

# GeoGebra en diferentes escenarios de actuación

**Juan Luis Prieto González**

Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática, Departamento de Matemáticas y Física, Universidad del Zulia  
Maracaibo, República Bolivariana de Venezuela  
juanl.prietog@com

Fecha de recepción: 20/04/2016

Fecha de aceptación: 25/11/2016

Pág: 9 – 23

## Resumen

En el año 2011 nace el Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática como un colectivo de profesores y estudiantes para profesores de Matemática, dedicado a realizar aportes concretos al desarrollo profesional docente en el uso de las tecnologías digitales con propósitos de enseñanza y aprendizaje. Desde el momento de su constitución, el software libre GeoGebra ha ocupado un lugar importante en las actividades desarrolladas por este colectivo, convirtiéndose en su principal herramienta de trabajo. Mediante el uso del GeoGebra ha sido posible atender a las demandas de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, surgidas en las propias realidades escolares en las que nos insertamos. Las reflexiones sobre nuestro accionar han favorecido el establecimiento de determinadas formas de participación del Grupo TEM en estas realidades, las cuales se organizan en cuatro escenarios de actuación: (i) formación profesional, (ii) recursos para el aprendizaje, (iii) labor social e (iv) investigación. En este trabajo se describen algunas aplicaciones del GeoGebra en estos escenarios, citando ejemplos provenientes de los trabajos, presentaciones, talleres u otras actividades emprendidas por el grupo en los últimos años.

**Palabras Clave:** Educación Matemática, Tecnologías digitales, GeoGebra.

## Introducción

En las últimas décadas, los avances en el campo de la investigación en Educación Matemática han permitido, por un lado, comprender la influencia que las tecnologías digitales han tenido en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en diferentes niveles escolares[11] y, por otro lado, conocer los principales desafíos que representa la integración de estos medios en la actividad matemática escolar[1]. El término “tecnologías digitales” hace referencia a una amplia gama de dispositivos que combinan los elementos tradicionales del hardware (almacenamiento, procesamiento y representación de datos) y software (sistema operativo y programas de aplicación) para la realización de determinadas actividades humanas de carácter

técnico, comunicativo, de consumo y educativo[5]. En el ámbito de la Educación Matemática, actualmente se cuenta con una variedad de tecnologías digitales ideales para el tratamiento de los contenidos escolares, entre ellas, los sistemas de geometría dinámica, sistemas de álgebra computacional o CAS, programas de matemática dinámica, hojas de cálculo, pizarras interactivas, calculadoras científicas, simuladores, animaciones, vídeos, repositorios de recursos, entre otras.

A pesar de contar con estos recursos, la integración de las tecnologías digitales en las clases de matemática sigue siendo un proceso lento y complicado para muchos profesores[14][16], quienes en ocasiones ven frustrados sus intentos de apoyarse en estas tecnologías por diferentes razones: (i) dificultades en el manejo básico de los dispositivos y aplicaciones disponibles, (ii) desconocimiento de formas de implementar eficientemente estas tecnologías para promover el aprendizaje matemático [6], (iii) escasa reflexión sobre las relaciones entre la tecnología utilizada, las características de las tareas propuestas y el tipo de actividad matemática desarrollada, y (iv) restricciones en el acceso a los dispositivos y espacios habilitados con computadoras en los propios centros de trabajo, cuestión que es recurrente en algunas instituciones escolares de la región.

Frente a esta realidad, los investigadores coinciden en que el desarrollo profesional del profesor es un aspecto fundamental para la superación de los problemas relacionados con la integración de tecnologías digitales en clases de matemática[8][17][19]. Para Simon (2010)[25], el *desarrollo profesional* se manifiesta en los cambios en el conocimiento, creencias, actitudes y habilidades de los profesores en servicio o en formación, que apoyan la competencia de estos sujetos para implementar exitosamente el currículo de matemática. Desde esta perspectiva, es posible considerar al diseño, puesta en práctica y evaluación de oportunidades de desarrollo profesional para profesores y estudiantes para profesores de matemática, como una alternativa que favorece, en gran medida, el surgimiento de nuevos métodos y medios para la integración eficiente de tecnologías digitales en la actividad matemática del aula[3][16][23].

Es importante destacar que estos procesos (diseño, puesta en práctica y evaluación) se apoyan en un conocimiento sobre la tecnología incorporada a las oportunidades de desarrollo profesional, que trasciende la mera experiencia práctica y del cual se requiere un cierto nivel de destrezas. Al respecto, Hohenwarter, Hohenwarter y Lavicza (2008)[11] vinculan la calidad del desarrollo profesional del profesorado con el conocimiento de las formas en las cuales las tecnologías digitales puede ser introducida más eficientemente a grupos “no expertos”, de manera que se reduzcan considerablemente las dificultades inherentes a su implementación. En nuestro caso, desde la conformación del Grupo *TEM: Tecnologías en la Educación Matemática en 2011*, hemos optado por incorporar el software GeoGebra en todas nuestras propuestas de acción, dirigidas hacia el desarrollo profesional de profesores y estudiantes para profesores que tienen interés en este tipo de tecnologías digitales.

Sin embargo, a pesar de la experiencia acumulada, se hace necesario reflexionar profundamente sobre el lugar que ha ocupado el GeoGebra en cada una de las actividades de nuestro colectivo, con el fin de hacer más eficiente nuestra labor en procura de la verdadera integración de las tecnologías digitales en las prácticas de los profesores y estudiantes para

profesores de matemática de la región. Como producto de nuestras primeras reflexiones al respecto, a continuación se describen las aplicaciones que ha tenido el GeoGebra en los diferentes escenarios de actuación del Grupo TEM durante los últimos años.

## GeoGebra y sus aplicaciones en la Educación Matemática.

GeoGebra<sup>1</sup> es un software libre de matemática dinámica que combina las bondades de los entornos de geometría dinámica con funciones propias de los CAS y las hojas de cálculo, todo en una sola aplicación[11]. En un principio, el GeoGebra fue creado como un entorno para la multi-representación y el establecimiento de conexiones entre nociones de Geometría 2D, Algebra y Cálculo, lo cual era difícil de lograr con las tecnologías disponibles en aquel momento. Con el tiempo y mediante una interfaz versátil y amigable, al GeoGebra se han integrado herramientas con las cuales es posible explorar contenidos de Geometría 3D, Estadística y Probabilidades. Desde una perspectiva de aprendizaje, la integración del GeoGebra a las clases de Matemática ha favorecido el desarrollo de las capacidades de los estudiantes para la experimentación, visualización y reconocimiento de invariantes matemáticas, como consecuencia de la interacción de estos sujetos con los objetos representados en su vista gráfica[13].

En lo que respecta a la enseñanza, existe un interés creciente en los profesores por crear materiales con GeoGebra para ser aplicados con sus estudiantes y, posteriormente, ser compartidos con otros colegas a través de un repositorio dispuesto por el Instituto GeoGebra Internacional. Hasta el momento, se cuenta con más de 300.000 recursos libres e interactivos, que profesores de todo el mundo han compartido a través de este repositorio. Este esfuerzo de apropiación del GeoGebra puede tener implicaciones importantes en la actitud, confianza y destreza de los profesores con el software, ayudándoles a entender estos medios como apoyos al aprendizaje y no como fines en sí mismo[19]. De todos los tipos de materiales creados y compartidos por los profesores, destacan los simuladores de fenómenos reales, matemáticos y naturales, que han llegado a integrarse progresivamente al escenario escolar. En nuestro caso, por experiencia sabemos que la elaboración de simuladores con GeoGebra representa una oportunidad más para la promoción del aprendizaje matemático en los estudiantes y profesores.

Más concretamente, en este trabajo hemos asumido la perspectiva de Hohenwarter y Fuchs (2004)[12] sobre la aplicación del GeoGebra en situaciones de enseñanza y aprendizaje de la matemática, por considerarla útil para la descripción de los usos dados al software en nuestros escenarios de actuación. Una explicación ampliada de esta categorización, se presenta a continuación:

- Como una *herramienta de visualización*. GeoGebra puede ser usado para ofrecer una perspectiva dinámica de los conceptos y relaciones matemáticas, desde múltiples registros de representación[7][21]. De esta manera, los sujetos tienen la posibilidad de “ver” y “explorar” el conocimiento matemático que, muchas veces, es inaccesible con otros dispositivos. Por ejemplo, al modificar la representación geométrica de una función real

---

<sup>1</sup>El GeoGebra puede ser descargado gratuitamente en: <http://www.geogebra.org/download>.

a través del arrastre, los parámetros asociados a la fórmula correspondiente (registro numérico-algebraico) se modifican en tiempo real. De igual manera, al modificar los parámetros de una función real en la ventana algebraica, la representación gráfica asociada se ajusta inmediatamente.

- Como una *herramienta de construcción*. GeoGebra permite la creación y manipulación de construcciones geométricas en 2D y 3D, con altos niveles de libertad y consistencia, favoreciendo con ello el estudio de objetos de la geometría euclidiana y analítica[18].
- Como una *herramienta de descubrimiento*. Un uso apropiado del GeoGebra puede favorecer el descubrimiento de patrones, regularidades o invariantes matemáticas (por ejemplo, invariantes geométricas) sobre los objetos mostrados en su interfaz, que acercan a los estudiantes con el conocimiento matemático institucionalizado.
- Como una *herramienta para la representación y comunicación del conocimiento matemático*. GeoGebra ofrece a los profesores un entorno amigable para la elaboración de materiales dinámicos a través de los cuales pueden representar y comunicar los conceptos y relaciones matemáticas a sus estudiantes [24]

## Escenarios de actuación del grupo.

Desde su conformación, el Grupo TEM se ha dedicado a desarrollar un conjunto de actividades orientadas hacia la integración eficiente de las tecnologías digitales en la dinámica de enseñanza y aprendizaje de la matemática propia de los diversos contextos escolares. Con el tiempo, estas actividades fueron enmarcadas en cuatro (04) escenarios de actuación (formación profesional, recursos para el aprendizaje, labor social e investigación) que determinan las principales líneas de trabajo del colectivo y fundamentan su identidad[2]. A continuación, se describe cada escenario de actuación del Grupo TEM destacando algunos de los usos que se han dado al GeoGebra en el desarrollo de las actividades asociadas.

### Formación profesional

Ya que el uso eficiente de las tecnologías digitales en el aula depende, en gran medida, del profesorado[20], el escenario de formación profesional comprende la realización de dos tipos de actividades formativas: (i) aquellas orientadas al diseño, puesta en práctica y mejora de oportunidades de capacitación docente en el uso del GeoGebra con propósitos didácticos, y (ii) aquellas que consisten en la actualización permanente de los integrantes del Grupo TEM en diferentes tópicos vinculados a lo anterior, tales como: las ventajas de la representación de contenidos matemáticos escolares con el GeoGebra, las distintas maneras de usar el software para favorecer la visualización y experimentación matemática, la elaboración de recursos didácticos con apoyo del GeoGebra, el aprendizaje matemático a través de actividades no convencionales que incorporan al GeoGebra, entre otros. Los tópicos son propuestos a partir de los intereses del colectivo y son tratados mediante encuentros guiados por los mismos voluntarios (ver Fig. 1).



Figura 1: Muestra de las actividades de formación profesional.

Como puede notarse, en este escenario, el GeoGebra cumple un rol fundamental para el desarrollo de ambas actividades. Por ejemplo, en el marco del desarrollo de un taller de formación docente en la enseñanza de funciones con GeoGebra, realizado en 2014, los facilitadores diseñaron un conjunto de tareas de variación entre magnitudes geométricas que se consideran propicias para la introducción del GeoGebra en el estudio de la noción de función real, sus elementos y características básicas (ver Fig. 2).

#### TAREA 1. LA CORTINA

El espacio entre la escalera, la pared norte y el suelo de la planta baja del apartamento de Carmen forman un triángulo rectángulo isósceles  $ABC$  cuyos catetos miden 3 metros, como se muestra a la derecha.

Carmen desea cubrir este espacio con una cortina rectangular, pero aún no se decide por cuánta cantidad de tela comprar. En esta situación:

- ¿Qué medidas se ponen en juego? ¿Qué valores posibles pueden tomar estas medidas? ¿Existe alguna dependencia entre ellas? Explica tu respuesta.
- Deduzca el modelo matemático (fórmula o ley de correspondencia) que defina la relación entre cada par de medidas puestas en juego.
- ¿Cuál es el área del rectángulo formado cuando la cortina mide 2 metros de ancho? Responda esta misma pregunta para un ancho de 2,5 m.
- Carmen quiere cubrir un área máxima posible con esta cortina. ¿Qué medidas debe elegir?
- ¿Es posible usar una cortina de  $1,25 \text{ m}^2$ ? De ser posible, ¿cuáles pueden ser sus medidas? Responda la misma pregunta para valores de área iguales a  $1,5 \text{ m}^2$  y  $3 \text{ m}^2$ .
- Ahora tenemos el siguiente recurso con GeoGebra (ver el archivo A2-1.ggb). ¿Cómo lo podemos usar para responder las preguntas c), d) y e)? ¿Qué valor puedes darle a su uso?
- ¿Bajo qué condiciones de la clase es posible implementar este recurso para enseñar funciones a tus estudiantes? (Supón que trabajas con cursos de segundo, tercero o cuarto año de bachillerato).

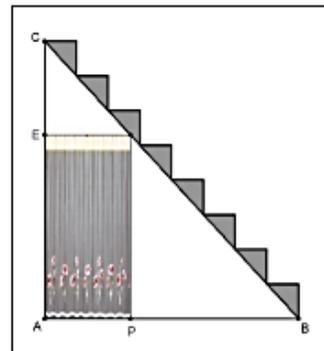


Figura 2: Tarea diseñada para el taller Enseñanza de Funciones con GeoGebra.

La manera de abordar estas tareas durante el taller, para promover la integración del GeoGebra en el pensamiento del profesorado, consideró tres etapas. En la primera etapa los participantes resolvieron las tareas en un contexto de lápiz y papel, haciendo uso de su conocimiento matemático sobre el contenido implícito en ellas. En la segunda etapa, los facilitadores discutieron formas de abordar las mismas tareas, utilizando recursos creados con GeoGebra e incluyendo una explicación de cómo elaborarlos. En la discusión, el software es usado para visualizar y explorar las relaciones y conceptos matemáticos subyacentes en cada situación propuesta [7]. La tercera etapa incluye una discusión de las potencialidades y limitaciones didácticas de los recursos con GeoGebra, como los presentados en la etapa anterior, para el abordaje de las tareas matemáticas que organizan la actividad del aula, así como los aspectos que cambian cuando se incorpora la tecnología.

Otro ejemplo de esta clase de actividades formativas lo constituye la diagramación con GeoGebra, un contexto desde el cual el profesorado puede desarrollar conocimiento y habilidades relacionadas con los contenidos geométricos escolares, las conexiones entre Matemática y realidad y el uso instrumental del GeoGebra en la enseñanza. En líneas generales, la diagramación con GeoGebra es un proceso que consiste en la selección de un objeto de la realidad que luego pasa a ser representado con el software desde algún ángulo o perspectiva. Durante la representación, los profesores modelan las formas de la realidad, aludidas por el objeto, a través de dibujos geométricos que se construyen con las herramientas del programa. Esta clase de dibujos se conocen como “dibujos dinámicos” y su consistencia depende directamente de las propiedades geométricas que le son impuestas por los usuarios en su construcción [15].

En la Fig. 3 se muestra un ejemplo de diagramación con GeoGebra, vinculado a la representación del ventanal central del Teatro Baralt de la ciudad Maracaibo, que realizara un participante de la Micromisión Simón Rodríguez (área Matemática) en el año 2015. Este profesor vinculó las formas presentes en el ventanal con los objetos geométricos: circunferencia, rombo y rotación de figuras planas. En este caso, el uso integrado de las herramientas de construcción y medida del software, unido a una ruta de construcción guiada por las relaciones entre lo visual y lo geométrico del dibujo, permitieron que el profesor representara el ventanal a través de objetos y propiedades geométricas.

Entre otras cosas, la experiencia de diagramación permitió al profesor llevar a cabo una reflexión sobre su conocimiento de las propiedades del rombo en general (paralelismo de lados opuestos, congruencia de ángulos opuestos y de todos los lados del cuadrilátero), así como de las propiedades espaciales de los cristales en el ventanal, que luego fueron vinculadas a la simetría axial y la rotación de los rombos que modelaban las formas de estos cristales.

## Recursos para el aprendizaje

Las actividades emprendidas desde este escenario de actuación se han fundamentado en una manera de considerar al GeoGebra como una herramienta para la comunicación y representación de contenidos matemáticos escolares [12]. Desde esta perspectiva, las actividades en cuestión han consistido en la elaboración de: (i) documentos teóricos de apoyo al profesorado que reflejan un



Figura 3: Dibujo dinámico asociado a la parte superior de un ventanal.

punto de vista de los contenidos matemáticos escolares y de su tratamiento con el GeoGebra, (ii) tareas que involucran el uso instrumental del GeoGebra y promueven la relación con la teoría matemática, y (iii) animaciones y simuladores elaborados con el software y que modelan determinados fenómenos intra y extra matemáticos.

Un ejemplo de una animación lo constituye el recurso *Ángulos Opuestos Congruentes* <sup>2</sup> creado por el Grupo TEM para mostrar una perspectiva más visual y con movimiento de la demostración clásica de la propiedad “en todo paralelogramo, dos ángulos opuestos cualesquiera son congruentes” (ver Fig. 4).



Figura 4: Interfaz de la animación *Ángulos opuestos congruentes*.

Por tradición, la demostración de esta propiedad en clases de Geometría se fundamenta en

<sup>2</sup><https://www.geogebra.org/m/GyKjvQfU>

la noción de congruencia de figuras planas. En la animación, la noción de congruencia es aludida tras una superposición de triángulos formados a partir de la descomposición del paralelogramo por una de sus diagonales. Estos triángulos se reconocen visualmente como “congruentes” luego de la superposición, permitiendo a los usuarios fijar la atención en la igualdad de medidas entre los ángulos interiores de ambos triángulos (señalado con colores en la animación), y luego relacionar estas medidas con las de los ángulos interiores del paralelogramo, cuando la figura es recompuesta.

En cuanto a los simuladores, un ejemplo es el recurso Caída Libre<sup>3</sup> que recrea una escena de rescate en donde un salvavidas es lanzado desde un helicóptero a un hombre que se encuentra en medio del mar. El simulador fue creado para propiciar el análisis del movimiento en caída libre que experimentan los cuerpos lanzados verticalmente desde una altura determinada[24]. Al ajustar convenientemente los parámetros del fenómeno, los usuarios pueden analizar las relaciones numéricas entre las variables altura ( $y$ ), rapidez ( $v$ ) y tiempo ( $t$ ), y detectar regularidades que les conduzcan a definir la “gravedad” como un valor constante para este tipo de movimiento (ver Fig. 5).

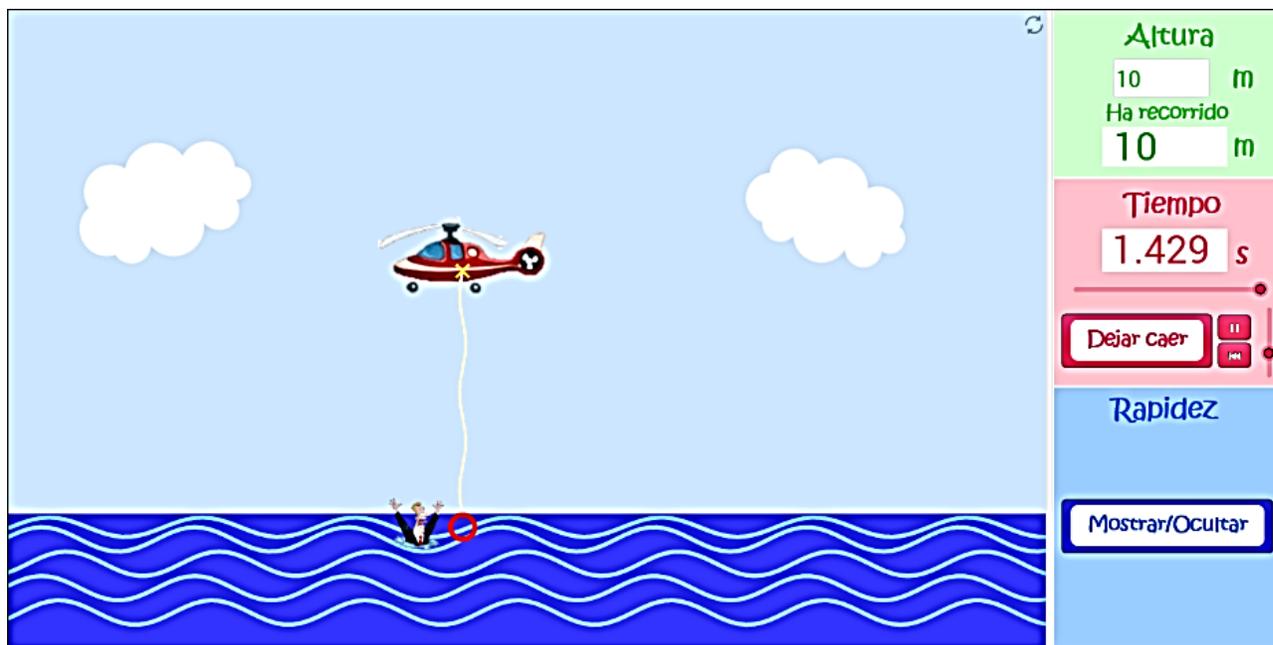


Figura 5: Interfaz del simulador Caída Libre.

A diferencia de la animación comentada al inicio del apartado, este simulador ofrece al usuario la oportunidad de manipular convenientemente las variables del movimiento para propiciar así un estudio de la temática con carácter experimental.

<sup>3</sup><https://tube.geogebra.org/material/simple/id/626609>

## Labor social

En el escenario de labor social, las actividades realizadas por el grupo representan soluciones concretas a determinadas necesidades académicas surgidas a lo interno de las instituciones escolares de la región y que son transparentes para muchos de sus miembros. Con el desarrollo de estas actividades se busca mejorar el bienestar socio-cultural y educativo de los estudiantes y el profesorado que forman parte de estas instituciones. Actualmente, una de las iniciativas más importantes del Grupo TEM en este escenario es la conformación de Clubes GeoGebra en diferentes instituciones oficiales del nivel medio, desde el año 2013. Este trabajo consiste básicamente en conformar pequeños colectivos de estudiantes de 4to y 5to año de Educación Media (16-17 años) en sus propias instituciones, quienes se dedican a desarrollar proyectos de simulación con GeoGebra de forma libre y voluntaria. Hasta el momento, cada Club GeoGebra está bajo la dirección de algún estudiante para profesor de Matemática y Física de la Universidad del Zulia, que actúa como “promotor” de los aprendizajes, cumpliendo con su servicio comunitario. La mayoría de estos promotores son o han sido voluntarios activos del Grupo TEM en su momento. Sin embargo, ya se ha comenzado a trabajar en procura de que el propio profesorado de Matemática se encargue de promover los aprendizajes en cada Club GeoGebra que funcione en las instituciones que han asumido el proyecto.

La finalidad de estos clubes es la de promover el aprendizaje escolar a través del tránsito de los estudiantes por procesos de modelación matemática que emergen en la dinámica de elaboración de simuladores, con la ayuda del GeoGebra. Particularmente, el GeoGebra es usado como una herramienta de construcción de dibujos dinámicos (modelos computacionales) cuyos modelos resultantes responden tanto al conocimiento del fenómeno de la simulación al que se vinculan, como a la teoría geométrica subyacente. Las experiencias de simulación con GeoGebra de los estudiantes son sistematizadas y posteriormente difundidas en un evento anual que, en su primera edición, logró reunir en un mismo lugar a 25 estudiantes de 7 clubes con 17 proyectos de simulación en marcha[22].

Un ejemplo de un proyecto de simulación es el descrito por Figueroa, Reyes y Gutiérrez[9] y que se llevó a cabo desde el Club GeoGebra “Hermágoras Chávez” de la ciudad de Cabimas. El proyecto consistió en representar el funcionamiento de una trompeta del tipo Si-bemol en la vista gráfica del software. En la primera tarea de la simulación, los involucrados representaron el efecto de pisada de uno de los tres pistones de la trompeta, el cual se señala en la Fig. 6 con un rectángulo azul.

Dado el movimiento de esta pieza, su construcción con el GeoGebra llevó a considerar, tanto la representación del movimiento, como el contorno del pistón, conduciendo a los autores a generar técnicas de construcción geométrica que fueron validadas, en razón de la fidelidad del modelo computacional con la realidad (la pisada del pistón) y mediante las nociones de traslación de figuras planas y polígonos.

Desde una perspectiva de enseñanza, la representación del movimiento del pistón en la interfaz del GeoGebra sirvió para que el promotor institucionalizara los contenidos sobre la traslación y los polígonos que eran movilizadas en la construcción. En el sentido del aprendizaje,

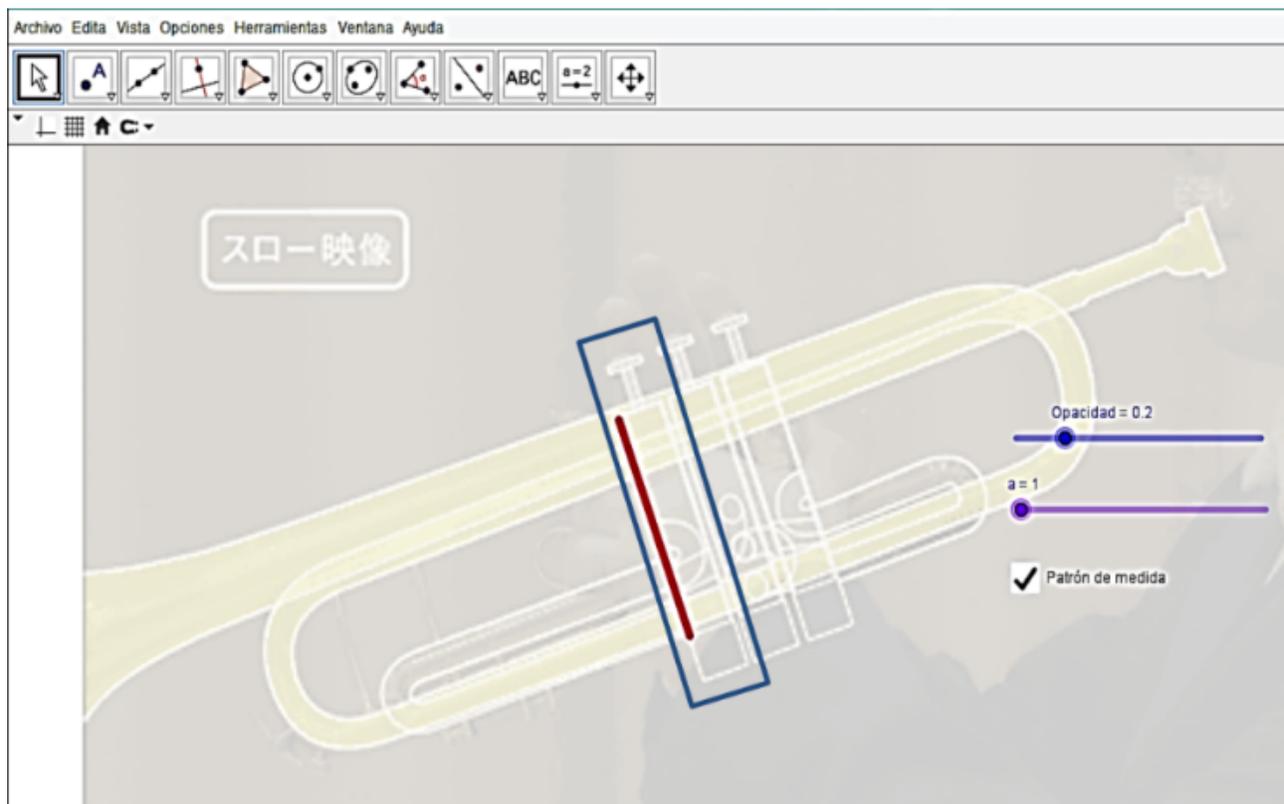


Figura 6: Pistón representado en la interfaz del GeoGebra

todo indica que este tipo de actividades impacta favorablemente en la motivación de los estudiantes hacia el estudio de la Geometría y el uso del GeoGebra como medio para modelar la realidad, facilitando el desarrollo de un conocimiento que trasciende el mero comportamiento del fenómeno simulado.

## Investigación

El escenario de investigación propicia actividades indagativas dirigidas a difundir el conocimiento y aportes científicos que emergen de la propia experiencia del Grupo TEM en los demás escenarios de actuación. Estas actividades tienen el propósito de facilitar: (i) la comprensión de las relaciones entre el conocimiento matemático escolar, la actividad matemática mediada por tecnologías digitales, el uso de animaciones en el aula y la elaboración de diagramas y simuladores con GeoGebra como ambientes para aprender matemática; y (ii) la formulación de los problemas y temas de investigación de interés para los miembros del grupo.

El GeoGebra tiene una presencia importante en este escenario, como se evidencia en un trabajo de Gutiérrez y Prieto[10], publicado recientemente en la Revista Números de la

Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas de España, en la sección “Mundo GeoGebra” (ver Fig. 7). En este trabajo los autores usan el GeoGebra como una herramienta de experimentación con el conocimiento matemático vinculado a las múltiples representaciones de una función cuadrática particular [12][26].

**NÚMEROS**

Revista de Didáctica de las Matemáticas  
 http://www.sicnewton.org/numeros  
 ISSN: 1887-1984  
 Volumen 58, marzo de 2015, páginas 115-126

**Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión  $g(x) = ax^2$**

Rafael E. Gutiérrez  
 Jeta Luis Prieto

(Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática; Universidad del Zulia, Venezuela)

**Resumen** En este trabajo describimos una secuencia para caracterizar las transformaciones “deformación” y “reflexión” en familias de parábolas definidas por  $g(x) = ax^2$ , utilizando el GeoGebra. Esta secuencia se desarrolla en tres momentos en los que se busca establecer los intervalos de variación del parámetro  $a$  para llevar a cabo el análisis, observar las características de las curvas de  $g(x)$  mientras el parámetro cambia de valor y caracterizar las familias de curvas correspondientes a cada intervalo. El paso por estos tres momentos favorece el desarrollo de destrezas para coordinar las representaciones gráfica y simbólica de funciones reales como la abordada en este trabajo. De esta modo, creemos que esta propuesta puede potenciar la práctica de los profesores de Matemática que laboran en Educación Media y que muestran interés en el uso de entornos tecnológicos.

**Palabras clave** Parámetro, Deformación, Reflexión, Función cuadrática, GeoGebra

**Abstract** In this paper we describe a sequence to characterize “stretching” and “reflection” transformations in families of parabolas defined by  $g(x) = ax^2$  with GeoGebra. This sequence consists of three stages in which we establish the ranges of variation of the parameter  $a$  to conduct the analysis, observe the properties of the curves  $g(x)$  when the parameter takes different values, and characterize the families of curves corresponding to each interval. This scaffolding of the process favors the development of skills to coordinate the graph and symbolic representations of real functions as the studied in this paper. In this way, we believe that this proposal may improve the practice of those mathematics teachers in Secondary Education who show interest in the use of digital technologies.

**Keywords** Parameter, Stretching, Shrinking, Reflection, Quadratic Function, GeoGebra

**1. Introducción**

Algunos investigadores relacionan la comprensión de un objeto matemático con la actividad de coordinación de sus múltiples representaciones en situaciones de resolución de problemas (Berba, 1993; Berba y Villarreal, 2005; Duval, 1996). Desde este enfoque cognitivo, un desafío para la enseñanza media consiste en promover el desarrollo de las capacidades del alumno para coordinar las diversas representaciones de una misma noción matemática (NCTM, 2000, pp. 303-304). Entre los contenidos que resultan provechosos para lograr este propósito destaca el tema de las transformaciones de funciones reales, dada la variedad de representaciones desde las cuales es posible su abordaje. Sin embargo, en los últimos años, la enseñanza de las funciones se ha caracterizado por un tratamiento de



MUNDO GEOGEBRA  
 Coordinador: Carlos Lupo Jureta

Figura 7: Primera página del artículo publicado en la revista Números

El abordaje experimental de la función  $g(x) = ax^2$  con el GeoGebra, con el fin de ahondar en las propiedades geométricas de las parábolas asociadas a esta expresión y el análisis posterior de esta experiencia, guio a los autores hacia (i) una caracterización más profunda de la “deformación” y “reflexión” que sufren las distintas familias de parábolas de  $g(x)$ , tras la variación del parámetro  $a$  y (ii) al establecimiento de una secuencia para examinar estas transformaciones a través del uso de una animación. En la Fig. 8 se aprecia un tipo especial de deformación que considera las curvas ubicadas entre el eje  $x$  y la parábola canónica (mostrada en rojo) y que se ha obtenido al variar el parámetro  $a$ , en un intervalo de 0 a 1. Los autores denominan “contracción” a este tipo de deformación de la parábola

En la actualidad, el Grupo TEM emprende estudios de investigación dirigidos al análisis de las actividades de diagramación y simulación con GeoGebra como ambientes de aprendizaje matemático, tanto para estudiantes de Educación Media como para el profesorado de

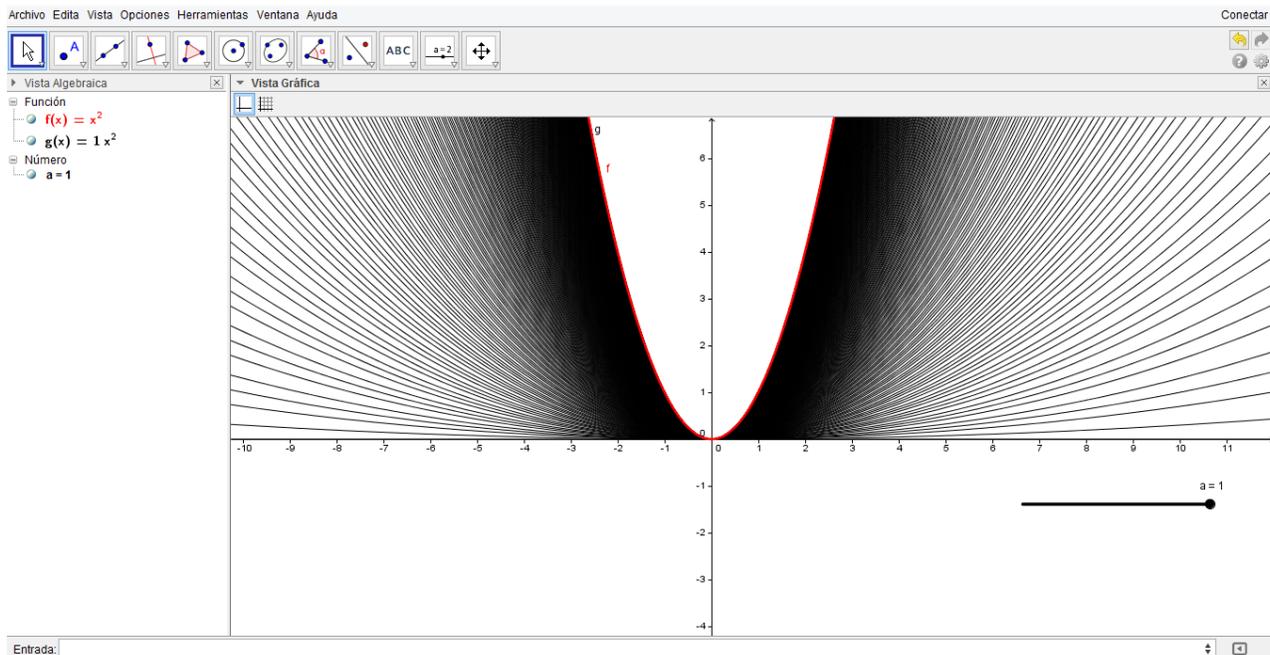


Figura 8: Gráficos de  $g(x) = a.x^2$  con  $0 < a < 1$

Matemática en formación inicial y permanente. Las primeras conclusiones de estos estudios, referidas al lugar que ocupa la Matemática en el desarrollo de las experiencias de simulación de fenómenos de Física, se describen en los trabajos de Cervantes, Rubio y Prieto[4] y Rubio, Prieto y Ortiz[24].

### A manera de conclusión.

En este trabajo se han descrito algunas aplicaciones del GeoGebra en las actividades desarrolladas por el Grupo TEM en sus distintos escenarios de actuación. Estos usos del GeoGebra han permitido contribuir con el desarrollo profesional de profesores y estudiantes para profesores de Matemática de la región, desde diferentes frentes. Como se puso de manifiesto, el conocimiento derivado de las aplicaciones del GeoGebra en las actividades del colectivo es variado y comprende tanto el manejo técnico del recurso como la comprensión de formas de integrarlo eficientemente a distintas tareas de la enseñanza e investigación. Este conocimiento ha facilitado el surgimiento de métodos de trabajo, estrategias de enseñanza y aprendizaje, actividades y materiales, los cuales consideramos innovadores y alejados de visiones convencionales de integrar tecnologías en la Educación Matemática.

Aunque no hemos aprovechado todo el potencial que ofrece el GeoGebra a sus usuarios, consideramos que la experiencia acumulada constituye un buen inicio en las relaciones con

la enseñanza y aprendizaje de la matemática de estos tiempos. Para finalizar, es importante destacar la importancia de promover colectivos de profesores y estudiantes para profesores de Matemática, como el Grupo TEM, en las universidades del país, especialmente en aquellas dedicadas a la formación docente. De esta manera, se contribuye al fomento de una sólida y seria comunidad de trabajo en Educación Matemática, que actúen alrededor de los problemas que aquejan a la enseñanza y aprendizaje de esta ciencia en los tiempos actuales.

## Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto de investigación No. CH-0510-15, adscrito al Centro de Estudios Matemáticos y Físicos (CEMAFI) y financiado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico y Tecnológico (CONDES) de la Universidad del Zulia, Venezuela.

## Bibliografía

- [1] Artigue, M. (2012). Challenges in basic mathematics education. Paris, Francia: UNESCO. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf>
- [2] Barrera, M. F. (2000). Planificación prospectiva y holística. Planificación en dinámica social. Caracas, Venezuela: Fundación Sypal.
- [3] Callejo, M.L., Valls, J. Y Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*, 61(1), 5-21.
- [4] Cervantes, A., Rubio, L. Y Prieto, J. L. (2015). Una propuesta para el abordaje de la refracción y reflexión total interna utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 4(1), 18-28.
- [5] Clark-Wilson, A., Oldknow, A. & Sutherland, R. (2011). Digital technologies and mathematics education: executive summary. London, UK: Joint Mathematical Council of the United Kingdom.
- [6] Cuban. L., Kirkpatrick, H. & Peck, C. (2001). High access and low use of technologies in high school classrooms: explaining an apparent paradox. *American Educational Research Journal*, 38(4), 813-834.
- [7] Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6(2), 191-203.
- [8] Even, R. & Ball, D. L. (Eds.) (2004). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.
- [9] Figueroa, E., Reyes, D., Y Gutiérrez, R. E. (2015). Trompeta Si-bemol. En J. L. Prieto y R. E. (Comps.), *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 15-22). Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

- [10] Gutiérrez, R. Y Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión  $g(x) = a.x^2$ . Revista Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 88(marzo), 115-126.
- [11] Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. & Lavicza, Z. (2008). Introducing Dynamic Mathematics Software to Secondary School Teachers: The Case of GeoGebra. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28(2), 135-146.
- [12] Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. En C. Sárvári (Ed.), Proceedings of Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference (pp. 128-133). Pecs, Hungría: Universidad de Pecs.
- [13] Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and its Applications, 7(marzo). Recuperado de [http://www.maa.org/external\\_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/](http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/)
- [14] Hoyles, C. & Lagrange, J. B. (Eds.) (2010). Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study. New York, EEUU: Springer.
- [15] Laborde, C. (1997). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática (pp. 33-48). Madrid, España: Una Empresa Docente.
- [16] Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6 (1), 283–317.
- [17] Lawless, K. & Pellegrino, J. W. (2007). Professional development in integrating technology into teaching and learning: Knowns, unknowns, and ways to pursue better questions and answers. Review of Educational Research, 77(4), 575-614.
- [18] Losada-Liste, R. (2007). Geogebra: la eficiencia de la intuición. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 10(1), 223–239.
- [19] Mously, J., Lambdin, D., & Koc, Y. (2003). Mathematics teacher education and technology. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F.K.S. Leung (Eds.), Second International Handbook of Mathematics Education (pp. 395-432). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- [20] National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, EEUU: NCTM.
- [21] Preiner, J. (2008). Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers: the case of GeoGebra. Tesis doctoral en Educación Matemática. Facultad de Ciencias Naturales, Universidad de Salzburgo, Austria.
- [22] Prieto, J. L., Y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2015). Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia. Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

- [23] Prieto, J. L., Luque, R. Y Rubio, L. (2013). Cuadriláteros con GeoGebra. Una secuencia de formación docente en la enseñanza de la geometría con tecnologías libres. *Revista de la Universidad del Zulia*, 4(9), 115-130.
- [24] Rubio, L., Prieto, J. L. Y Ortiz, J. (2015). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation (UJERI)*, 2(1), 90-111.
- [25] Simon, M. (2000). Research on development of mathematics teachers: the teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 335-359). Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum Associates Pubs.
- [26] Villareal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En E. M. Miranda y N. A. Paciulli Bryan (Coords.), *Formación de profesores, Currículum, Sujetos y Prácticas Educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil* (pp. 85-122). Córdoba, Argentina: Editorial Filosofía y Humanidades.