

**¿Qué significa enseñar y aprender probabilidad? Un primer análisis  
desde el currículo de Educación Primaria  
O que significa ensinar e aprender probabilidade? Uma primeira  
análise do currículo do Ensino Fundamental  
What does it mean to teach and learn probability? An initial analysis  
from the Primary Education curriculum**

---

CLAUDIA VÁSQUEZ ORTIZ<sup>1</sup>  
NATALY PINCHEIRA HAUCK<sup>2</sup>  
DANILO DÍAZ-LEVICOY<sup>3</sup>

**Resumen**

*En este trabajo se analiza el nivel de exigencia cognitiva de las tareas sobre probabilidad propuestas en los programas de estudio de Educación Primaria chilenos. Dado que estos constituyen un referente a seguir a la hora de decidir cómo organizar y desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje, sobre todo de contenidos que han sido recientemente incorporados al currículo escolar. Los resultados, tras un análisis de contenido, muestran un predominio de tareas vinculadas a un bajo nivel de exigencia cognitiva, que reducen el estudio de la probabilidad al uso de algoritmos y fórmulas. Por tanto, es necesario otorgar un mayor énfasis a aspectos que fomentan el desarrollo de una comprensión que permita que los estudiantes usen, interpreten y comuniquen ideas e información para resolver problemas reales en los que la incertidumbre está presente.*

**Palabras clave:** *probabilidad, exigencia cognitiva, programas de estudio, tareas matemáticas, Educación Primaria*

**Resumo**

*Neste trabalho, é analisado o nível de exigência cognitiva das atividades sobre probabilidade, propostas no currículo chileno de ensino fundamental, uma vez que estas propostas constituem uma referência a seguir ao decidir como organizar, sequenciar e desenvolver o processo de ensino e aprendizagem, especialmente de conteúdos recentemente incorporados no currículo escolar. Os resultados mostram uma predominância de tarefas associadas a um baixo nível de demanda cognitiva,*

---

<sup>1</sup> Doctora en Ciencias de la Educación por la Universidad de Girona (UdG). Profesora del Departamento de Matemática del Campus Villarrica de la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Chile. Dirección Postal: O'Higgins 501, 4930000, Villarrica, Chile. E-mail: [cavasque@uc.cl](mailto:cavasque@uc.cl)

<sup>2</sup> Magíster en Educación Matemática por la Universidad de La Frontera (UFro). Profesora del Departamento de Matemática del Campus Villarrica de la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Chile. Dirección Postal: O'Higgins 501, 4930000, Villarrica, Chile. E-mail: [npincheirah@uc.cl](mailto:npincheirah@uc.cl)

<sup>3</sup> Doctorando en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada (UGR), Granada, España. Dirección Postal: Campus de Cartuja, 18071, Granada, España. E-mail: [dddiaz01@hotmail.com](mailto:dddiaz01@hotmail.com)

*reduzindo o estudo da probabilidade ao uso de algoritmos e fórmulas. Por isso, é necessário dar maior ênfase a os aspectos que promovem o desenvolvimento de uma compreensão sobre probabilidade que permita que os estudantes usem, interpretem e comuniquem ideias e informações para resolver problemas reason de a incerteza está presente.*

**Palavras-chave:** *probabilidade, demanda cognitiva, currículo, tarefas matemáticas, Ensino Fundamental*

## **Abstract**

*This work analyses the level of cognitive challenge on probability tasks proposed by Chilean Primary Education programs. Such programs establish a reference to follow when deciding how to organize, sequence and develop the teaching and learning process, especially about contents which have been recently incorporated into the school curriculum. Results show a low level of cognitive challenge tasks predominance; which lessen the study of probability to the use algorithms and formulas. Thus, it is necessary to emphasize aspects which foster the development of an understanding of probability which allows students to use, interpret and communicate ideas and information to solve real problems where uncertainty is present.*

**Key words:** *probability, cognitive challenge, programs, mathematical tasks, Primary Education.*

## **Introducción**

¿Qué significa enseñar y aprender probabilidad?, ¿qué conocimientos necesitan los profesores para enseñar probabilidad? Son algunos interrogantes que aún están por resolver pese a que el estudio de la probabilidad se ha incorporado con fuerza en las últimas décadas en el currículo escolar de diversos países (e.g. NCTM, 1989; NATIONAL CURRICULUM, 1999; NCTM, 2000; CCSSI, 2010; MECD, 2014; MINISTRY OF EDUCATION SINGAPORE, 2007; MINEDUC, 2012; 2013a). Esto ha generado un notorio aumento de investigaciones vinculadas a la probabilidad y su enseñanza en las distintas etapas escolares (e.g. GODINO, BATANERO Y CAÑIZARES, 1997; GÓMEZ, 2014; DÍAZ-LEVICOY Y ROA, 2014; VÁSQUEZ Y ALSINA, 2015a). Sin embargo, las investigaciones al respecto aún son escasas y evidencian “la necesidad de desarrollar investigaciones vinculadas a la naturaleza semiótica de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad” (NILSSON Y LI, 2015, p. 440), que proporcionen herramientas al profesorado, a nivel disciplinar y didáctico, que permitan implementar de manera idónea las nuevas directrices curriculares, sobre todo si consideramos que gran parte del profesorado en ejercicio no ha recibido formación al respecto (VÁSQUEZ Y ALSINA, 2014).

Se evidencia así, pues, la necesidad de desarrollar estudios que muestren ¿cómo evoluciona el estudio de la probabilidad a lo largo del currículo escolar?, ¿cuáles son los énfasis dados en los distintos niveles?, ¿qué tipo de tareas se promueven durante el proceso?. Asimismo, se requiere dar cuenta acerca de ¿cuáles son los conocimientos a desarrollar en el profesorado para una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula?.

Es en este contexto que surge esta investigación, a través de la cual se busca aportar información que permita tener una visión amplia de lo que significa enseñar y aprender probabilidad a lo largo del currículo escolar. Es por ello que en este trabajo se analiza la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad presentes en los programas de estudio de la asignatura de matemática para la Educación Primaria en Chile. Para ello, nos situamos desde la perspectiva de Smith y Stein (1998) quienes proporcionan una taxonomía para la clasificación de las tareas matemáticas a partir del tipo y nivel de pensamiento requerido para solucionarlas.

¿Por qué es importante analizar la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad propuestas por los programas de estudio? Porque estos constituyen un referente a seguir a nivel nacional por el profesorado a la hora de decidir cómo organizar y desarrollar los objetivos de aprendizajes, sugiriendo un conjunto de indicadores de evaluación que son ejemplificados a través de un listado de actividades, escritas en un lenguaje simple y centradas en el aprendizaje efectivo. “Estas actividades no buscan competir con el texto de estudio, sino ser una guía al docente para diseñar sus propias actividades” (MINEDUC, 2012, p. 26). Por tanto, los programas de estudio se configuran como uno de los recursos preponderantes al momento de organizar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, por ende su análisis resulta de interés al momento de iniciar con el proceso de búsqueda de respuestas a interrogantes como los planteados al inicio de este escrito. Esto adquiere aún más relevancia si consideramos que en Chile gran parte del profesorado no ha recibido preparación para la enseñanza de la probabilidad (VÁSQUEZ, 2014).

En lo que sigue, se presenta el marco teórico elegido para este estudio, para luego describir la metodología, los resultados y discusión de los mismos. Por último, presentamos algunas reflexiones que buscan dar directrices para la enseñanza y la formación de profesores en relación con la probabilidad en la Educación Primaria.

## Tareas matemáticas y exigencia cognitiva

Las tareas matemáticas son un elemento clave para motivar el aprendizaje e involucrar a los estudiantes en la construcción de nuevo conocimiento matemático. Por tanto, para una enseñanza eficaz de las matemáticas, en nuestro caso de la probabilidad, consideramos necesario “involucrar a los estudiantes en tareas de resolución y análisis, las cuales promuevan el razonamiento matemático y la resolución de problemas, además de permitir que haya múltiples maneras de abordar los problemas y existan estrategias de resolución variadas” (NCTM, 2015, p. 18).

Para ello los profesores deben contar con conocimientos que les permitan seleccionar y crear tareas matemáticas que estimulen el razonamiento y la resolución de problemas. En definitiva, que brinden a sus estudiantes la oportunidad de desarrollar un pensamiento de alto nivel producto de su trabajo en las tareas matemáticas (BOALER, 1997; DUBINSKY Y WILSON, 2013; WAGER, 2012). Es en este contexto y con el propósito de ofrecer una herramienta de desarrollo profesional, que ayude a los profesores con la selección y creación de tareas, que Smith y Stein (1998) desarrollan una taxonomía o guía de análisis de las tareas matemáticas que define cuatro niveles de exigencia cognitiva de acuerdo con el tipo y nivel de pensamiento que requiere para que los estudiantes puedan solucionarlas: a) memorización, b) procedimientos sin conexiones, c) procedimientos con conexiones, y d) construcción de las matemáticas (Cuadro 1).

Cuadro 1: Caracterización de los niveles de exigencia cognitiva para las tareas matemáticas

<p><b><i>Exigencias de bajo nivel (memorización)</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Incluyen la reproducción de memoria de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos.</li><li>- No se pueden resolver mediante procedimientos porque no existen o porque el tiempo asignado para completar la tarea es muy breve para emplear un procedimiento.</li><li>- No son ambiguas. Dichas tareas involucran la reproducción exacta de material visto con antelación y aquello que se ha de reproducir se establece con claridad y de manera directa.</li><li>- No tienen relación con los conceptos o el significado subyacente a los hechos, fórmulas o definiciones aprendidas o reproducidas.</li></ul>
<p><b><i>Exigencias de bajo nivel (procedimientos sin conexiones)</i></b></p> <ul style="list-style-type: none"><li>- Son algorítmicas. Usan el procedimiento que se requiere de manera específica o que es evidente a partir de instrucciones, de experiencias o de la asignación de tarea previamente establecidas.</li><li>- Requieren una exigencia cognitiva limitada para su exitosa consumación. Hay poca ambigüedad sobre lo que se necesita llevar a cabo y sobre cómo hacerlas.</li><li>- No guardan relación con conceptos o con el significado subyacente al procedimiento empleado.</li><li>- Se enfocan en generar respuestas correctas, en lugar de desarrollar la comprensión matemática.</li></ul>

- No requieren explicaciones o éstas se centran solamente en la descripción del procedimiento utilizado.

***Exigencias de alto nivel (procedimientos con conexiones)***

- Enfoca la atención del estudiante en la utilización de procedimientos, con el propósito de desarrollar niveles más profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticos.
- Sugiere seguir caminos implícitos o explícitos, los cuales son procedimientos muy generales que tienen estrechas relaciones con ideas conceptuales subyacentes, en contraposición con los limitados algoritmos que son poco claros respecto de los conceptos subyacentes.
- Suelen representarse en multitud de formas, tales como diagramas visuales, objetos manipulables, símbolos y problemas contextualizados. Llevan a cabo conexiones entre una gran cantidad de representaciones que ayudan a desarrollar el significado.
- Necesitan cierto grado de esfuerzo cognitivo. Aunque pueden seguirse procedimientos generales, no se puede hacer en forma irreflexiva. Los estudiantes requieren involucrarse con ideas conceptuales que subyacen en los procedimientos (con el objeto de finalizar la tarea con éxito) y que desarrollan su comprensión.

***Exigencias de alto nivel (construcción de las matemáticas)***

- Requieren un pensamiento complejo y no algorítmico; la tarea, sus instrucciones o un ejemplo resuelto no sugieren en forma explícita un enfoque o camino predecible y trillado.
- Demandan que los estudiantes exploren y entiendan la naturaleza de los conceptos matemáticos, así como los procesos o relaciones.
- Requieren la auto verificación o la autorregulación de los procesos cognitivos de uno.
- Necesitan que los estudiantes tengan acceso al conocimiento o experiencias relevantes y que hagan un uso apropiado de ambas cosas al estar trabajando en la tarea.
- Exigen que los estudiantes analicen la tarea y examinen de manera activa las restricciones de ésta que pudieran limitar las posibles estrategias de solución y las soluciones mismas.
- Requieren un esfuerzo cognitivo significativo y pudieran entrañar un nivel de ansiedad para los estudiantes, debido a la naturaleza impredecible de los procesos de solución necesarios.

Estas características se deducen del trabajo de Doyle concerniente con las tareas académicas (1988) y del de Resnick sobre las habilidades de pensamiento de alto nivel (1987), así como de los *Professional Standards for Teaching Mathematics* [Estándares profesionales para la enseñanza de las matemáticas] (NCTM 1991), y del examen y la categorización de cientos de tareas utilizadas en los salones de clase *QUASAR* (STEIN, GROVER Y HENNINGSEN, 1996; STEIN, LANE Y SILVER, 1996).

Fuente: SMITH Y STEIN, 1998, p. 348

Así por medio de esta taxonomía es posible identificar y seleccionar aquellas buenas tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas, que ofrezcan a los estudiantes la posibilidad de comprometerse en forma activa con el razonamiento, con el dar sentido y con la resolución de problemas, de manera que fomenten una comprensión profunda de las matemáticas (NCTM, 2015), en nuestro caso, tareas que impulsen hacia el desarrollo de una comprensión profunda de la probabilidad.

## **Método**

El propósito de este estudio exploratorio descriptivo de corte cualitativo, es analizar la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad presentes en los

programas de estudio para la asignatura de matemática del currículo escolar chileno de Educación Primaria (MINEDUC, 2013b; 2013c; 2013d; 2013e; 2013f; 2013g; 2016a; 2016b). Con este fin se utilizó como método el análisis de contenido (KRIPPENDORFF, 1997), que considera los siguientes cinco pasos:

1º) Identificar en las bases curriculares vigentes de 1º a 8º año de Educación Primaria los objetivos de aprendizaje o aprendizajes esperados que se encuentran vinculados, ya sea de manera implícita o explícita, al estudio de la probabilidad.

2º) Identificar en los programas de estudio para los distintos cursos, los ejemplos de actividades o tareas matemáticas relacionadas con los objetivos de aprendizaje identificados en el punto anterior.

3º) Resolver los ejemplos de actividades o tareas matemáticas identificando el conocimiento previo o las experiencias anteriores de los estudiantes que abordarán dicha tarea, los conceptos matemáticos nucleares que deben ser abordados en la resolución y sus respectivas conexiones conceptuales y procedimentales.

4º) Clasificar cada una de las actividades o tareas matemáticas, de acuerdo con la taxonomía de Smith y Stein (1998) ajustada al tema de probabilidad, en tareas de: a) memorización, b) procedimientos sin conexiones, c) procedimientos con conexiones y d) construcción de las matemáticas. Es importante indicar que el proceso de resolución y clasificación de las tareas matemáticas estuvo a cargo de tres profesores especialistas en didáctica de la matemática, a quienes se solicitó trabajar individualmente en la resolución y clasificación de cada tarea matemática. Luego se contrastaron sus resultados por medio de una sesión de discusión cuyo propósito fue consensuar la clasificación para cada tarea.

5º) Sistematizar la información por medio de tablas comparativas y gráficos cuya lectura permita facilitar el obtener conclusiones sobre la exigencia cognitiva de las tareas matemáticas sobre probabilidad presentes en los programas de estudio de 1º a 8º año de Educación Primaria chilena.

## **Resultados y discusión**

En lo que sigue se dan a conocer los resultados obtenidos de acuerdo con los niveles de exigencia cognitiva para las tareas matemáticas propuestos por Smith y Stein (1998). Estos resultados pueden ser de gran interés tanto para la comunidad investigadora afín, como para los docentes e investigadores chilenos.

El año 2012 el Ministerio de Educación chileno da a conocer las nuevas bases curriculares y sus respectivos programas de estudio para la asignatura de matemática de 1° a 6° año de Educación Primaria (6 a 11 años de edad). En ellos, se incorpora de manera continua y progresiva el estudio de la probabilidad desde las primeras edades a través del eje temático de “Datos y probabilidades”, cuyo objetivo es:

(...) que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos (MINEDUC, 2012, p. 5).

Posteriormente, el año 2013 surgen las bases curriculares y sus respectivos programas de estudio para los niveles de 7° y 8° año de Educación Primaria (12 a 13 años de edad) en los cuales el estudio de la probabilidad continua presente ahora por medio del eje temático “probabilidad y estadística” con la finalidad de:

(...) responder a la necesidad de que todos los estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos. Se espera formar estudiantes críticos que puedan utilizar la información para validar sus opiniones y decisiones; que sean capaces de determinar situaciones conflictivas a raíz de interpretaciones erróneas de un gráfico y de las posibles manipulaciones intencionadas que se pueden hacer con los datos. En el área de la probabilidad, se espera que estimen de manera intuitiva y que calculen de manera precisa la probabilidad de ocurrencia de eventos; que determinen la probabilidad de ocurrencia de eventos en forma experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias. Específicamente, se espera que los estudiantes diseñen experimentos de muestreo aleatorio para inferir sobre características de poblaciones; registren datos desagregados por sexo cada vez que tenga sentido; utilicen medidas de tendencia central, de posición y de dispersión para resolver problemas. El enfoque de este eje radica en la interpretación y visualización de datos estadísticos, en las medidas que permitan comparar características de poblaciones y en la realización, la simulación y el estudio de experimentos aleatorios sencillos, para construir desde ellos la teoría y modelos probabilísticos. En particular, al final de este ciclo el estudiante debe comprender el rol de la probabilidad en la sociedad, utilizando herramientas de la estadística y de la probabilidad misma (MINEDUC, 2013a, p. 110-111).

Así, con la finalidad de alcanzar los objetivos propuestos para los niveles de 1° a 8° año de Educación Primaria, es que se plantean diversos objetivos de aprendizaje (Cuadro 2) que apuntan a desarrollar los conocimientos y habilidades necesarios para una adecuada comprensión de la probabilidad.

Cuadro 2: Síntesis de los objetivos de aprendizaje en relación al tema de probabilidad en Educación Primaria

Curso	Objetivo de Aprendizaje
1° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre sí mismo y el entorno, usando bloques, tablas de conteo y pictogramas.</li> <li>- Construir, leer e interpretar pictogramas.</li> </ul>
2° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas.</li> <li>- Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas.</li> </ul>
3° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Registrar y ordenar datos obtenidos de juegos aleatorios con dados y monedas, encontrando el menor, el mayor y estimando el punto medio entre ambos.</li> </ul>
4° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Realizar experimentos aleatorios lúdicos y cotidianos, y tabular y representar mediante gráficos de manera manual y/o con software educativo.</li> <li>- Realizar encuestas, analizar los datos y comparar con los resultados de muestras aleatorias, usando tablas y gráficos.</li> </ul>
5° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro - posible - poco posible - imposible.</li> <li>- Comparar probabilidades de distintos eventos sin calcularlas.</li> <li>- Utilizar diagramas de tallo y hojas para representar datos provenientes de muestras aleatorias.</li> </ul>
6° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.</li> </ul>
7° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo: estimándolas de manera intuitiva, utilizando frecuencias relativas, relacionándolas con razones, fracciones o porcentaje.</li> <li>- Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de forma manual y/o con software educativo, con la probabilidad obtenida de manera teórica, usando diagramas de árbol, tablas o gráficos.</li> </ul>
8° Educación Primaria	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Explicar el principio combinatorio multiplicativo: a partir de situaciones concretas, representándolo con tablas y árboles regulares, de manera manual y/o con software educativo, utilizándolo para calcular la probabilidad de un evento compuesto.</li> </ul>

Fuente: MINEDUC, 2012; 2013a

Como se observa en el cuadro anterior, el estudio de la probabilidad se inicia a partir del trabajo con datos, tablas y gráficos, para luego seguir con el desarrollo de experimentos aleatorios que darán paso a describir la probabilidad a partir del grado de posibilidad de ocurrencia de sucesos provenientes de situaciones cotidianas diversas. En niveles posteriores se prosigue con la comparación de probabilidades, pero sin calcularlas, a partir de conjeturas acerca de las tendencias de resultados obtenidos de un mismo experimento, que se pretende que los estudiantes lleguen a estimar la probabilidad teórica de un evento. Para que en los últimos años de Educación Primaria procedan con



el estudio de la probabilidad asociada a frecuencias relativas de ocurrencia de eventos que se estabilizan acercándose cada vez más a la probabilidad de ocurrencia del suceso, para así dar paso a distintos tipos de representar numéricamente dicha probabilidad. Finalizando, con el principio combinatorio multiplicativo y sus representaciones como una herramienta para determinar el espacio muestral de un suceso y para el cálculo de probabilidad.

Una vez identificados los objetivos de aprendizaje que de una u otra manera se encuentran vinculados al estudio de la probabilidad, se procedió a identificar, desde los programas de estudio, las tareas relacionadas con tales objetivos de aprendizaje. A partir de dicha revisión encontramos un total de 77 actividades o tareas vinculadas al estudio de la probabilidad que se distribuyen por curso de 1° a 8° año de Educación Primaria como muestra la Tabla 1.

Tabla 1: Actividades vinculadas a probabilidad en relación con el total de tareas propuestas para el eje temático.

Curso	Número de actividades
1° Educación Primaria	11/15
2° Educación Primaria	13/23
3° Educación Primaria	2/21
4° Educación Primaria	12/21
5° Educación Primaria	15/23
6° Educación Primaria	7/21
7° Educación Primaria	11/32
8° Educación Primaria	6/19
<b>Total</b>	<b>77/175</b>

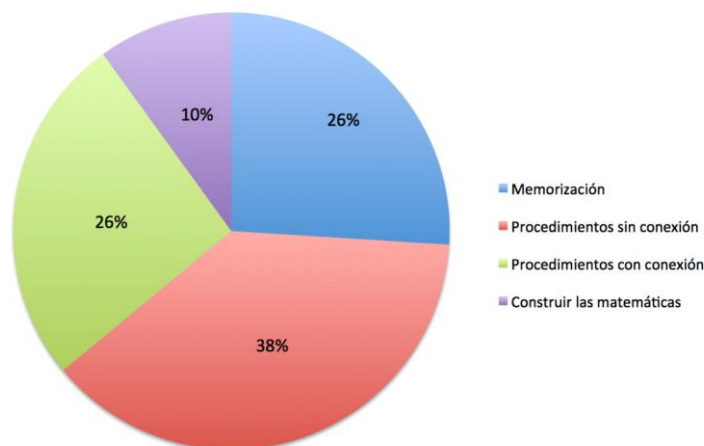
Fuente: Datos de la investigación

Al observar la tabla anterior, llama la atención las escasas actividades para abordar los contenidos de probabilidad en los cursos de 3°, 6° y 8° año de Educación Primaria pese a que los objetivos de aprendizaje para tales niveles son bastante amplios, por lo que consideramos requieren de un mayor número de actividades. Lo anterior, puede influir negativamente en la importancia que otorguen los profesores a la probabilidad en dichos niveles.

Luego de identificadas las distintas actividades o tareas que corresponden a las unidades de análisis, tres profesores especialistas en didáctica de la matemática resolvieron individualmente estas actividades, una por una, para posteriormente clasificarlas de acuerdo con la taxonomía propuesta por Smith y Stein (1998) considerando además el conocimiento previo involucrado o experiencias anteriores de los estudiantes que abordarán dicha tarea, los conceptos matemáticos nucleares que deben ser abordados en la resolución y sus respectivas conexiones conceptuales y procedimentales. De esta

forma, a partir de la puesta en común de la clasificación de las tareas se llegó a establecer un consenso en aquellas que presentaron discrepancia, definiendo de este modo una clasificación única para cada tarea analizada. La Figura 1 muestra cómo se clasifican según el nivel de exigencia cognitiva las tareas sobre probabilidad a nivel general en los programas de estudio chilenos de Educación Primaria.

Figura 1 – Clasificación de tareas sobre probabilidad según el nivel de exigencia cognitiva en los programas de estudio de Educación Primaria.



Fuente: Datos de la investigación

A partir de la Figura 1 se observa que en las tareas analizadas predominan aquellas de exigencia de bajo nivel (64%), donde gran parte de ellas refieren a procedimientos sin conexiones (38%) y un 26% a tareas de memorización. Por tanto, gran parte de las tareas propuestas se centran en el uso de procedimientos, fórmulas o algoritmos en formas que no se relacionan con el significado y desarrollo de una comprensión de la probabilidad, fundamentadas principalmente en la memorización o reproducción de memoria de hechos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidos o ya establecidos.

Lo anterior, reduce peligrosamente el estudio de la probabilidad al uso de algoritmos y fórmulas, dejando de lado aspectos centrales tales como el desarrollo de una comprensión de la probabilidad que permita que los estudiantes usen, interpreten y comuniquen ideas e información para resolver problemas reales en que la incertidumbre está presente. Ejemplos de los tipos de tareas propuestas por los programas de estudio de Educación Primaria que hemos catalogado como tareas de exigencia cognitiva de bajo nivel son los que se muestran en las Figuras 2 y 3.

Figura 2 – Ejemplo tarea de memorización 2° Año Educación Primaria

Registran empleando bloques apilables los números que aparecen al lanzar dados. Por ejemplo:

- › al lanzar tres veces un dado
- › al lanzar tres veces dos dados

Fuente: MINEDUC, 2013c, p. 125

Figura 3 – Ejemplo tarea de procedimientos sin conexión 6° Año Educación Primaria

Usan un diagrama de árbol para visualizar posibilidades que se pueden dar en un experimento. Por ejemplo:

- › visualizan todas las posibilidades que se pueden dar al lanzar tres monedas, usando un diagrama de árbol, y las registran
- › visualizan todas las posibilidades que se pueden dar al lanzar dos dados, usando un diagrama de árbol, y las registran

Fuente: MINEDUC, 2013g, p. 137


El objetivo de aprendizaje asociado a la tarea de la Figura 2, es “recolectar y registrar datos para responder preguntas estadísticas sobre juegos con monedas y dados, usando bloques y tablas de conteo y pictogramas” (MINEDUC, 2013c, p. 125). Esta tarea es de bajo nivel (*memorización*), ya que se espera que para su resolución los estudiantes recuerden qué sucede cuando se lanza un dado y cómo se puede representar dicha información, lo que involucra la reproducción de memoria de hechos, reglas o definiciones previamente aprendidas o ya establecidas, como lo es, por ejemplo, el utilizar bloques apilables para representar los resultados del experimento aleatorio de lanzar un dado una determinada cantidad de veces. Hecho que en un 2° año de primaria representa poca ambigüedad y ya se encuentra memorizado, pues en el curso anterior estudiaron distintas formas de representaciones concretas y pictóricas, por tanto para la resolución de esta tarea es necesario que los estudiantes evoquen conocimiento previo. En lo que respecta a tareas que involucran *procedimientos sin conexión*, que representan un 38% del total de tareas presentes en los programas de estudio analizados, la Figura 3, muestra, a modo de ejemplo, una de ellas. El objetivo de aprendizaje de esta tarea es “conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo” (MINEDUC, 2013g, p. 137). Esta tarea al igual que la anterior es de bajo nivel y se encuentra asociada al uso de procedimientos sin conexión, pues es una tarea algorítmica en que los estudiantes deben utilizar un procedimiento específico y evidente para su resolución, en este caso el diagrama de árbol para visualizar los posibles resultados que se pueden dar en un experimento.

Por otro lado, las tareas sobre probabilidad con una exigencia cognitiva de alto nivel, es decir, que promueven en los estudiantes el uso de procedimientos comprometiéndoles con una exploración activa y significativa de los conceptos e ideas matemáticas, representan tan solo un 36% de las tareas analizadas. Este porcentaje es bajo, más aún si consideramos que solo un 10% de las tareas sobre probabilidad presentan un alto nivel de exigencia vinculado a la construcción de las matemáticas, es decir, requieren de un pensamiento complejo y no algorítmico, exigiendo que los estudiantes analicen, exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos y relaciones matemáticas. Ejemplos de estos tipos de tareas se muestran en la Figura 4 y 5.

Figura 4 – Ejemplo tarea de procedimientos con conexión 7° año Educación Primaria

Lanzan 10 chinchas a la vez, registran el evento “base” o “punta” y calculan las frecuencias relativas.

- › Repiten los lanzamientos y calculan las frecuencias relativas acumuladas.
- › Elaboran un gráfico de líneas en el cual anotan las frecuencias relativas acumuladas para cada 10, 20, 30,... lanzamientos.
- › ¿Pueden ser los eventos “base” o “punta” equiprobables? Explican y comunican la respuesta.



Fuente: MINEDUC, 2016a, p. 177

Figura 5 – Ejemplo tarea de construir las matemáticas 5° Año Educación Primaria

Conjeturan acerca de los futuros resultados de experimentos. Por ejemplo:

- › si al lanzar una moneda sale cara, ¿qué ocurrirá en el próximo lanzamiento de la moneda?, conjeturen al respecto
- › ¿se puede asegurar, al lanzar una moneda, que en 10 lanzamientos van a salir 5 caras y 5 sellos?, conjeturen al respecto
- › ¿qué números son los más posibles que salgan al lanzar un dado?, conjeturen al respecto

Fuente: MINEDUC, 2013f, p.150-151

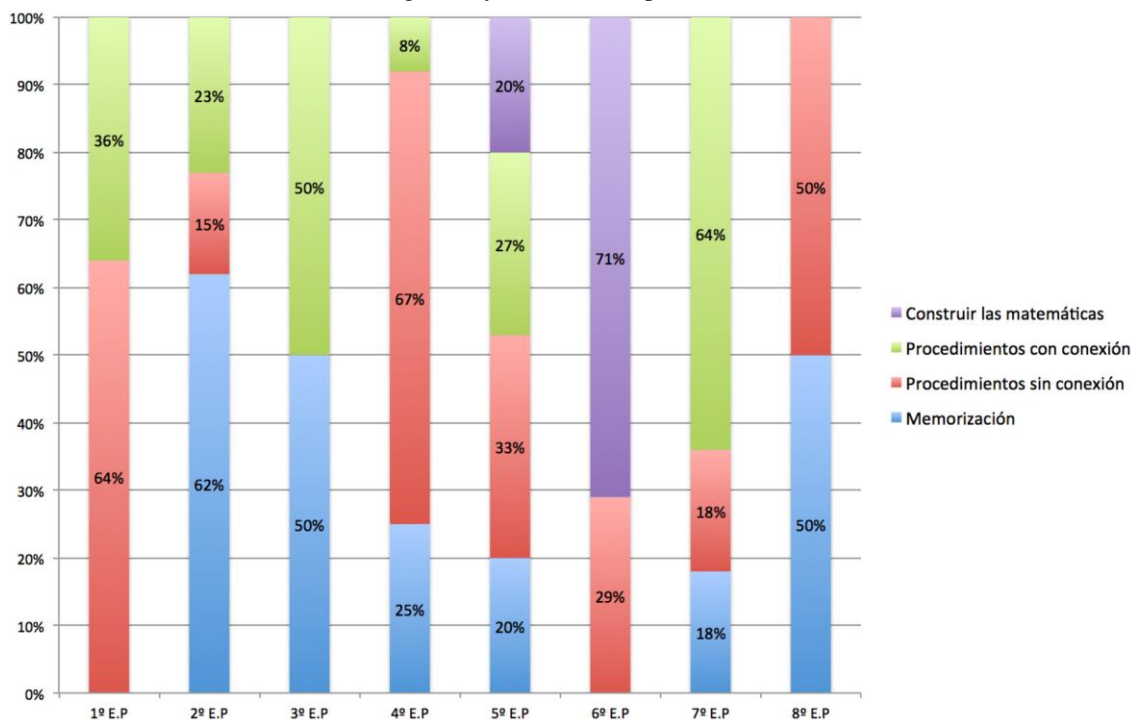
La Figura 4 muestra un ejemplo de tarea que involucra el uso de procedimientos con conexión, siendo su objetivo de aprendizaje asociado, que los estudiantes “expliquen las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo” (MINEDUC, 2016a, p. 177). Para la resolución de esta tarea, se espera que los estudiantes utilicen procedimientos con el propósito de desarrollar

niveles más profundos de comprensión de los conceptos e ideas matemáticas involucradas como lo es la equiprobabilidad de sucesos y la estabilización de frecuencias al aumentar el número de lanzamientos.

De igual manera, la Figura 5 muestra un ejemplo de una tarea de alto nivel, cuyo objetivo de aprendizaje es que los estudiantes sean capaces de “describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos seguro – posible - poco posible – imposible” (MINEDUC, 2013f, p. 150-151). Para ello, se involucra al estudiante en la construcción de las matemáticas para su resolución, ya que no se sugiere ni explícita ningún camino específico de acción, debiendo los propios estudiantes determinar un camino para resolver la tarea, así como para justificar sus respuestas. Para su resolución los estudiantes deben conjeturar acerca de los futuros resultados de un experimento, utilizando para ello, un pensamiento complejo y no algorítmico que les permita alcanzar una comprensión, en este caso, de la independencia de sucesos de un experimento como el de la Figura 5.

Para finalizar el análisis, a continuación se muestra una visión global de cómo se distribuyen las tareas sobre probabilidad clasificadas según el nivel de exigencia cognitiva y curso al cual pertenecen (Figura 6).

Figura 6 – Distribución de los tipos de tareas sobre probabilidad clasificadas según el nivel de exigencia cognitiva y curso al cual pertenecen.



Fuente: Datos de la investigación

En el gráfico de la Figura 6, se observa que los distintos niveles de exigencia cognitiva asociados a las tareas sobre probabilidad no son desarrollados de igual manera en los distintos cursos; mostrando un predominio de tareas de bajo nivel (memorización y procedimientos sin conexión) en todos los cursos. También se evidencia que tan solo en 5° y 6° de primaria se presentan tareas de un alto nivel de exigencia cognitiva (construcción de las matemáticas), contrario a lo esperable, que sería observar un aumento gradual y progresivo de la exigencia cognitiva de las tareas, así como un mayor equilibrio en el tipo de tareas propuestas. Pues, no debemos olvidar que para un adecuado aprendizaje de las matemáticas, y de la probabilidad en nuestro caso, hay que brindar a los estudiantes distintas instancias y oportunidades que les permitan desarrollar su razonamiento por medio de la resolución de problemas, con sus distintas formas de abordarlos y estrategias de resolución (NCTM, 2015). Para ello es fundamental ofrecer distintos tipos de tareas que involucren distintos niveles de exigencia cognitiva que permitan alcanzar de manera gradual y progresiva una comprensión en profundidad de la probabilidad.

## **Reflexiones finales**

La incorporación reciente de la probabilidad en el currículo de Educación Primaria chileno es un verdadero desafío que los profesores deben asumir, por lo cual es necesario contar con orientaciones curriculares claras que señalen el camino para una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula. Es en este contexto que los programas de estudio, así como los libros de texto, asumen un rol relevante al momento de planificar y seleccionar tareas para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los estudios al respecto son escasos, y la gran mayoría se centra en el análisis de los libros de texto (e.g. DÍAZ-LEVICOY Y ROA, 2014; GÓMEZ, CONTRERAS Y BATANERO, 2015; VÁSQUEZ Y ALSINA, 2015b; SALCEDO Y RAMÍREZ, 2016) dejando en evidencia, la necesidad de mejorar el tratamiento otorgado al estudio de la probabilidad en la Educación Primaria. En este estudio hemos querido dar un paso más y complementar los trabajos anteriores, con el análisis de los programas de estudio para la asignatura de matemática que son empleados por el profesorado de la Educación Primaria en Chile. En concreto, hemos analizado la exigencia cognitiva de las distintas tareas sobre probabilidad que se proponen para cada uno de los cursos de primaria.

El análisis realizado ha permitido evidenciar, por un lado, un bajo número de tareas vinculadas a la probabilidad, pues tal y como muestra la Tabla 1, se observa un predominio de las actividades de estadística por sobre las de probabilidad, por tanto es necesario que se dé un equilibrio entre ambas. Por otro lado, en lo que se refiere a los distintos niveles de exigencia cognitiva considerados por este estudio (memorización, procedimientos sin y con conexión, y construcción de las matemáticas) se observa un desbalance en las actividades tanto a nivel global a lo largo de toda la Educación Primaria, como al interior de cada curso, observándose un fuerte predominio de las tareas que involucran el uso de procedimientos sin conexiones para su resolución, así como de las tareas de memorización.

En consecuencia, es necesario complementar las tareas sobre probabilidad con la incorporación de nuevas tareas que consideren los distintos niveles de exigencia cognitiva, de manera tal que se observe un tránsito gradual y progresivo desde las tareas de memorización hacia las tareas de construcción de las matemáticas. No se trata de solo presentar tareas de alto nivel, sino que más bien de que se observe un equilibrio, pues tanto las tareas de memorización como de procedimientos sin conexiones juegan un rol importante en el aprendizaje y son necesarias para desarrollar un dominio. Sin embargo, es importante avanzar hacia el desarrollo de tareas que requieran de una exigencia cognitiva mayor, del uso de procedimientos con conexiones que permitan el desarrollo de niveles profundos de comprensión de la probabilidad para luego transitar hacia un pensamiento complejo y no algorítmico. De este modo, se estará promoviendo el desarrollo de un razonamiento probabilístico de alto nivel en el aula de Educación Primaria. El desafío es grande, por lo que es necesario brindar al profesorado el apoyo necesario para que logren que sus estudiantes alcancen una comprensión adecuada de la probabilidad y la visualicen como una herramienta potente para la interpretación y resolución de problemas.

## **Agradecimientos**

Trabajo realizado en el marco del proyecto FONDECYT INICIACIÓN N° 11150412, financiado por la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile y desarrollado en la Pontificia Universidad Católica de Chile.

## Referencias

BOALER, J. **Experiencing School Mathematics: Teaching Styles, Sex, and Setting**. Buckingham, UK: Open University Press, 1997.

COMMON CORE STANDARDS INITIATIVE, CCSI. **Standards for mathematical practice**. 2010. Disponible en: <<http://www.corestandards.org/>>. Acceso en: 17 jul. 2013.

DÍAZ-LEVICOY, D. Y ROA, R. Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. **Revista Chilena de Educación Científica**, v. 13. n. 1, p. 9-19, 2014.

DOYLE, W. Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking during Instruction. **Educational Psychologist**, 23, p. 167-180, February 1988.

DUBINSKY, E. Y ROBIN T. W. High School Students' Understanding of the Function Concept. **The Journal of Mathematical Behavior**, 32, n. 1, p. 83-101, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Y CAÑIZARES, M. J. **Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares**. Madrid: Editorial Síntesis, 1997.

GÓMEZ, E. **Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria**. Tesis Doctoral (Doctorado en Didáctica de la Matemática) – Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada, 2014.

GÓMEZ, E., CONTRERAS, J. M. Y BATANERO, C. Significados de la probabilidad en libros de texto para Educación Primaria en Andalucía. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), **Investigación en Educación Matemática XIX**. Alicante: SEIEM. p. 73-87. 2015.

KRIPPENDORFF, K. **Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica**. Barcelona: Paidós. 1997.

MATHEMATICS PRIMARY SYLLABUS. **Curriculum Planning and Development Division**. Ministry of Education, Singapore. 2007. Recuperado de: <http://www.moe.gov.sg>

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. **Real Decreto 126/2014**, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Madrid: Autor. 2014.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Bases Curriculares 2012: 1° a 6° Básico**. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2012.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Bases Curriculares 2013: 7° Básico a 2° Medio**. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013a.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Cuarto Año Básico**. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013e.



- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Octavo Año Básico.** Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2016b.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Primer Año Básico.** Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013b.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Quinto Año Básico.** Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013f.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Segundo Año Básico.** Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013c.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Séptimo Año Básico.** Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2016a.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Sexto Año Básico.** Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013g.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN. **Matemática. Programa de Estudio Tercer Año Básico.** Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago de Chile, 2013d.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.** Reston, VA: NCTM, 1989.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos.** Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics, 2015.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles and standards for school mathematics.** Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Professional Standards for Teaching Mathematics.** Reston, Va.: NCTM, 1991.
- NATIONAL CURRICULUM. **The National Curriculum for England, Mathematics.** 1999. Disponible en: [www.nc.uk.net](http://www.nc.uk.net)
- NILSSON, P. Y LI, J. Teaching and Learning of Probability. **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.** S.J. Cho (ed.). Springer International Publishing, p. 437-442. 2015.
- SALCEDO, A. Y RAMÍREZ, T. Análisis de las actividades de probabilidad propuesta en textos escolares de primaria. **Educação Matemática Pesquisa**, 18, p. 179-202. 2016.
- SMITH M.S. Y STEIN, M.K. Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. **Mathematics Teaching in the Middle School**, 3, p. 344-350.1998.
- STEIN, M.K., GROVER, B. Y HENNINGSEN, M. Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. **American Educational Research Journal**, 33, n. 2, 455-488,

1996.

STEIN, M.K., LANE, S. Y SILVER, E. Classrooms in Which Students Successfully Acquire Mathematical Proficiency: What Are the Critical Features of Teachers' Instructional Practice?. Paper presented at **the annual meeting of the American Educational Research Association**, New York, April 1996.

VÁSQUEZ, C. **Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo**. 2014. 560f. Tesis (Doctorado en Educación) – Departament de Didàctiques Específiques, Universitat de Girona, Girona, 2014.

VÁSQUEZ, C. Y ALSINA, A. El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, 7, p. 27-48. 2015a.

VÁSQUEZ, C. Y ALSINA, A. Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. **Números**, n. 85, p. 5-23, 2014.

VÁSQUEZ, C. Y ALSINA, A. Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. **Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado**, v. 19, n. 2, p. 441-462. 2015b.

WAGER, A. Incorporating Out-of-School Mathematics: From Cultural Context to Embedded Practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, n. 1, p.9-23, 2012.

Recebido em 28/08/2016

Aceito em 07/11/2016