts the transition from trigonometric rate to trigonometric function there is a change of notation but not its meanings.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

La literatura internacional ha llamado la atención sobre la importancia que tienen los libros de texto en la formación matemática de los estudiantes de cualquier nivel educativo (Fan, 2013; Rezat, 2013; Randahl, 2012). En un estudio previo, Tavera (2013) mostró que los libros de texto generalmente se asumen como uno de los principales recursos didácticos que emplea el docente para planear sus intervenciones en el aula de clase, debido a que actúan como herramienta para aplicar un currículo ya establecido facilitando, de esta manera, la enseñanza y el aprendizaje de las temáticas que se deben abordar en el área de matemáticas. En ese mismo sentido, Selva y Borba (2013) han argumentado que muchos profesores no solamente utilizan recursos como orientación para explicar los conceptos matemáticos, sino también como fuente bibliográfica para preparar las actividades (por ejemplo: ejercicios, problemas, tareas) que se desarrollarán en la clase de matemáticas.

De igual forma, Montiel (2005) ha señalado que los libros de texto presentan de manera secuenciada, lógica y coherente los temas y conceptos matemáticos. La autora analiza la manera en que estos recursos hacen el desarrollo de la trigonometría y manifiesta que en los textos analizados se privilegia la secuencia trigonometría → círculo trigonométrico → función trigonométrica; este tratamiento está presente en los textos de trigonometría, algo diferenciado del tratamiento hecho por textos de “análisis matemático” los cuales introducen la función trigonométrica y demuestran sus propiedades en relación al cálculo.

En un estudio posterior, Montiel y Buendía (2013) retomaron el trabajo realizado por De Kee, Mura y Dionne (1996) para señalar que las comprensiones del seno y el coseno como razón y como función trigonométrica no son ampliamente diferenciadas por los estudiantes. Estas observaciones también fueron reportadas en el trabajo de Weber (2005) quien seleccionó dos grupos para desarrollar su estudio (grupo control y grupo experimental) con el fin de examinar la comprensión acerca de las funciones trigonométricas. A partir de su estudio, este autor concluyó que a través del uso de la tecnología computacional los estudiantes (del grupo experimental) lograron mostrar una comprensión profunda de las funciones trigonométricas, puesto que fueron capaces de calcular los valores de las expresiones trigonométricas dadas y dedujeron sus propiedades, justificando paso a paso las características que las describen.

Desde una perspectiva socioepistemológica, Jácome (2011) reportó una experiencia con profesores mexicanos que pertenecían al nivel medio superior; el propósito de su estudio fue trabajar las relaciones de proporcionalidad en la construcción de modelos geométricos para que se resuelvan situaciones-problema donde se aplique la trigonometría. Para poder desarrollarla, este autor evita las medidas hipotéticas y le solicita a sus participantes que observen un objeto de su entorno y que traten de calcular su altura.

Según el informe presentado por los profesores participantes en el estudio de Jacome (2011) se pueden observar distintos fenómenos, los cuales están enfocados hacia el manejo del discurso escolar, porque hay docentes que manifestaron utilizar la “razón trigonométrica” tangente como herramienta para solucionar el problema planteado, pero también existen otros que expresaron que este problema se resuelve aplicando la “función trigonométrica” tangente, la relación tangente, la función tangente, o simplemente se cuestionaron sobre el procedimiento trigonométrico a emplear y murmuraron de la fórmula que sirve para hallar la tangente en un triángulo rectángulo.

Algo similar lo evidenció Tavera y Villa-Ochoa (2013) cuando analizaron la manera en que los libros de texto promueven el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas. Estos investigadores observaron que algunos textos universitarios denominan como funciones trigonométricas a aquellas expresiones que sirven para calcular las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, las cuales están determinadas por un ángulo agudo (Tabla 1). Esta temática usualmente es trabajada en el aula de clases como razones trigonométricas.

Tabla 1.

Definición de funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo			
	$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}}$	$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}}$	$\tan\theta = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$
	$\csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{op}}$	$\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}$	$\cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{op}}$

Fuente: Swokowski y Cole (2009, p. 378).

Las investigaciones revisadas anteriormente ponen en evidencia las dificultades que los estudiantes tienen frente a la comprensión de las razones y las funciones trigonométricas, sus propiedades, usos y diferencias. Teniendo estas consideraciones en mente, se produjo un interés especial por examinar algunos libros de texto que hagan referencia al estudio de la trigonometría plana, tanto en el triángulo rectángulo como en la circunferencia goniométrica. En particular nos proponemos analizar e interpretar la manera en que se da la transición de las razones a las funciones trigonométricas; para ello, formulamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el tratamiento que los libros de texto universitarios hacen de las razones y las funciones trigonométricas?

REFERENTE CONCEPTUAL

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) ha sugerido que el estudio de la variación se convierta en un eje articulador del currículo de matemáticas de tal forma que se propenda por el desarrollo de un pensamiento variacional. Para promover este tipo de pensamiento es necesario propiciar en el aula de clase actividades que se fundamenten en "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (MEN, 1998, p. 73). Se espera que los estudiantes puedan explorar, analizar, interpretar, deducir, conjeturar y plantear nuevas situaciones frente a las relaciones funcionales y dinámicas que se generan entre los conceptos matemáticos.

El MEN también resalta que el pensamiento variacional debe cumplir "[…] un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas" (MEN, 2006, p. 66). En coherencia con ello, observamos una estrecha relación con otros tipos de pensamiento (por ejemplo: el numérico, espacial y métrico) porque su estudio se genera a partir de la búsqueda de una visión más generalizada y abstracta del conocimiento matemático, determinada por el reconocimiento de características, que son invariantes en medio de la variación y el cambio.

Algunas de las ideas anteriormente expuestas, sirvieron de sustento para la pesquisa de Villa-Ochoa y Ruiz (2010), quienes expresan que el estudio del pensamiento variacional constituye uno de los aspectos de mayor riqueza en el ámbito escolar, puesto que cotidianamente se establece a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas. Por tal razón, se considera que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificables, que son expuestas no sólo a través de procesos algebraicos sino también mediante gráficas y registros numéricos de tabulación.

Desde un enfoque socioepistemológico, Montiel y Buendía (2013) han reconocido algunas características del pensamiento variacional cuando se estudia acorde a las particularidades de algunos objetos matemáticos. Estas investigadoras, han acuñado el término "pensamiento funcional-trigonométrico" para describir un tipo de pensamiento que "se fundamenta en reconocer que el comportamiento trigonométrico se caracteriza y se distingue de otros comportamientos algebraicos o trascendentales, por su variación y sus variaciones sucesivas: cómo cambia y cómo cambian sus cambios" (p. 188).

De acuerdo con esta mirada consideramos que el desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico esta ligado implícitamente al pensamiento variacional, si se utilizan en el aula de clases software de Geometría Dinámica (por ejemplo: Geogebra), porque su estudio se fundamenta en comprender cómo está variando el movimiento y desde ahí es posible identificar las propiedades que tiene cada función trigonométrica (Montiel y Buendía, 2013).

METODOLOGÍA

Este estudio se encuentra enmarcado en un enfoque cualitativo de investigación y el método que se utilizó fue el análisis de contenido. Este método se considera como una "técnica que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual está determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto" (Pino y Blanco, 2008, p. 73). Basados en dicha descripción, observamos que este método intenta generar razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados en cualquier tipo de lenguaje que exprese comunicación (por ejemplo: verbal, escrito, pictográfico,…); a causa de ello, consideramos que sea posible analizar e interpretar la manera en que algunos libros de texto universitarios hacen el tratamiento de las relaciones (razones) y de las funciones trigonométricas.

Para obtener los datos seleccionamos un conjunto de libros de texto que atendieran a los siguientes criterios: (i) que sean textos recomendados por los departamentos de ciencias básicas en algunas universidades de Medellín-Colombia, (ii) que sean utilizados por los estudiantes en la asignatura de matemáticas durante el primer año de universidad y finalmente, (iii) que desarrolle, las temáticas propias de la trigonometría plana, tanto en el triángulo rectángulo como en la circunferencia goniométrica.

En la Tabla 2 se presenta la lista de los libros de texto que fueron seleccionados y analizados para interpretar la manera en que se hace el tratamiento de las razones a las funciones trigonométricas.

Tabla 2. Libros de texto que fueron seleccionados para realizar este estudio.

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Buriticá, B	2012	*Algebra y Trigonometría*	tercera	U de A (Programa U de @)
Stewart, J, Redlin, L, Watson, S	2012	*Precálculo Matemáticas para el cálculo*	Sexta	Cengage Learning
Swokowsky, E. W, Cole, J. A	2009	*Algebra y Trigonometría con geometría analítica*	Décimo segunda	Cengage Learning
Díez, L. H	2009	*Matemáticas operativa*	Décimo sexta	Díez Mejía
Sullivan, M	2007	*Álgebra y Trigonometría*	Séptima	Pearson

Para hacer el respectivo análisis realizamos un proceso de codificación en el que determinamos la presencia de dos términos, a saber: “razones” y “funciones”. Dichos términos los analizamos en el contexto en el cual fueron usados en los libros de texto e interpretamos sus significados. Posteriormente establecimos un conjunto de tres categorías, las cuales emergieron en nuestro propósito de comprender los aspectos relevantes que se originan en el tratamiento de las razones y las funciones trigonométricas. Estos hallazgos fueron triangulados entre los diversos textos, para luego ser divulgados y discutidos con expertos en esta temática.

ALGUNOS HALLAZGOS

Los resultados de este análisis confirman las conclusiones de Tavera y Villa-Ochoa (2013) quienes señalan que los libros de textos abordan la temática de las razones trigonométricas haciendo especial énfasis en el uso de ecuaciones lineales, donde los valores a encontrar (por ejemplo: lados y ángulos agudos de un triángulo rectángulo) se presentan como incógnitas, los cuales son asumidos como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades que varían para poder establecer ciertas relaciones funcionales. En este artículo centramos la atención en dos aspectos, a saber: (i) usos de los términos relaciones (razones) y funciones, y (ii) la transición entre las razones y las funciones.

Usos de los términos relaciones (razones) y funciones

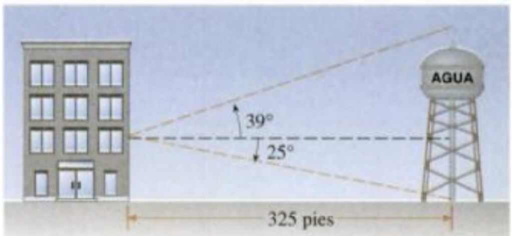
En las Tablas 3 y 4 se presentan algunas de las tareas propuestas por los libros de textos analizados, que al solucionarlas ejemplifican lo dicho anteriormente.

Tabla 3.

Si $\cos\theta = \frac{3}{4}$, dibuje un triángulo rectángulo con un ángulo, θ, y determine las otras cinco razones trigonométricas de θ.	Una escalera de 10 m de largo está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 1 m de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado entre la escalera y el edificio?

Fuente: Buriticá (2012, p. 128)

Tabla 4.

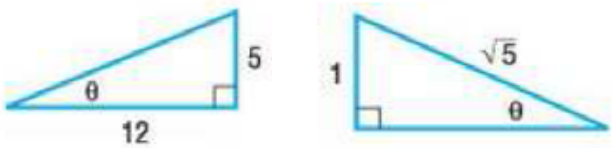
Altura de una torre Una torre de agua se localiza a 325 pies de un edificio (véase la figura). Desde una ventana en el edificio, un observador nota que el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es de 39° y que el ángulo de depresión respecto a la base de la torre es de 25°. ¿Qué tan alta es la torre? ¿A qué altura está la ventana?	

Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 450)

Los libros de texto seleccionados para este análisis hacen un uso indiscriminado de los términos “razones” y “funciones”; dado que en los enunciados de las tareas propuestas algunas veces emplean las palabras: “hallar las funciones trigonométricas del ángulo θ” y al resolverlas, identificamos que se utilizan las razones trigonométricas. Conforme Montiel y Buendía (2013) han señalado, algunas investigaciones informan que existen estudiantes con dificultades para comprender la diferencia que hay entre las razones y las funciones trigonométricas; para este tipo de estudiantes, el uso del libros de texto como el ejemplificado anteriormente, poco aportarían a resolver esas dificultades, pues no hace diferencia de ambos términos ni promueven el desarrollo de ambiente para su comprensión en contextos en los cuales cobraría sentido (por ejemplo: fenómenos de variación).

En la Tabla 5 se muestra algunas tareas propuestas por los libros de texto analizados, que sirven de evidencia para justificar los comentarios anteriores.

Tabla 5.

Encontrar el valor de las funciones trigonométricas del ángulo θ en cada figura 	Dado que sen $\theta = \frac{1}{3}$ y θ es un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las cinco funciones trigonométricas de θ restantes. Dado $\tan\theta = \frac{1}{2}$, θ un ángulo agudo, encuentre el valor exacto de las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

Fuente: Sullivan (2007, p. 510 - 515)

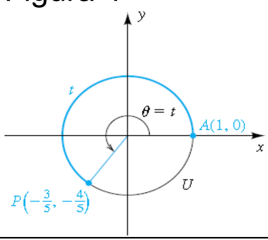
La transición entre razones y funciones trigonométricas

Los libros de textos analizados en este estudio muestran que la transición del tema de las razones a las funciones trigonométricas implica la introducción de coordenadas cartesianas, las cuales sirven para representar el punto de intersección entre el lado terminal de un ángulo y la circunferencia goniométrica. Desde esta perspectiva, se tiene que las relaciones trigonométricas deben de trascender su interpretación geométrica como razón entre dos lados de un triángulo (rectángulo), para considerarse como “distancias dirigidas” en un plano cartesiano.

En el contexto referido anteriormente, la idea de ángulo debe trascender la interpretación que se le da en un triángulo, para asumir posiciones relativas en un plano cartesiano (por ejemplo: la rotación de dos rayos (**R_1** y **R_2**) sobre el origen de un plano cartesiano, donde uno permanece fijo (**R_1**) y el otro gira (**R_2**) para determinar la medida de dicho ángulo). En esta interpretación, no se hace alusión solamente al dominio sobre el cual recaen los valores de los ángulos agudos y obtusos sino que el dominio pasa a ser el conjunto de los números reales.

Conforme hemos mencionado anteriormente, cuando los libros de texto inician el desarrollo de la trigonometría con el estudio de las relaciones trigonométricas en un triángulo rectángulo se generan necesidades de promover cambios en la notación y en la interpretación de algunos de los objetos involucrados, de tal forma que se puedan generar las comprensiones de las funciones trigonométricas. Con relación a esta última temática en la Tabla 6 se exhibe un ejemplo de como son trabajadas, en los libros de texto analizados, las funciones trigonométricas.

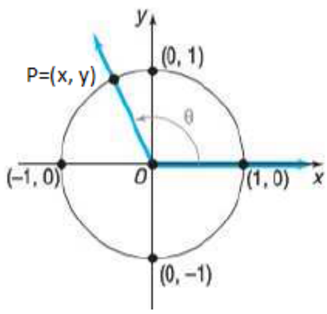
Tabla 6.

Un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria U correspondiente a un número real t se muestra en la figura 4, para $\pi < t < 3\pi/2$. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en t. Solución $\operatorname{sen} t = y = -\frac{4}{5}$ $\quad \cos t = x = -\frac{3}{5}$ $\quad \tan t = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ $\csc t = \frac{1}{y} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$ $\quad \sec t = \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}$ $\quad \cot t = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$	Figura 4 

Fuente: Swokowski y Cole (2009, p. 395)

En la transición de las razones a las funciones trigonométricas los libros de texto introducen un cambio de su notación para representar el dominio y el rango de dichas funciones, sin embargo, no observamos acciones que promuevan el cambio de significado en esa nueva notación. En la Tabla 7 y 8 se muestran dos usos distintos de la variable *x* y la variable *y*.

Tabla 7.

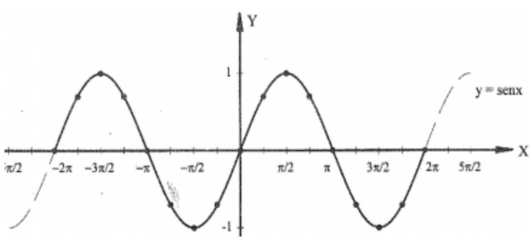
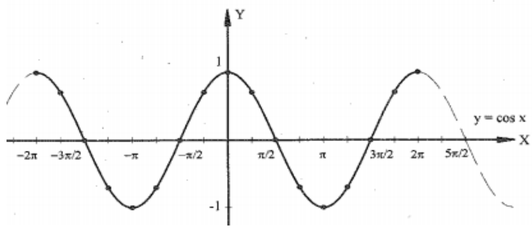
Figura 65 	Sea θ un ángulo en posición normal y sea P = (x, y) el punto de un círculo unitario que corresponde a theta. Vea la figura 65. Entonces, por definición: sen θ = y csc θ = $\frac{1}{y}$, y $\neq 0$ cos θ = x sec θ = $\frac{1}{x}$, x $\neq 0$ tan θ = $\frac{y}{x}$, x $\neq 0$ cot θ = $\frac{x}{y}$, y $\neq 0$

Fuente: Sullivan (2007, p. 541)

En la Tabla 7 podemos observar una manera en que los libros de texto introducen la noción de funciones trigonométricas a través de un círculo unitario representado en el plano *xy*. En esta tabla, tanto el ángulo (theta – variable independiente) como la ordenada (*y* – variable dependiente) y la abscisa (*x* – variable dependiente) se interpretan como variables.

Posteriormente aparecen las gráficas *y*=sen *x*, y *y*=cos *x*, (Tabla 8) en el cual los símbolos *x* y *y* representan la variación entre dos variables (magnitudes no necesariamente geométricas). Cuando estas funciones se interpretan geométricamente, se observa que la variable *x* deja de ser interpretada como abscisa para ser interpretada como el ángulo.

Tabla 8.

Fuente: Díez (2009, p. 123)

Por otra parte, en los libros de texto revisados se observa poco énfasis en los aspectos dinámicos que están en la naturaleza de las nociones de razón, relación y función. En estos textos las tareas planteadas sobre el estudio de la trigonometría plana -tanto en el triángulo rectángulo como en la circunferencia goniométrica- se centran principalmente en la aplicación de procesos algebraicos y estos difícilmente permiten visualizar las situaciones de cambio y de variación que trae consigo misma esta rama de las matemáticas.

CONCLUSIONES

A partir de los resultados de este estudio se observa que existen libros de texto que se preocupan por desarrollar aspectos conceptuales y procedimentales centrados en el tratamiento algebraico, lo cual conlleva a la utilización de símbolos para operar sin preocuparse por sus usos y significados. Conforme como hemos argumentado en este artículo, en algunos textos hacen un cambio de notación pero no de significado. Este aspecto no se observa en coherencia con el desarrollo del “pensamiento funcional-trigonométrico”, dado que Montiel y Buendía (2013) señalan que para abordar éste tipo de pensamiento requiere del uso de un contexto dinámico.

A partir de los resultados de este estudio sugerimos que tanto profesores como investigadores han de estar atentos a los usos y significados que los libros de texto presentan con el fin de proponer estrategias que promuevan los cambios de significados requeridos. Al igual que Montiel y Buendía (2013) sugerimos el diseño de ambientes en los que los estudiantes experimentes procesos de variación, usen y den sentido a las razones y funciones trigonométricas los contextos en los cuales tienen lugar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Kee, S., Mura, R., y Dionne, J. (1996). La compression des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 19 - 27.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 765 - 777.

Jácome, G. (2011). *Estudio socioepistemológico de la razón trigonométrica. Elementos para la construcción de su naturaleza proporcional.* Tesís de maestría no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada, México D. F.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencia.* Bogotá: Magisterio.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de doctorado no publicada, Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada, México D.F.

Montiel, G., y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari, y G. Martínez, *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas* (págs. 169 - 205). México D. F.: Díaz de Santos.

Pino, J., y Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones, 38*, 63 - 88.

Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(7), 881 - 896.

Rezat, S. (2013). The textbook-in-use: students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM Mathematics Education, 45*(5), 659 - 870.

Selva, A., y Borba, M. (2013). *Uso de la Calculadora en los primeros grados de escolaridad.* Medelín - Colombia: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Tavera, F. A. (2013). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas.* Tesís de maestria no publicada, Universidad de Medellín, Ciencias Básicas, Medellín.

Tavera, F. A., y Villa-Ochoa, J. A. (2013). El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas. En A. Ramírez, & Y. Morales, *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe* (págs. 666 - 676). Santo Domingo - República Dominicana: REDUMATE - PUCMM.

Villa-Ochoa, J. A., y Ruiz, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-Geogebra en la visualización de nociones variacionales. *Educação Matemática Pesquisa, 12*(3), 514 - 528.

Weber, K. (2005). Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal, 17*(3), 91 - 112.