

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LAS INTERACCIONES ENTRE LA MATEMÁTICA Y EL CAMPO DE ACCIÓN DE UN FUTURO INGENIERO

Paula Andrea Rendón-Mesa, Pedro Vicente Esteban Duarte, Jhony Alexander Villa-Ochoa

Universidad de Antioquia

Universidad EAFIT. (Colombia)

paula.rendon@udea.edu.co, pesteban@eafit.edu.co, jhony.villa@udea.edu.co

Palabras clave: modelación matemática, educación matemática, ingeniería.

Key words: mathematics modeling, math education, engineering

RESUMEN

La literatura internacional resalta a la modelación matemática como un medio para que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos aplicados a su área de conocimiento y la matematización de diferentes procesos que desarrollan en su formación. Se analiza un episodio proveniente de una investigación cualitativa, que indaga por aspectos que en un ambiente de modelación matemática se articulan con el conocimiento matemático y con las necesidades de formación del ingeniero. Los resultados preliminares sugieren que conocimientos relativos a la ingeniería, otras ciencias y la matemática interactúen y se complementen en un ambiente de modelación matemática.

ABSTRACT

International literature highlights the mathematical modeling as a method for students to understand the mathematical concepts related and used in their area of expertise, as well as the mathematization of different processes in their daily training. Different situations exploring aspects of a mathematical modeling environment related to the mathematical knowledge and the needs of engineering education are analyzed. Preliminary results suggest that acquaintanceship of engineering, mathematics and other sciences actually complement each other in an environment of mathematical modeling.

■ El papel de la matemática y la modelación en la formación de ingenieros

En el ámbito académico internacional existe la preocupación por identificar algunos desafíos de la formación de un ingeniero. En particular, asociaciones relacionadas con la educación en ingeniería como ACOFI (Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería), ASOBEI (Asociación Iberoamericana de Instituciones de enseñanza de Ingeniería), IFFES (International Federation of Engineering Education Societies), NAE (National Academy of Engineering), entre otras; se han interesado porque las instituciones de formación para este tipo de profesionales involucren aspectos académicos y contextuales, de tal manera que la formación de los ingenieros responda a las exigencias de la sociedad en correspondencia con la solución de problemas. En este mismo sentido, Romo-Vazquez (2009) establece la necesidad de generar un equilibrio entre teoría y práctica con el ánimo de que los estudiantes puedan resolver problemas involucrando la matemática. Sin embargo, lograr generar estas relaciones es un desafío para la formación en ingeniería y en educación matemática.

En la literatura internacional se muestra que a través de la modelación matemática los estudiantes se comprometen, no sólo con la producción de modelos matemáticos, sino también con la creación, ingenio y valoración del conocimiento y lograr atender a las necesidades derivadas de un contexto y, dado el caso, intervenirlo (Biembengut & Hein, 2004). Este tipo de posibilidades que ofrece la modelación hacen que se observe como una herramienta que articula en la formación de ingenieros los conocimientos en ciencias y la transformación de los recursos a su disposición en servicios y productos útiles a la sociedad (Covarrubias, 1998; Cardella, 2010). De esta manera las matemáticas, en el aula de clase, deben superar el aspecto teórico y algorítmico y poner de relieve que los conocimientos adquiridos por estos futuros profesionales sean contextualizados, tengan significado y relación con el futuro campo profesional.

De modo general, la modelación matemática puede reconocerse como una manera de establecer diálogos entre dos dominios de conocimiento, a saber: uno denominado matemático y el otro asociado al contexto generalmente denominado “mundo real” (Lesh & Caylor, 2007). Pensar en la modelación como un “diálogo” o interacción entre la “realidad” y las matemáticas permite suponer que al implementarla en el aula de clase permitiría tales “diálogos” e interacciones con el conocimiento requerido por el futuro ingeniero para su desempeño profesional. En correspondencia con esta idea, en este artículo nos preocupamos por analizar un episodio en el que un conjunto de estudiantes de ingeniería de Diseño de Producto desarrollan un proceso de modelación que les permite trascender una mirada artificial de las matemáticas para reconocer el uso que ellas tiene en la resolución de problemas de su campo profesional.

En el episodio se analizaron algunas características del ambiente en el cual se desarrolló la modelación y se generó una aproximación a las interacciones entre las matemáticas y el campo de acción del ingeniero. A continuación se presenta una experiencia investigativa que pretende reconocer la modelación matemática como alternativa para lograr interacción entre diversos dominios de conocimiento.

■ Una investigación en ingeniería de diseño de producto

En la Universidad EAFIT (Medellín, Colombia) se consideró que la modelación matemática posibilita en el aula de clase el establecimiento de relaciones entre los saberes disciplinares del diseño y las matemáticas; además, se consideró que a través de ella los estudiantes pueden poner en práctica los conocimientos adquiridos en su proceso formativo. Es por esto que, desde el año 2006, se viene implementando una asignatura llamada *modelación matemática* en el Programa de Ingeniería de Diseño de Producto que busca “sensibilizar al estudiante mediante la observación y la construcción de objetos concretos, partiendo de la comprensión de conceptos matemáticos, para dotarlos de herramientas matemáticas básicas para que las integren a su entorno y las relacionen con elementos del diseño” (EAFIT, 2006, p. 2). Dicha asignatura pretende que el estudiante alcance una ampliación conceptual y un conocimiento integrado de las disciplinas.

La propuesta formativa en *Ingeniería de Diseño de Producto* propende porque los estudiantes reconozcan, no solamente las formas con las que determinan sus diseños, las ecuaciones o expresiones funcionales particulares y las características específicas (área, perímetro, entre otros), sino también cómo la matemática apoya sus necesidades de formación. En correspondencia con lo anterior se viene adelantando una investigación cualitativa que indaga por aspectos de la modelación matemática que propician la interacción entre la matemática y las necesidades de formación de un ingeniero.

En un primer estudio, Rendón-Mesa y Esteban (2013) observaron que los estudiantes que participaban de esta asignatura desarrollaban proyectos de modelación matemática en los que ponían en juego sus conocimientos del Diseño, pero el conocimiento matemático estaba desconectado del resto del proceso, ante este panorama los investigadores sugirieron mayores acciones que posibilitaran una articulación de las matemáticas y los demás conocimientos propios de la ingeniería de diseño. Atendiendo a esta recomendación, en el primer semestre de 2014, el desarrollo de proyectos por parte de los estudiantes incluyó dos nuevas características, a saber: la problematización y el diálogo con expertos durante todo el proceso de elaboración del proyecto.

En el presente artículo analizamos un episodio en el que los estudiantes desarrollaron proyectos de modelación; durante su desarrollo los estudiantes recibían asesorías periódicamente por parte de la investigadora; en las asesorías, la investigadora problematizaba los avances que los estudiantes iban desarrollando y promovía reflexiones sobre el rol de las matemáticas en el estudio de fenómeno o en el diseño del producto. Otro aspecto que se incluyó en el ambiente de trabajo, fue la presencia de expertos (diseñadores, matemáticos, físicos, ortopedistas, entre otros) con quienes los estudiantes dialogaron y conjugaron los conocimientos y aportaron a la solución del problema definido. Para el análisis centramos la atención en las producciones de los estudiantes relacionadas con el diseño y la creación de objetos; allí buscamos de reconocer las interacciones entre las matemáticas y el campo de acción de un futuro ingeniero de diseño de producto a partir de la modelación matemática.

■ El episodio

El episodio que se analiza en este documento se desprende de la experiencia de aula desarrollada en el primer semestre de 2014. La experiencia se desarrolló en diversos momentos; primero, los estudiantes reconocieron las problemáticas y necesidades que debían atender a través del diseño de objeto. Un

grupo de estudiantes realizó la exploración de un termo y reconocieron que un atleta cuando está en competencia puede perder la atención y la proyección visual al tomar agua. Esta idea inicial posibilitó a los estudiantes proponer un rediseño para el termo el cual definieron así: *“el diseño se realizara con el propósito de hacer más interesante y más accesible la forma de tomar agua sin necesidad de acercar y/o pegar la boca al orificio por medio de la presión, logrando darle un nuevo diseño al termo tradicional y comprender el fenómeno físico de la presión”* [justificación presentada por los estudiantes frente al objeto a modelar]. Esta idea pone en evidencia la importancia de que los estudiantes logren relacionar sus aprendizajes matemáticos y del diseño adquiridos en su proceso formativo y relacionarlos.

Luego que los estudiantes reconocieron aspectos estéticos y funcionales del diseño, se cuestionaron acerca de *¿Cuál es la presión necesaria para que el líquido salga de un termo de forma óptima, es decir, pueda suministrar líquido a un atleta solo destapándolo?* Esta pregunta les permitió a los estudiantes reflexionar sobre las condiciones de diseño, físicas y matemáticas, entre otras que debe tener el termo para que el líquido pueda desplazarse como ellos lo proponen. Esta situación está en correspondencia con lo propuesto por diversos autores (Greer, 1997; Masingila, Davidenko, & Prus-Wisniowska, 1996; Meaney & Lange, 2013) que plantean la importancia que el estudiante puede reconocer el contexto cercano y relacionarlo con su campo de acción como una herramienta fundamental que le permite apropiarse de conocimientos no solo matemáticos, como lo requiere la formación en ingeniería (Espinosa, 2008), sino también que pueda plantear una integración entre los conocimientos teóricos y prácticos.

El diseño propuesto por los estudiantes no tuvo cambios sustanciales respecto a un termo tradicional, puesto que la ergonomía del producto (posición de agarre de la mano) es adecuada para el usuario, en este caso un atleta. Sin embargo, las transformaciones del producto radicarón en el sistema de presión que los estudiantes implementaron en la base del termo, propiamente una válvula (Fig. 1) que funcionó a partir de una bomba de aire (inflador). Tal dispositivo permitió el aumento de la presión al interior del contenedor para que este pudiera liberarlo con propulsión.

Los estudiantes reconocieron las formas geométricas para estructurar el diseño del objeto, describieron la nueva propuesta y presentaron los modelos gráficos (Fig. 1). En la descripción los estudiantes apuntaron que *“[el termo] en general presenta formas cilíndricas, de diferentes alturas y diámetros, ya que es lo más adecuado para distribuir la presión de forma homogénea en su interior. Inclusive, si las paredes fueran planas éstas tenderían a ‘embombarse’ y adoptar una forma cilíndrica”*. Esta descripción da cuenta de cómo la exploración de las relaciones matemáticas se hace de una forma más reflexiva y no artificial trascendiendo la situación reportada por Rendón-Mesa y Esteban (2013).

Fig 1. Dibujo del sistema de termo



Fig 2. Geometrización del termo



Cuando los estudiantes concluyeron la definición formal y funcional del diseño, iniciaron un segundo momento el cual consistió en solucionar la pregunta que problematizó el objeto. Con el ánimo de determinar la presión necesaria requerida para el termo, los estudiantes indagaron por los conceptos físicos y matemáticos necesarios para la solución de este problema de diseño. Con la ayuda de un profesor de cálculo, los estudiantes matematizaron el problema (Fig. 3) y con el apoyo de un profesor de física encontraron la presión necesaria que debía suministrársele al termo y la velocidad con la que el líquido saldría.

La vinculación con expertos en matemáticas, física y diseño le permitió a los estudiantes reconocer la importancia de poner en diálogo diversos campos de saber para encontrar la solución de los problemas. Tal circunstancia puede apreciarse en el momento que los estudiantes instalaron el dispositivo y lograron que este cumpliera con su funcionalidad. Además, el termo tuvo presente características indispensables del diseño como son la originalidad, la creatividad, la calidad, la funcionalidad, entre otros. En este caso los modelos de diseño (dibujos, vistas, geometrificaciones) y de las matemáticas (relaciones entre variables, ecuaciones) generaron interacciones entre la matemática y diversos campos de acción, evidenciado en el uso de conceptos físicos y procedimientos matemáticos, además de la instalación del dispositivo funcional. Tales acciones posibilitaron a los estudiantes la comprensión y el acercamiento a una posible solución del problema planteado.

Un tercer y último momento que se vivió en el proceso estuvo relacionado con la construcción del termo y su dispositivo para la propulsión del agua. En este momento, los estudiantes reconocieron la práctica experiencial como uno de los recursos más importantes para comprender las ideas formuladas y la validación de los procesos y procedimientos realizados. Los estudiantes expresaron conclusiones como: *“teniendo el termo vertical con la boquilla hacia abajo la presión necesaria para alterar la velocidad en el chorro tiene que ser más de 0.85 bar, para hacer esta alteración se debe superar la presión atmosférica. Además, la velocidad depende de la altura a la que se encuentra el líquido y si la presión es mayor a los*

3000 pascales el termo experimentaría malformaciones y se dañaría la tapa”, las cuales se encuentran en correspondencia por lo expuesto en la literatura (Brito-Vallina, Alemán-Romero, Fraga-Guerra, Paragarcía, & Arias-de Tapia, 2011; Zawojewski, Diefes-Dux, & Bowman, 2008) donde se reconoce que la aplicación y la matematización se condicionan y se dan sentido mutuamente.

Fig. 3. Matematización de la velocidad y la presión del líquido contenido en el termo

• PRESIÓN ATMOSFERICA: 0.25 bar (NEDELLIN)
 • PRESIÓN DEL AGUA EN EL TERMO:
 $P = d \cdot g \cdot h$
 $P = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.165 \text{ m})$
 $P = 1617 \text{ Pa} = 0.02 \text{ bar}$

• ECUACIÓN DE BERNOULLI:
 $P_1 + \frac{1}{2} d v_1^2 + dgh = P_2 + \frac{1}{2} d v_2^2$, DONDE P_0 PRESIÓN ATMOSFERICA

• ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:
 $S_1 v_1 = S_2 v_2$, DONDE $S = \text{AREA}$.

• EXPANSIÓN DEL GAS:
 $P_0 S_1 (H - h_0) = P_1 S_1 (H - h)$

\Rightarrow UNIENDO LAS TRES FORMULAS ANTERIORES TENEMOS:

$$v_2^2 = \frac{P_0 (H - h_0)}{H - h} + dgh - P_{at}$$

$$\frac{\frac{1}{2} d (1 - \frac{S_2^2}{S_1^2})}{\frac{1}{2} d (1 - \frac{S_2^2}{S_1^2})}$$

DONDE:
 H: ALURA DEL TERMO = 0.194m
 h: ALURA EN UN MOMENTO*: VARIA
 h₀: ALURA INICIAL DEL AGUA = 0.165m
 P₀: PRESIÓN CON EL INFLADOR = 20bar = 200.000 Pa
 P_{atm}: PRESIÓN ATMOSFERICA = 2000 Pa
 d: DENSIDAD EN EL AGUA = 1000 kg/m³
 S₂: AREA DEL ORIFICIO DE SANGRA = 1.16 * 10⁻⁴ m²
 S₁: AREA DEL TERMO = 3.8 * 10⁻³ m²

SUSTITUYENDO:

$$v_2 = \frac{200.000 \text{ Pa} (0.194 \text{ m} - 0.165 \text{ m}) + (1000 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.165 \text{ m}) - 2000 \text{ Pa}}{(0.194 \text{ m} - 0.165 \text{ m})}$$

$$\frac{\frac{1}{2} (1000 \text{ kg/m}^3) \left(1 - \frac{(1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2}{(3.8 \times 10^{-3} \text{ m}^2)^2} \right)}{\frac{1}{2} (1000 \text{ kg/m}^3) \left(1 - \frac{(1.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2}{(3.8 \times 10^{-3} \text{ m}^2)^2} \right)}$$

$$v_2 = \sqrt{399.6 \text{ m}^2/\text{s}^2}$$

$$v_2 = 19.99 \text{ m/s}$$

■ Discusión y conclusiones

En contraste con la desarticulación entre las matemáticas y el campo acción de un ingeniero (Rendon-Mesa y Esteban, 2013), este episodio da cuenta que la *problematización* de las producción hechas por los estudiantes y el *diálogo con expertos* se consolidan como estrategias para vincular las matemáticas, el diseño y otras disciplinas a la solución de las problemáticas reconocidas por los estudiantes. Estas dos estrategias generan dinámicas que permiten superar la visión atomizada de los conocimientos y por ende ofrecer al futuro ingeniero de habilidades importantes para su desempeño en el campo laboral como solucionar, verificar, validar, conceptualizar, analizar, comunicar, entre otras, las cuales se encuentra en correspondencia con la modelación matemática (Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Perrenet & Zwaneveld, 2012).

De acuerdo a lo anterior, los proyectos de modelación matemática desarrollados por los estudiantes no solo tuvieron presente la producción y uso de modelos matemáticos sino también la presencia de conocimientos de la física y el diseño de producto. Estos elementos sugieren que cuando la modelación matemática se asume como una estrategia que atiende a las necesidades de formación de profesionales (en este caso los ingenieros de diseño de producto) debe “convivir” con otras formas de modelación (en física y diseño de productos) sin subordinarse entre ellas. Experiencias como las presentadas en este artículo sugieren que la modelación matemática tiene otras intencionalidades (no solo aprender matemáticas) y, por tanto, adquiere nuevos matices en la forma de implementarse en el aula de clase. La determinación de estos matices sigue motivando el desarrollo de nuestra investigación.

■ Referencias bibliográficas

- Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105–125.
- Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Brito-Vallina, M., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J. L., & Arias-de Tapia, R. I. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, 14(2), 129–139.
- Cardella, M. (2010). Mathematical Modeling in Engineering Design Projects. In P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 87–98). New York: Springer
- Covarrubias, J. (1998). Tres documentos sobre la formación de ingenieros. *Ingenierías*, 1(1), 5–9.
- EAFIT, U. (2006). Programa de Modelación Matemática. Recuperado de <http://www.eafit.edu.co/programas-academicos/pregrados/ingenieria-diseno-producto/acerca-programa/Paginas/que-es-idp.aspx#.U5m5IPmSx2A>
- Espinosa, D. (2008). La formación matemática en la educación superior. *El Hombre Y La Máquina*, (31), 52–62.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, 7(4), 293–307. doi:10.1016/S0959-4752(97)00006-6
- Lesh, R., & Caylor, B. (2007). Introduction to the Special Issue: Modeling as Application versus Modeling as a Way to Create Mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(3), 173–194.
- Masingila, J. O., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics*, 31(1-2), 175–200. doi:10.1007/BF00143931
- Meaney, T., & Lange, T. (2013). Learners in Transition Between Contexts. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 169–201). Springer New York. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_6
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3–21.
- Rendón-Mesa, P. & Esteban, P. (2013). La modelación matemática en ingeniería de diseño. En: A. Ramirez & Y. Morales (Eds.), *Memorias I Congreso de Educación Matemática de América Central y*

del Caribe. (pp.942-949) Santo Domingo: PUCMM y REDUMATE. de http://www.centroedumatematica.com/cemacyc/index.php?conference=i_cemacyc&schedConf=i_cemacyc

Romo-Vazquez, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs.* Thèse de doctorat en Didactique des mathématiques. Paris: Université Paris Diderot Retrieved from <http://www.theses.fr/2009PA070029>

Zawojewski, J. S., Diefes-Dux, H., & Bowman, K. (2008). *Models and modeling in engineering education: Designing experiences for all students.* Rotterdam:Sense.