

## CAPÍTULO 3

### CÁLCULO DE LA DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

MÓNICA CÁCERES, JONATHAN TELLO,  
YENNY MORENO, ÍNGRID VARGAS Y PAOLA CASTRO

#### 1. Introducción y formulación del problema

En este documento, presentamos el diseño, implementación y evaluación de la unidad didáctica sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos. La construcción de la unidad didáctica surge de las necesidades que presentan los estudiantes al abordar el concepto de distancia entre dos puntos. Este concepto se desarrolla en distintos temas de las matemáticas escolares tales como el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales, la fórmula de la distancia y la distancia en la recta numérica. Con el diseño de la unidad didáctica, permitimos el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes —de acuerdo con los estándares básicos de competencias en matemáticas (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006)—, y de las capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos que están establecidos en el marco PISA 2012 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013).

Para la planificación de la unidad didáctica, el diseño de los instrumentos, los métodos de evaluación y el análisis de resultados, nos basamos en el análisis didáctico del tema. Según Gómez (2002) “el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica está basado en el procedimiento de la organización de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de evaluación” (p. 20).

Realizamos la implementación de la unidad didáctica en la IED Santa Bárbara, ubicada en la localidad de Ciudad Bolívar en Bogotá. La institución cuenta con una población aproximada de 2000 estudiantes de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media, cuyo estrato socioeconómico es 1 y 2. El curso seleccionado fue de grado octavo y estaba conformado por 19 estudiantes (8 niños y 11 niñas) cuya edad promedio era de 14 años. El desempeño académico de los estudiantes en el área de matemáticas no era sobresaliente: en promedio, el 60% mantiene un rendimiento académico básico, mientras que el restante presenta un desempeño bajo.

Abordamos la evaluación de la unidad didáctica desde dos dimensiones: cognitiva y afectiva. En la primera, analizamos el desarrollo de las expectativas de aprendizaje de nivel superior —capacidades matemáticas fundamentales y procesos matemáticos incluidos en el marco PISA 2012— y el logro de objetivos de aprendizaje. Analizamos la segunda dimensión desde las expectativas de tipo afectivo y los aspectos que afectan la motivación.

Con el diseño de la unidad didáctica contribuimos a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias matemáticas y matematización, y a los procesos matemáticos de formular e interpretar. De acuerdo con los resultados obtenidos, la unidad didáctica fortaleció la expectativa afectiva EA2 —evaluar los resultados matemáticos—. Encontramos que se fortalecieron dos factores que afectan la motivación: detecté mis errores y pude interactuar con los demás.

Este capítulo contiene el diseño previo, los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información, la descripción de la implementación, la evaluación del diseño y la implementación, el nuevo diseño y las conclusiones.

## 2. Descripción, fundamentación y justificación del diseño previo

En este apartado, presentamos el diseño previo de la unidad didáctica que se desarrolló en tres momentos. En primer lugar, delimitamos el tema de las matemáticas escolares desde el análisis de contenido; luego, planteamos las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, junto con las previsiones y las limitaciones de aprendizaje; y, finalmente, describimos la secuencia de tareas de aprendizaje a partir del análisis de instrucción.

## 1. Análisis de contenido

A continuación, presentamos la delimitación del tema por medio de tres conceptos pedagógicos: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología, propuestos por Cañadas, Gómez y Pinzón (2018).

### 1.1. Estructura conceptual

Describimos la estructura matemática del tema cálculo de la distancia entre dos puntos a partir de los conceptos y procedimientos propuestos por Cañadas, Gómez y Pinzón (2018). El tema incluye seis conceptos: (a) los métodos de medición (directos e indirectos), (b) las magnitudes, (c) la geometría euclidiana, (d) el espacio métrico, (e) las expresiones matemáticas y (f) la topografía.

Los métodos de medición directos se utilizan para calcular distancias accesibles mientras que los métodos indirectos, como los teoremas, se usan para medir distancias inaccesibles. La distancia entre dos puntos se puede calcular mediante expresiones matemáticas como valor absoluto, fórmula de la distancia, y teoremas de Pitágoras y de Tales. La geometría euclidiana es una rama de la geometría analítica que se relaciona con la distancia que incluye elementos como el punto, el segmento, la recta numérica y el plano cartesiano. El espacio métrico incluye las propiedades de la distancia (propiedad positiva, la identidad de los indiscernibles y la desigualdad triangular).

Los procedimientos relacionados con el tema involucran la construcción de triángulos y alturas, la identificación de los catetos e hipotenusa en un triángulo rectángulo, la aplicación del valor absoluto, la utilización de la fórmula de la distancia, y la utilización de los teoremas de Pitágoras y Tales. Como un razonamiento, identificamos el concepto de distancia a partir de la demostración de los teoremas de Pitágoras y Tales para calcular la distancia más corta entre dos puntos. Dentro de las estrategias, consideramos acciones como calcular trayectos rectos y aplicar una unidad patrón, hallar la medida de los lados en un triángulo rectángulo y usar la fórmula de la distancia. En la figura 1, presentamos el mapa conceptual que permite identificar los conceptos y procedimientos para el tema.

En la figura 1, observamos que el mapa se lee de forma vertical, en el que los cuadros rectangulares con línea gruesa forman parte de conceptos, temas y subtemas de la unidad didáctica. Los conceptos se ubican en los cuadros que se desprenden hacia arriba y abajo del cuadro principal del tema, de la misma manera los temas y subtemas. Las flechas indican la relación entre el tema de la unidad didáctica, los conceptos, los temas y los subtemas. La línea

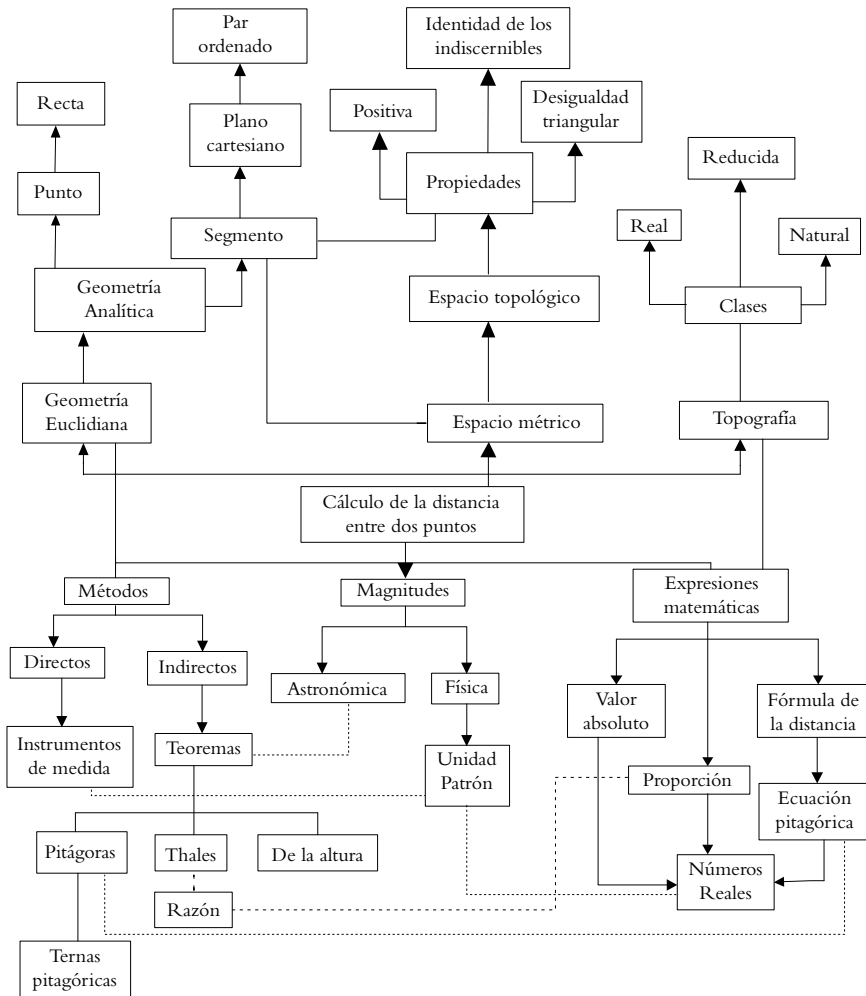


Figura 1. Mapa de la estructura conceptual

discontinua señala los procedimientos; por ejemplo, el estudiante utiliza los instrumentos de medida para calcular distancias al utilizar el valor absoluto en la recta y la fórmula de la distancia en el plano cartesiano. La línea continua señala los razonamientos; por ejemplo, el estudiante tiene la necesidad de utilizar dos teoremas: Pitágoras y Tales. Y la línea discontinua gruesa indica las estrategias que el estudiante puede utilizar a partir del concepto de espacio métrico, al utilizar la fórmula de la distancia para hacer uso de instrumentos de medida que permiten medir segmentos.

### 1.2. Sistemas de representación

Gómez (2014) indica “que los sistemas de representación permiten identificar los modos en que el tema se presenta” (p. 17) y cita a Kaput (1992) para establecer que “un sistema de representación es un sistema de reglas para (i) identificar o crear signos, (ii) operar sobre y con ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos” (p. 17). Según las afirmaciones anteriores, identificamos los sistemas de representación numérico, simbólico, geométrico, manipulativo, gráfico y ejecutable asociados al tema del cálculo de la distancia.

El sistema de representación numérico implica los números reales. En este sistema de representación se pueden calcular valores numéricos mediante los pares ordenados, la medida de los segmentos, las razones y las ternas pitagóricas. En el sistema de representación simbólico, consideramos que las longitudes se pueden representar mediante símbolos. Por ejemplo, si tenemos los puntos  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$ , entonces, podemos calcular la distancia entre ellos con la fórmula  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

El sistema de representación manipulativo incluye el Geoplano. Este recurso tiene como regla una cuadrícula compuesta por puntillas equidistantes que permite calcular distancias al utilizar diferentes escalas. El sistema de representación geométrico está fundamentado en los conceptos de punto, segmento, triángulos rectángulos, figuras planas y semejantes. En el sistema de representación gráfico, la distancia se puede expresar por medio del plano cartesiano porque se relacionan dos rectas numéricas con una escala definida para ubicar puntos a partir de sus coordenadas. En la figura 2, presentamos

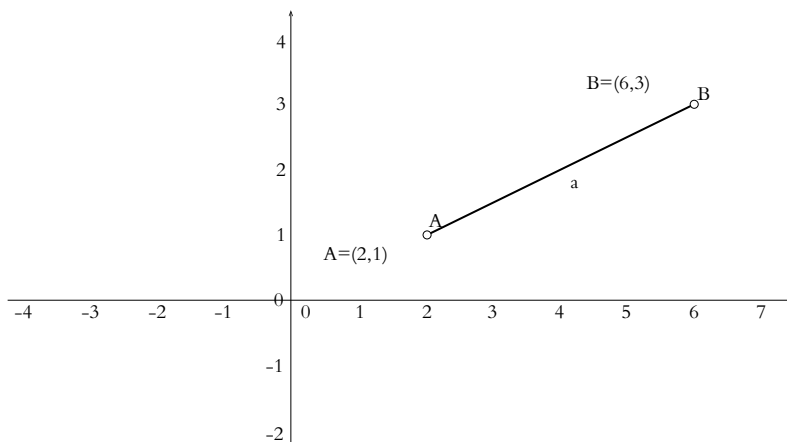


Figura 2. Representación gráfica de dos puntos en el plano cartesiano

el ejemplo de la representación de un segmento en el plano cartesiano, cuya longitud correspondería a la medida de la distancia entre sus puntos extremos.

En el sistema de representación ejecutable, encontramos programas de geometría dinámica, como Geogebra, que, a partir de la construcción un triángulo rectángulo, permiten analizar la variación de las medidas de sus lados. En la figura 3, mostramos el mapa conceptual de los sistemas de representación del tema.

En la figura 3, presentamos las traducciones entre los distintos sistemas de representación y sus transformaciones sintácticas. Según Cañadas, Gómez y Pinzón (2018), una traducción entre sistemas de representación "... se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece la relación entre dos signos que designan un mismo objeto pero que pertenecen a diferentes sistemas de representación" (p. 18). Por ejemplo, para el cálculo de la distancia entre dos puntos, establecemos la siguiente traducción del sistema de representación simbólico al numérico: las parejas ordenadas  $A(-2,4)$  y  $B(-4,2)$  están relacionadas con las expresiones  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$ ; esto nos permite emplear la fórmula de la distancia  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , sustituir los valores numéricos  $d(A, B) = \sqrt{(-4 - (-2))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$  y calcular la distancia entre  $A$  y  $B$ .

Una transformación sintáctica invariante de acuerdo con Cañadas, Gómez y Pinzón (2018) se "refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el concepto o procedimiento matemático representado por esos signos cambie" (p. 18). Por ejemplo, para el sistema de representación numérico, encontramos que, dados dos números en la recta numérica representados por  $A$  y  $B$ , la distancia entre estos números es la misma  $d(A, B) = d(B, A)$ , pues el valor absoluto es el mismo. Para calcular la distancia entre los números 1 y 4, tenemos que  $d(1, 4) = d(4, 1)$ .

### 1.3. Fenomenología

Gómez (2007) considera que "la fenomenología es un elemento constitutivo del significado de un concepto que surge de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos" (p. 50). En el marco PISA (2012) se define *contexto* "como aquel aspecto del mundo del individuo en el cual se encuentran situados los problemas" (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2003, p. 23). La nueva clasificación de contextos en PISA 2012 incluye contextos personales, profesionales, sociales y científicos.

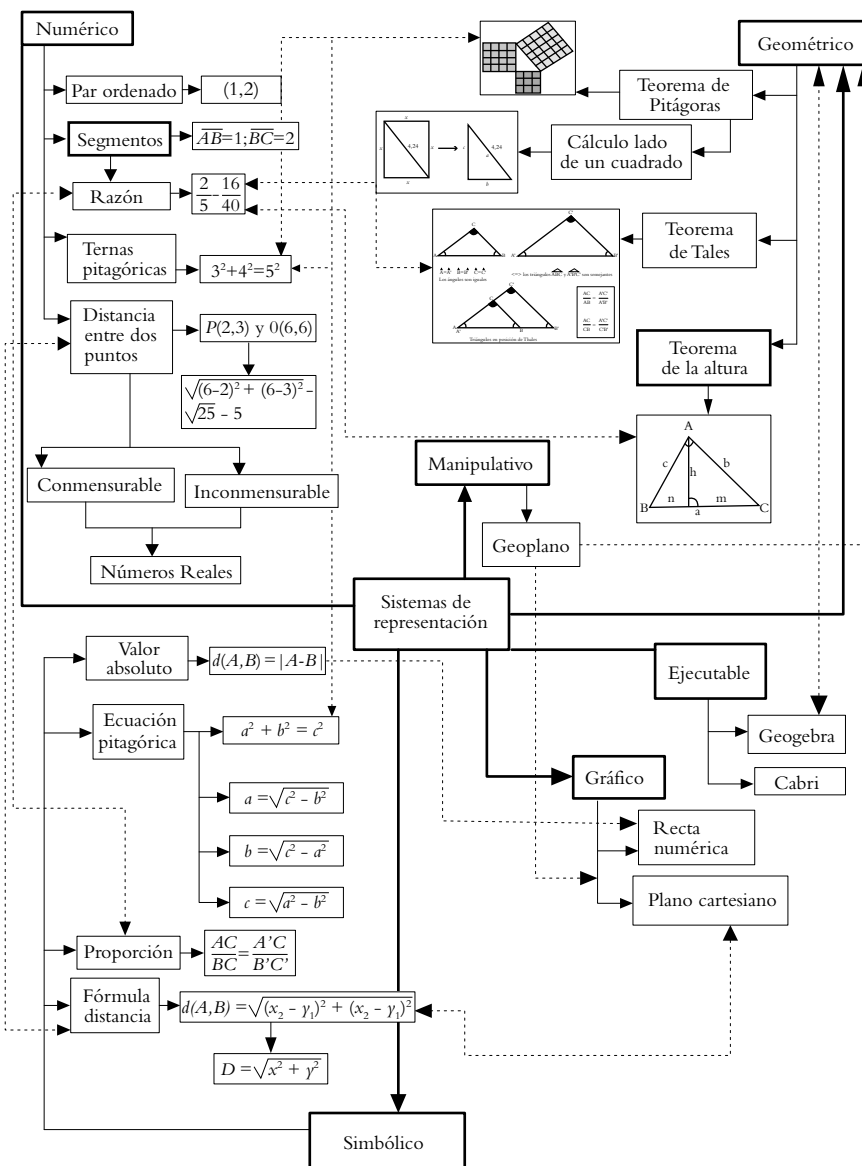


Figura 3. Mapa conceptual de los sistemas de representación del tema

Organizamos la fenomenología para el cálculo de la distancia entre dos puntos de acuerdo con tres aspectos: las subestructuras matemáticas, los contextos fenomenológicos y los contextos del marco PISA 2012. Las primeras hacen parte de la estructura conceptual del tema. Los segundos son

agrupaciones de los fenómenos asociados al tema de acuerdo con sus características estructurales. Y los terceros permiten identificar en qué situaciones está presente el tema.

Relacionamos la primera subestructura matemática —valor absoluto— con el contexto fenomenológico de hallar la medida entre dos puntos que pertenecen a la misma recta real. En ella, agrupamos los fenómenos de trayectoria de vehículos, recorrido entre ciudades, trazado de mapas y distancia de terrenos que relacionamos con los contextos personal, social y científico del marco PISA 2012.

Ubicamos la segunda subestructura matemática —fórmula de la distancia— en el contexto fenomenológico de calcular la distancia más corta entre dos puntos que están representados en el plano cartesiano. En esta subestructura, ubicamos fenómenos como perímetro y área de figuras planas que asociamos a los contextos profesional y científico descritos en el marco PISA 2012.

Relacionamos la tercera subestructura matemática —teorema de Pitágoras— con el contexto fenomenológico de calcular la medida del lado de un triángulo rectángulo. Aquí, reunimos fenómenos como altura de edificios, profundidad de un pozo y perímetro de un triángulo rectángulo. De acuerdo con el marco PISA 2012, el contexto fenomenológico se relaciona con los contextos social, personal y profesional.

Por último, encontramos una relación directa entre la cuarta subestructura matemática —teorema de Tales— y el contexto fenomenológico de calcular la medida de un segmento en figuras semejantes. Los fenómenos que asociamos a esta subestructura matemática son arte (razón áurea), geometría sagrada (figuras geométricas), homotecias (escalas) y proyecciones de sombras. En cuanto al marco PISA 2012, ubicamos los fenómenos asociados con el teorema de Tales en los contextos profesional, social y científico.

## 2. Análisis cognitivo

En este apartado, establecemos lo que esperamos que el estudiante aprenda acerca del tema y nuestras previsiones acerca de la manera en que el estudiante va a lograr ese aprendizaje. En la unidad didáctica, abordamos tres niveles de expectativas de aprendizaje —nivel superior, nivel medio y nivel inferior—. Como expectativas de aprendizaje de nivel superior, identificamos los procesos matemáticos (formular, emplear e interpretar) y las capacidades matemáticas fundamentales (diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, utilización de operaciones



y un lenguaje simbólico, formal y técnico, representación, y utilización de herramientas matemáticas) propuestas en el marco PISA 2012. En el nivel medio, ubicamos los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. En el nivel inferior y, de acuerdo con González y Gómez (2018), proponemos las capacidades que son consideradas como “los procedimientos rutinarios que el estudiante activa a lo largo de la unidad didáctica” (p. 11). Por ejemplo, el objetivo 1 está relacionado con el estándar propuesto por el MEN (2006): “resuelve problemas y simplifica cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos” (p. 86).

Para describir el análisis cognitivo del tema, presentamos los objetivos de aprendizaje, las capacidades, las dificultades y errores relacionados con el tema; además, caracterizamos los objetivos con base en los grafos de criterios de logro. Por último, presentamos las expectativas de tipo afectivo organizadas según el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje.

### *2.1. Objetivos de aprendizaje*

Proponemos tres objetivos de aprendizaje a partir de las subestructuras matemáticas de valor absoluto, la fórmula de la distancia, y los teoremas de Pitágoras y de Tales, que identificamos en el análisis de contenido del tema. El siguiente es el planteamiento de los objetivos.

*Objetivo 1.* Resolver situaciones que requieran la aplicación del valor absoluto para determinar la medida de la trayectoria entre dos puntos y utilizar procedimientos matemáticos para argumentar su solución.

*Objetivo 2.* Utilizar diferentes sistemas de representación para emplear la fórmula de la distancia en el plano cartesiano y justificar la viabilidad de sus respuestas.

*Objetivo 3.* Emplear e interpretar los teoremas de Pitágoras y Tales en una situación real para calcular distancias entre dos puntos.

Con el objetivo 1, pretendemos que la capacidad matemática que más se desarrolle sea el diseño de estrategias junto con el proceso de interpretar. Con el objetivo 2, esperamos que se logren desarrollar en mayor medida la capacidad matemática fundamental de matematización y el proceso de interpretar. Finalmente, con el objetivo 3, pretendemos que el diseño de estrategias sea la capacidad matemática que más se logre desarrollar junto con el proceso de emplear.

Adicionalmente, identificamos las capacidades que los estudiantes pueden activar en el desarrollo de cada objetivo. Las capacidades (anexo 3<sup>1</sup>) están relacionadas con las actuaciones de los estudiantes cuando realizan un procedimiento matemático para resolver una tarea. En palabras de González y Gómez (2018), “las capacidades se definen como las expectativas del profesor sobre la actuación de un estudiante con respecto a una tarea asociada a un tema matemático y se manifiestan mediante conductas observables de los estudiantes” (p. 21). Por ejemplo, para el objetivo 2, consideramos algunas capacidades como comprobar la validez de los resultados (C7) y aplicar el concepto de recorrido (C9).

Luego de definir las capacidades, identificamos las dificultades y errores para el tema. González y Gómez (2018) mencionan que “una dificultad de aprendizaje es una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos” (p. 25). Los errores son la expresión observable de las dificultades y estas últimas permiten organizar los errores. Socas (1997), citado por González y Gómez (2018), “organiza las dificultades de aprendizaje de las matemáticas en cinco categorías, según los factores que las originan” (p. 25). Para nuestro tema, tenemos en cuenta dos categorías para organizar las dificultades: la complejidad de los objetos matemáticos y los procesos propios del pensamiento matemático.

En la primera categoría, ubicamos la dificultad (anexo 4) para aplicar principios, reglas, normas o teoremas relacionados con el cálculo de la distancia entre dos puntos. En la segunda categoría, ubicamos dos dificultades: la dificultad en la traducción entre los sistemas de representación y la dificultad asociada con estrategias de solución de situaciones relacionadas con el cálculo de la distancia. Algunos de los errores vinculados con la dificultad en la traducción de sistemas de representación pueden ser sustituir inadecuadamente parejas ordenadas en la fórmula de la distancia (E11) y usar inadecuadamente escalas para representar recorridos en la recta numérica o en el plano cartesiano (E17).

Para caracterizar cada uno de los objetivos de aprendizaje, construimos un grafo de criterios de logro conformado por los posibles caminos de aprendizaje con los que el profesor expresa las previsiones sobre cómo los estudiantes avanzan en el logro de los objetivos. González y Gómez (2018) mencionan que “un camino de aprendizaje de una tarea es una sucesión de capacidades

---

1 Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8702/>

que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en que pueden incurrir” (p. 29). La descripción de los criterios de logro (anexo 25) surgió a partir de la identificación de capacidades y de los errores en los que podrían incurrir los estudiantes al desarrollar las tareas prototípicas asociadas a cada objetivo. Los criterios de logro del tema sirven como indicadores de la progresión que el estudiante realiza para lograr el objetivo de aprendizaje. Los nombramos de la forma  $n.m$ , en donde  $n$  es el objetivo y  $m$  el número del criterio.

En el caso del criterio de logro CdL2.1, asociado a identificar las variables y valores relevantes de una situación, encontramos que el estudiante puede desarrollar las capacidades relacionadas con determinar la unidad de medida a partir de los datos del problema e identificar las variables y valores relevantes para resolver un problema (C1-C24). En este caso, prevemos que puede incurrir en los errores relacionados con usar inadecuadamente escalas para representar recorridos en el plano cartesiano, hacer representaciones gráficas que no coinciden con el enunciado de la situación y plantear estrategias de forma individual, sin reconocer las soluciones de otros (E17-E25-E65).

## 2.2. Caracterización del objetivo 1

Caracterizamos el objetivo 1 a partir del grafo de criterios de logro y su descripción. En la figura 4, presentamos el grafo de los criterios de logro que surge de los caminos de aprendizaje que un estudiante puede activar en el desarrollo del objetivo.

El grafo de criterios de logro está compuesto por cinco caminos de aprendizaje. Todos los caminos de aprendizaje inician cuando el estudiante representa un enunciado verbal de manera gráfica, simbólica o verbal (CdL1.1). A partir de este criterio de logro, se desprenden cuatro ramificaciones. La primera ramificación empieza cuando el estudiante debe explicar la representación gráfica de una situación (CdL1.2) y finaliza cuando justifica la solución propuesta a partir de un razonamiento lógico (CdL1.10). Los criterios de logro que permiten al estudiante identificar el punto inicial y final de un recorrido y calcular la longitud de un segmento son CdL1.3 y CdL1.4, que se ubican en el segundo y tercer camino de aprendizaje y conllevan la aplicación del concepto de valor absoluto (CdL1.7). Luego, el estudiante continúa determinando la medida de segmentos, resolviendo operaciones entre ellos (CdL1.8) y aplicando las propiedades de la distancia (CdL1.9). La cuarta ramificación inicia con el criterio de logro (CdL1.5) cuando el estudiante deduce variables

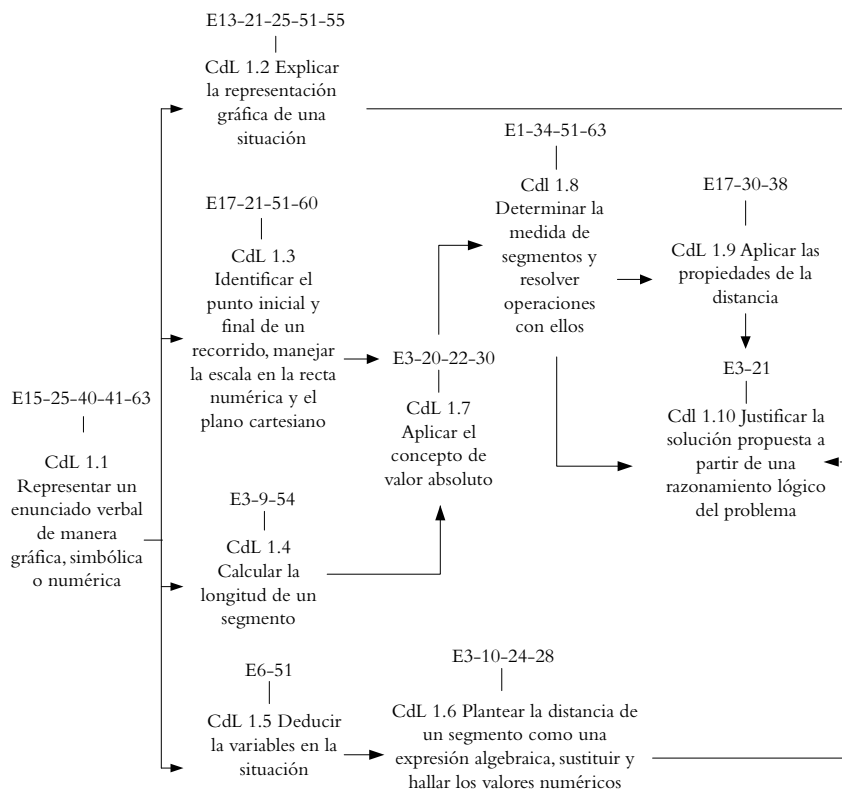


Figura 4. Grafo de criterios de logro para el objetivo 1

de una situación y luego plantea la distancia de un segmento como una expresión algebraica (CdL1.6).

### 2.3. Caracterización del objetivo 2

Caracterizamos el objetivo 2 a partir del grafo de criterios de logro y su descripción. En la figura 5, mostramos el grafo de criterios de logro para este objetivo.

En este objetivo, se activan cinco caminos de aprendizaje. Todos los caminos de aprendizaje inician con la identificación de los valores y variables relevantes de la situación (CdL2.1) y finalizan cuando el estudiante debe justificar la solución (CdL2.11). El primer camino de aprendizaje comienza cuando el estudiante relaciona los puntos cardinales (CdL2.2), pero puede incurrir en el error de relacionar incorrectamente los puntos cardinales con los ejes del plano cartesiano (E13). Luego, debe comparar segmentos y operar

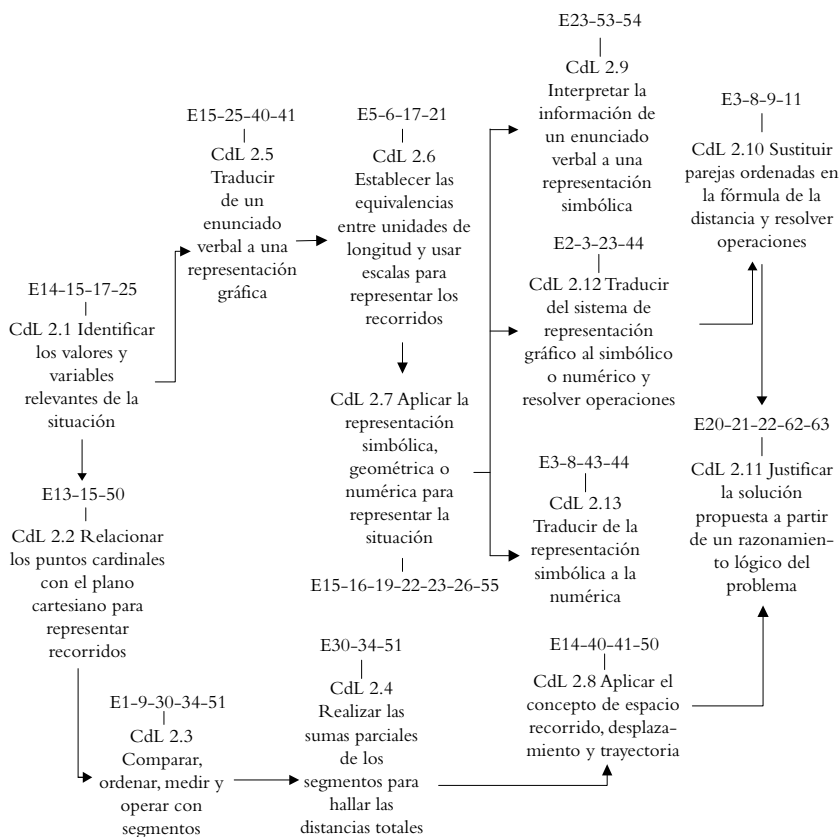


Figura 5. Grafo de criterios de logro para el objetivo 2

con ellos, y realizar las sumas parciales de los segmentos para hallar distancias totales (CdL2.3 y CdL2.4). En el segundo camino de aprendizaje, el estudiante tiene la posibilidad de interpretar información de un enunciado verbal en una representación gráfica, para después establecer las equivalencias entre unidades de longitud y aplicar la representación simbólica, geométrica o numérica para representar la información (CdL2.6 y CdL2.7). En este momento, el estudiante tiene tres opciones: (a) interpretar información de un enunciado verbal en una representación simbólica y luego sustituir parejas ordenadas en la fórmula de la distancia (CdL2.9 y CdL2.10) —procedimientos en los que puede calcular valores usando procedimientos erróneos (E3) y sustituir inadecuadamente parejas ordenadas en la fórmula de la distancia (E11)—; (b) traducir del sistema de representación gráfico al simbólico o numérico (CdL2.12) y sustituir parejas ordenadas (CdL2.10); y (c) traducir información

de la representación simbólica a la numérica para aplicar conceptos como espacio recorrido, desplazamiento y trayectoria (CdL2.8 y CdL2.13).

#### 2.4. Caracterización del objetivo 3

En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 3 y, posteriormente, lo describimos.

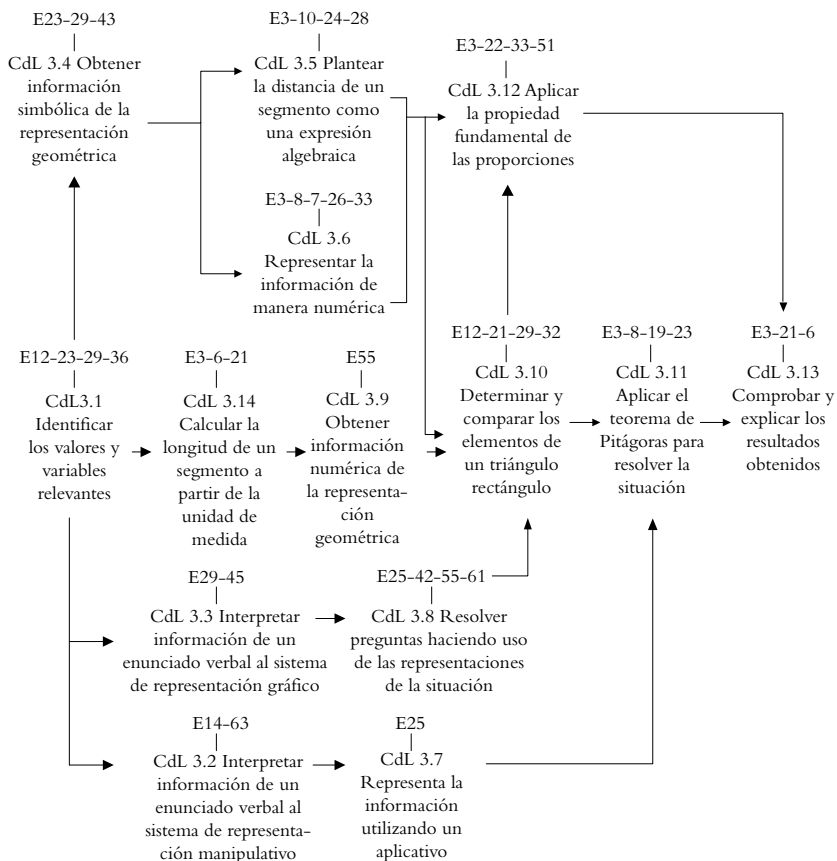


Figura 6. Grafo de criterios de logro para el objetivo 3

En el grafo del objetivo 3, se activan siete caminos de aprendizaje. Todos los caminos de aprendizaje inician cuando el estudiante identifica los valores y variables relevantes (CdL3.1) y finalizan cuando comprueba y explica los resultados (CdL3.11). A partir del primer criterio de logro, existen cuatro posibilidades. La primera posibilidad surge cuando el estudiante obtiene

información simbólica de una representación geométrica (CdL3.4), pero puede incurrir en calcular valores usando procedimientos erróneos (E3). Aquí, el estudiante tiene dos opciones: plantear la distancia de un segmento como una expresión algebraica (CdL3.5) o representar la información de manera numérica (CdL3.6). Luego, aplica la propiedad fundamental de las proporciones (CdL3.12). En este caso, puede expresar incorrectamente una proporción que relaciona longitudes de segmentos (E33). La segunda posibilidad inicia cuando el estudiante calcula la longitud de un segmento a partir de la unidad de medida y obtiene información de una representación geométrica (CdL3.14 y CdL3.9). Posteriormente, determina y compara los elementos de un triángulo rectángulo (CdL3.10). El estudiante puede elegir entre aplicar la propiedad fundamental de las proporciones (CdL3.12) o aplicar el teorema de Pitágoras (CdL3.11). La tercera posibilidad inicia cuando el estudiante interpreta información de un enunciado verbal en el sistema de representación gráfico y resuelve preguntas (CdL3.3 y CdL3.8). Posteriormente, determina y compara elementos de un triángulo rectángulo (CdL3.10) y elige entre aplicar la propiedad de las proporciones (CdL 3.11) o el teorema de Pitágoras (CdL3.12). La última posibilidad surge cuando el estudiante interpreta información de un enunciado verbal en el sistema de representación manipulativo (CdL3.2), representa la información al utilizar el aplicativo (CdL3.7) y aplica el teorema de Pitágoras (CdL3.11).

### *2.5. Expectativas de tipo afectivo*

Así como el análisis cognitivo está relacionado con el conocimiento, este análisis también considera los factores de tipo afectivo. González y Gómez (2018) mencionan que “el dominio afectivo contempla las actitudes, creencias y emociones de los estudiantes” (p. 38). Abordamos la motivación de los estudiantes desde el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje, pues ubica toda su atención en analizar las actitudes, predisposición y los hábitos favorables al aprendizaje. En la tabla 1, presentamos el listado de las expectativas de tipo afectivo propuestas para la unidad didáctica.

Para cada expectativa afectiva, consideramos un enfoque general. De esta manera, las expectativas de tipo afectivo EA1 y EA4 se refieren al desarrollo de hábitos; las expectativas de tipo afectivo EA2 y EA3 están relacionadas con la predisposición; y la expectativa de tipo afectivo EA5 está asociada con el desarrollo de actitudes. Pretendemos que cada una de las expectativas de tipo afectivo contribuya al desarrollo de las capacidades matemáticas

fundamentales de representación, utilización de operaciones, razonamiento y diseño de estrategias.

Tabla 1

*Listado de expectativas afectivas del tema cálculo de la distancia entre dos puntos*

EA	Descripción
1	Promover el hábito de realizar un diagrama o gráfico en la resolución de problemas asociados a encontrar la distancia entre dos puntos
2	Valorar la utilidad de los resultados matemáticos en el cálculo de la distancia
3	Desarrollar una predisposición favorable al emplear distintos sistemas de representación en el cálculo de distancias entre dos puntos
4	Desarrollar perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones relacionadas con el cálculo de la distancia entre dos puntos
5	Desarrollar actitud favorable en la resolución de problemas asociados al cálculo de la distancia

*Nota.* EA = expectativa de tipo afectivo

### ***2.6. Factores que afectan la motivación***

La motivación es definida por González y Tourón (1992) como el “proceso que explica el inicio, dirección, intensidad y perseverancia de la conducta encaminada hacia el logro de una meta, modulado por las percepciones que los sujetos tienen de sí mismos y por las tareas a las que se tienen que enfrentar” (citado por González y Gómez, 2018, p. 165). Los seis aspectos que afectan la motivación son los siguientes: (a) adecuación a las demandas cognitivas, (b) reto, (c) reacción a los errores, (d) contribución a la interacción, (e) contexto y (f) compartir metas. A partir de estos seis aspectos que afectan la motivación establecimos seis variables para evaluar los factores que afectan la motivación de los estudiantes en el desarrollo de la unidad didáctica.

### **3. Análisis de instrucción**

En este apartado, presentamos la estructura del diseño previo de la unidad didáctica. Describimos las siete tareas de aprendizaje y detallamos la estructura de la ficha de la tarea Recorrido (objetivo 2). Finalmente, exponemos la secuencia de tareas y su contribución a las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo.



### 3.1. Tareas de aprendizaje

Gómez, Mora y Velasco (2018), mencionan que “una tarea de aprendizaje es aquella que el profesor propone a los estudiantes con el propósito de contribuir a que logren las expectativas propuestas y superen sus limitaciones de aprendizaje” (p. 198). Para diseñar cada una de las tareas de aprendizaje tuvimos en cuenta sus elementos: (a) requisitos, (b) metas, (c) formulación, (d) materiales y recursos, (e) agrupamiento, (f) interacción, (g) temporalidad y (h) previsiones. Los requisitos corresponden a los conocimientos y destrezas previos para abordar una tarea. Las metas indican aquellos aspectos de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo a los que la tarea pretende contribuir. La formulación se refiere al texto o la instrucción que el profesor proporciona a los estudiantes y que especifica lo que espera que ellos realicen. Los recursos son herramientas que ayudan a la enseñanza y aprendizaje, mientras que los materiales son objetos diseñados con el propósito de la enseñanza de las matemáticas. El agrupamiento consiste en establecer una conformación de grupos para desarrollar los procesos de aprendizaje. La interacción está relacionada con el agrupamiento porque se da entre diferentes actores: profesor, estudiante, pareja, grupo pequeño y grupo de clase. En la temporalidad de una tarea de aprendizaje se establece una etapa de tiempo para el desarrollo de una parte de la tarea y se describen los literales por resolver, los materiales y recursos utilizados en el lapso estipulado. Por último, las previsiones se representan por medio del grafo de criterios de logro de la tarea.

Para cada tarea de aprendizaje, diseñamos una ficha que está compuesta por la descripción detallada de los elementos que describimos anteriormente (anexo 5). En el diseño previo, propusimos dos tareas de aprendizaje para el objetivo 1 (Ruta H3 y Mapa), dos para el objetivo 2 (Antena y Recorrido) y tres para el objetivo 3 (Ruta<sup>2</sup>, Fotografía<sup>3</sup>, Simulacro<sup>4</sup>). A continuación, describimos de manera general las tareas de aprendizaje que contribuyen a los objetivos de aprendizaje.

Para el objetivo 1, la tarea Ruta H3 tiene como requisito abordar el valor absoluto y la distancia entre dos puntos de la recta numérica y el recurso utilizado es el aplicativo Google Maps. La tarea Mapa tiene como requisito representar puntos en el plano cartesiano e identificar los puntos cardinales;

---

2 La tarea Ruta es una adaptación de la Tarea 4 propuesta por Marín (2011).

3 La tarea Fotografía es una adaptación de la propuesta por Bernardis y Moriema (2013).

4 La tarea Simulacro es una adaptación de la propuesta por Bernardis y Moriema (2013).

la meta consiste en que el estudiante aplique la distancia taxi (distancias horizontales y verticales) en el plano cartesiano. Los materiales y recursos que planteamos para esta tarea son el Geoplano, el papel, lápiz, colores y regla.

En el objetivo 2, la tarea Antena tiene como requisito que el estudiante maneje las operaciones de números reales, ubique puntos en el plano cartesiano y maneje escalas; la meta es calcular la distancia entre dos puntos al utilizar distintos sistemas de representación; el material propuesto para esta tarea es el Geoplano. La tarea Recorrido tiene como requisitos identificar puntos en el plano cartesiano y diferenciar distancias verticales y horizontales; la meta es aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano; y el recurso propuesto es la calculadora científica.

En el objetivo 3, la tarea Ruta tiene como requisito resolver operaciones de números reales, establecer la relación de orden entre ellos y aplicar los conceptos básicos de geometría; la meta es que el estudiante emplee el teorema de Pitágoras al utilizar el aplicativo Geogebra y realice traducciones del sistema de representación ejecutable al numérico, y del numérico al simbólico. La tarea Fotografía tiene como meta que el estudiante justifique sus resultados a partir de sus construcciones geométricas y utilice Geogebra para argumentar sus conjeturas. Esta tarea pretende centrar su atención en el cálculo de la distancia entre dos puntos al utilizar la semejanza de triángulos. Finalmente, con la tarea Simulacro, buscamos que el estudiante asocie los teoremas de Pitágoras y Tales con la construcción de la gráfica (Geogebra) para calcular distancias desconocidas.

#### *Ejemplo de la ficha de la tarea Recorrido*

Los requisitos que proponemos para que los estudiantes realicen la tarea son identificar y diferenciar las distancias verticales y horizontales en el plano cartesiano, utilizar las medidas de longitud, ubicar parejas ordenadas en el plano y manejar la calculadora científica. A continuación, mostramos la formulación de la tarea.

El señor Joaquín se encuentra en su automóvil localizado en la calle 19 con carrera 52. Decide utilizar Google Maps teniendo en cuenta la ruta en automóvil para llegar al centro comercial Calima (Calle 19 # 28-80) y dejar a su amigo Juan.

Al utilizar el aplicativo, se genera la información que se presenta en la figura A. De manera individual, interprete la información que suministra el aplicativo Google Maps para un recorrido en automóvil.



Figura A. Ruta en automóvil de Google Maps

Conforme grupos de cuatro personas y observe la figura, luego respondan las siguientes preguntas.

1. ¿En qué situaciones consideran que se utilizan los puntos cardinales en la vida diaria?
2. ¿Qué relación hay entre las direcciones, los puntos cardinales y el plano cartesiano?

Ahora, mostramos una aproximación de la ruta del automóvil en el plano cartesiano donde la escala está dada en metros ( $m$ ). Según la figura B, analicen y respondan las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se relacionan los puntos cardinales con la representación gráfica que se muestra en la figura B?
2. ¿Cómo se relacionan la imagen de Google Maps con los puntos cardinales y el plano cartesiano?
3. ¿La ruta que se presenta es un recorrido o un desplazamiento?
4. ¿Cuáles son las coordenadas que indican el punto de partida y llegada?
5. ¿Qué distancia recorre el automóvil desde el punto A hasta el punto C?
6. ¿Qué distancias se pueden hallar sin hacer procedimientos matemáticos, en el recorrido del automóvil? Argumenten su respuesta.

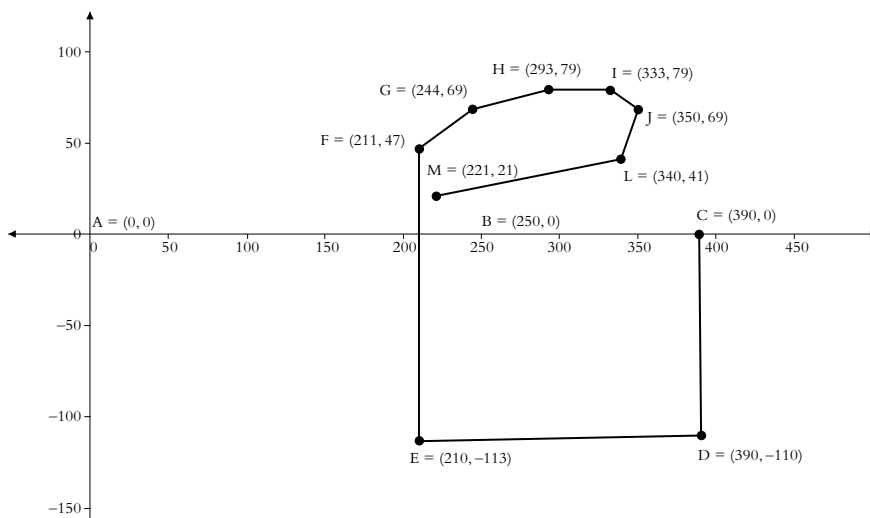


Figura B. Representación de la ruta en el plano cartesiano

7. Juan decide no hacer el recorrido en el auto, por la congestión vehicular, y caminar hasta el centro comercial. Señalen los posibles caminos que puede utilizar con distintos colores. ¿Cuál es el camino más corto?
8. Utilicen la calculadora para encontrar la distancia desde el punto  $L$  hasta el punto  $M$ .
9. Utilicen la calculadora para encontrar la distancia total recorrida por el automóvil desde el punto  $A$  hasta el punto  $M$ .

*Material.* Proponemos emplear en el desarrollo de la tarea la calculadora científica para encontrar resultados numéricos que se asocien con la distancia entre dos puntos.

*Agrupamiento.* La tarea se presenta en dos momentos: el primero, cuando el estudiante realiza la interpretación individual de la imagen que genera el aplicativo Google Maps, y, el segundo, cuando en grupos de tres, los estudiantes interpretan la representación gráfica.

*Interacción.* En el primer momento, los estudiantes interpretan individualmente la información que genera la figura A. En el segundo momento, comparten su análisis en grupos de tres estudiantes y responden las preguntas. En el tercer momento, los estudiantes discuten, resuelven y argumentan los interrogantes planteados ante el gran grupo y el profesor realiza las aclaraciones pertinentes

relacionadas con la representación gráfica de la información que suministra Google Maps.

*Temporalidad.* La tarea consta de cinco etapas de acuerdo con la formulación hecha anteriormente. El primer momento, proponemos 5 minutos dedicados a la puesta en común del grafo de criterios de logro de la tarea. Luego dedicamos 5 minutos para la explicación de la meta de la tarea. En un tercer momento (30 minutos), mostramos una imagen del recorrido de un automóvil, en la que se analizan conceptos como recorrido, puntos cardinales y distancia. Después, proponemos la representación gráfica en el plano cartesiano de ese recorrido, y, a partir de ella, esperamos que el estudiante responda las preguntas propuestas en un tiempo aproximado de 60 minutos. Finalmente, reservamos 15 minutos para dilucidar y poner en común el formato del diario del estudiante.

### 3.2. Secuencia de tareas

En este subapartado, presentamos la secuencia de tareas propuesta para la unidad didáctica y describimos su contribución a las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo. En la tabla 2, mostramos las sesiones, los objetivos, las

Tabla 2  
*Secuencia de tareas para el diseño previo*

S	O	T	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
			F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
1	1	1.1	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		
2	1	1.1	✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		✓	✓		
3	2	1.2	✓	✓		✓	✓				✓	✓		✓	✓					✓		✓	
4	2	2.1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓			✓					✓	✓		
5	2	2.1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓						✓	✓		
6	3	3.1	✓	✓		✓		✓			✓	✓		✓	✓					✓	✓	✓	
7	3	3.2	✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓					✓		✓	
8	3	3.3	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓				✓	

*Nota.* F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; T1.1 = Ruta H3; T1.2 = Mapa; T2.1 = Recorrido; T3.1 = Ruta; T3.2 = Fotografía; T3.3 = Simulacro, S = sesión, T = tarea

tareas de aprendizaje y las previsiones de su contribución a las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos. Cada una de las sesiones que consideramos para el diseño previo es de 110 minutos.

Para el objetivo 1, prevemos que la tarea Ruta H3 contribuya en mayor medida a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, y representación, en el proceso de interpretar. La expectativa de tipo afectivo que pretendemos desarrollar con la tarea es valorar la utilidad de los resultados matemáticos en el cálculo de la distancia (EA2) para que el estudiante argumente la veracidad de los resultados que genera el aplicativo Google Maps. Pretendemos que la tarea Mapa contribuya en mayor medida a la capacidad matemática fundamental de representación en el proceso de emplear. Con esta tarea, prevemos desarrollar la expectativa de tipo afectivo EA4, relacionada con la perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones, porque permite que el estudiante genere el hábito de proponer y seleccionar una estrategia para resolver la tarea.

En el objetivo 2, con el desarrollo de la tarea Antena, pretendemos que el estudiante fortalezca las capacidades matemáticas fundamentales de matematización y diseño de estrategias para resolver problemas, y el proceso matemático de interpretar. También, buscamos que contribuya a la expectativa afectiva EA3, relacionada con el desarrollo de una predisposición favorable al emplear distintos sistemas de representación, porque el estudiante puede utilizar las representaciones simbólica, numérica, manipulativa y geométrica. Con la tarea Recorrido, prevemos desarrollar las capacidades matemáticas fundamentales de matematización y uso de herramientas matemáticas, y el proceso matemático de interpretar, porque la formulación de la tarea está relacionada con el análisis de la información que suministra el aplicativo Google Maps. Esperamos que el estudiante desarrolle predisposición para valorar la utilidad de los resultados matemáticos que encuentra en la solución de la tarea (EA2).

Para el objetivo 3, con la tarea Ruta, prevemos desarrollar las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias, matematización y utilización de herramientas matemáticas, y los procesos de formular y emplear. También, buscamos aportar a las expectativas afectivas de promover el hábito de realizar un diagrama o gráfico (EA1) y valorar la utilidad de los resultados (EA2), pues prevemos que los estudiantes manejen, representen y comparen los resultados obtenidos con el software Geogebra. El desarrollo de la tarea Fotografía puede permitir que se activen las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias, matematización y utilización de operaciones en los procesos de formular y emplear. En la tarea Simulacro, prevemos que

los estudiantes activen las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias y matematización en los procesos matemáticos de formular y emplear. Pretendemos que las tareas Fotografía y Simulacro contribuyan a las expectativas de tipo afectivo relacionadas con valorar la utilidad de los resultados y la perseverancia en el planteamiento y resolución de problemas (EA2 y EA4), pues el estudiante genera predisposición y hábito para hallar una manera de resolver la situación.

### **3. Instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información**

Después del diseño previo de la unidad didáctica, establecimos instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información sobre el desarrollo de la dimensión cognitiva y afectiva. Para la recolección de la información, diseñamos las tareas de evaluación (diagnóstica y examen final) y contemplamos los registros del desarrollo de las tareas de aprendizaje por parte de los estudiantes. También, diseñamos los formatos del diario del estudiante y diario del profesor, para registrar sus percepciones durante la implementación. Elaboramos el sistema de evaluación de la unidad didáctica que nos permitió dar cuenta del nivel de desempeño de cada estudiante. Para el registro de la información obtenida con los instrumentos de recolección de información, la generación de resultados y el análisis de datos, empleamos el sistema ACE (Análisis de Consecución de Expectativas). A continuación, describimos los instrumentos y procedimientos de recolección de información de la unidad didáctica.

#### **1. Tareas de evaluación**

En este apartado, presentamos los instrumentos de recolección y análisis de datos. Según González y Gómez (2018), las tareas de evaluación son “aquellas tareas matemáticas que se pueden utilizar para evaluar el logro de objetivos, posiblemente en distintos momentos de su desarrollo” (p. ★★). Tenemos en cuenta la tarea diagnóstica, el examen final y el desarrollo de las tareas de aprendizaje.

##### **1.1. Tarea diagnóstica**

En el análisis cognitivo, propusimos un listado de capacidades que se pueden activar en la implementación de la unidad didáctica, junto con la lista de

errores en los que incurren los estudiantes. Según Romero y Gómez (2018), “la tarea diagnóstica fue diseñada para indagar si los estudiantes manifiestan tener los conocimientos previos para comenzar con la implementación de la unidad didáctica” (p. 286), establecer momentos de realimentación para nivelar el grupo y proporcionar ayudas a los estudiantes que, después de la realimentación, no han logrado superar en mayor medida las dificultades.

La tarea diagnóstica (anexo 11) que diseñamos contiene trece puntos que están relacionados con los conocimientos previos y los errores asociados. Por ejemplo, con el literal 1, buscamos que el estudiante realice operaciones con números racionales, con el fin de indagar por el conocimiento previo de realizar operaciones que requieren el empleo de los números reales. Los estudiantes pueden incurrir en el error de calcular valores al utilizar procedimientos erróneos. Diseñamos, como ayuda, un taller de realimentación de la tarea diagnóstica que se puede consultar en el anexo 10.

### *1.2. Examen final*

Para evaluar la unidad didáctica, diseñamos el examen final (anexo 15), con el cual pretendemos evaluar el desarrollo de cada uno de los objetivos de aprendizaje que propusimos desde las subestructuras matemáticas. Con la primera tarea del examen, pretendemos evaluar si el estudiante aplica el concepto de valor absoluto al calcular la distancia taxi entre dos puntos (objetivo 1). Con la segunda tarea, buscamos que el estudiante aplique la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano (objetivo 2). En la tercera tarea, pretendemos evaluar la subestructura relacionada con el teorema de Pitágoras y establecer si el estudiante halla la distancia de uno de los lados en un triángulo rectángulo. En la tarea cuatro, evaluamos la subestructura relacionada con el teorema de Tales. En este caso, el estudiante debe hallar la distancia de un segmento en figuras semejantes (objetivo 3).

La rúbrica que propusimos para evaluar el examen y establecer el logro de los objetivos está compuesta por niveles de logro, indicadores y una valoración numérica de acuerdo con el sistema de evaluación de la institución. En la tabla 3, presentamos el ejemplo de rúbrica (anexo 14) para el objetivo 2.



Tabla 3  
Niveles de logro e indicadores para el objetivo 2

Niveles de logro	Indicadores	Escala institucional
Superior	El estudiante activa todos los criterios de logro del objetivo, que le permiten hallar la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, sin incurrir en errores	9,5 a 10
Alto	El estudiante puede incurrir en el error E21 —obtener la respuesta sin indicar la unidad de medida acorde con el enunciado del problema— lo que no le impide llegar hasta el final de la tarea	8,0 a 9,4
Básico	El estudiante es capaz de reconocer que la situación planteada se puede resolver al aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano, pero puede incurrir en el error E17 —plantear de manera inadecuada la escala en la recta numérica—, en el error E14 —considerar que todas las trayectorias en el plano son verticales y horizontales— o en el error E11 —sustituir inadecuadamente parejas ordenadas en la fórmula de la distancia	6,0 a 7,9
Bajo	El estudiante hace representaciones gráficas que no coinciden con el enunciado de la situación (E25). El estudiante ubica incorrectamente parejas ordenadas en el plano cartesiano (E15). El estudiante puede incurrir en utilizar fórmulas no adecuadas para solucionar la situación planteada (E22). El estudiante interpreta de manera errónea el enunciado de la situación (E63).	0 a 5,9

## 2. Desarrollo de las tareas de aprendizaje

El desarrollo de las tareas de aprendizaje por parte de los estudiantes nos permite identificar los caminos de aprendizaje que ellos siguieron y establecer en qué medida se activaron los criterios de logro que fueron previstos en el diseño de la unidad didáctica. A partir de los errores, fijamos una serie de indicadores que nos permiten determinar en qué nivel el estudiante activó cada criterio de logro —activación total, parcial o nula—. De manera general, la activación de un criterio de logro es total cuando el estudiante realiza el procedimiento completo de manera correcta y obtiene el resultado esperado; la activación es parcial cuando el estudiante incurre en algunos errores, pero puede continuar con el desarrollo de la tarea; y hay activación nula cuando el estudiante incurre en errores que no le permiten continuar con el desarrollo de la tarea.

### 3. Diarios

Los diarios del estudiante y del profesor son instrumentos que utilizamos con el fin de recolectar información acerca de las percepciones sobre la activación de los criterios de logro y la consecución de las expectativas de tipo afectivo. Los diarios permiten registrar información cualitativa sobre la implementación de cada una de las tareas de aprendizaje. El diario del profesor se diligencia durante el desarrollo de cada sesión de clase y el del estudiante, al culminar cada tarea.

#### 3.1. *Diario del estudiante*

Los estudiantes realizan una autoevaluación de su proceso de aprendizaje al registrar sus percepciones en el formato denominado diario del estudiante (anexo 13). En este instrumento, registramos información relacionada con la dimensión cognitiva y afectiva en los siguientes apartados: (a) grafo de criterios de logro de la tarea, (b) matematógrafo y (c) preguntas. En el primero, mostramos el grafo con los criterios de logro del objetivo y señalamos en línea gruesa los caminos de aprendizaje que puede recorrer el estudiante para solucionar la tarea. En la figura 7, mostramos el grafo de criterios de logro para el objetivo 2.

El grafo de criterios de logro de la tarea permite recolectar información acerca de la dimensión cognitiva, por medio de un semáforo en el cual el estudiante marca los círculos con el color que considere pertinente: con color verde si activa totalmente el criterio logro, con color amarillo si activa el criterio de logro de manera parcial y con rojo si no llegó a activar el criterio de logro.

Por otro lado, el matematógrafo permite obtener datos acerca de las percepciones de los estudiantes sobre la motivación, por medio de una gráfica que registra el nivel de agrado o desagrado en el desarrollo de cada tarea para cada variable que presentamos en el análisis cognitivo. “El nivel de agrado o desagrado está representado por una cara que da cuenta de la sensación del estudiante en cada aspecto de la tarea que contribuye a la motivación” (Romero y Gómez, 2018, p. 295). En la figura 8, presentamos el matematógrafo que diseñamos para el diario del estudiante.

Con la información recolectada con este instrumento, pretendemos determinar si las consideraciones hechas al planificar las tareas sirvieron para que fueran motivantes para los estudiantes. En el último apartado del diario,

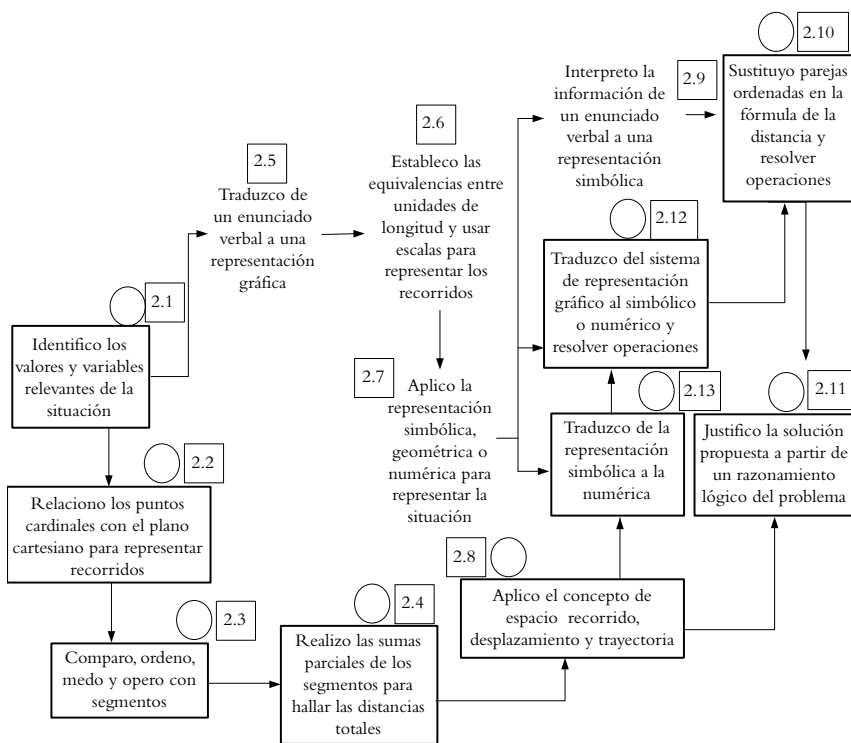


Figura 7. Grafo de criterios de logro tarea Recorrido del objetivo 2

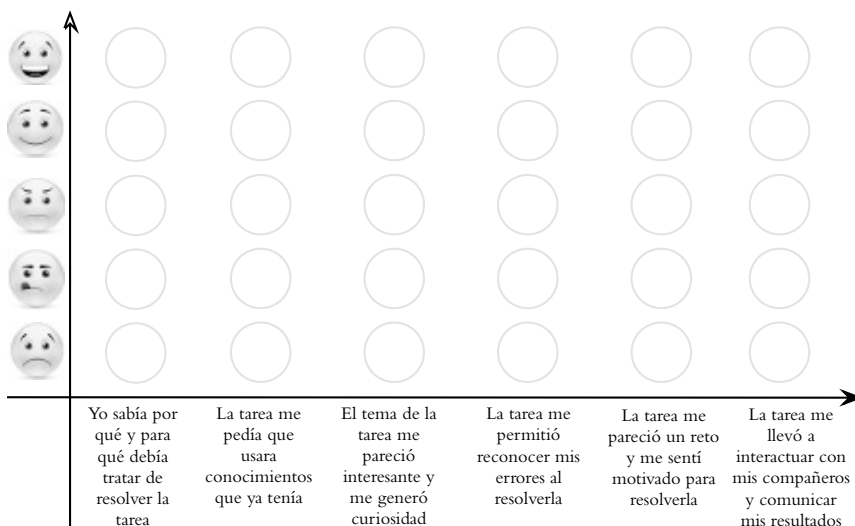


Figura 8. Matematógrafo

queremos que el estudiante escriba las dificultades y fortalezas encontradas al desarrollar la tarea. Esto nos permite conocer problemas específicos o percepciones de los estudiantes de aspectos que les facilitaron su solución.

### *3.2. Diario del profesor*

Con este instrumento (anexo 14), pretendemos registrar las observaciones según la planificación de las tareas de aprendizaje y lo ocurrido durante la implementación. Además, este instrumento nos permite recolectar información sobre el desarrollo de las dimensiones cognitiva y afectiva por el grupo de estudiantes. Para la dimensión cognitiva, contemplamos los siguientes elementos: grafo de criterios de logro de la tarea, observaciones cualitativas para cada criterio de logro, y tabla de activación de los criterios de logro.

Según su percepción, en el grafo de criterios de logro de cada tarea, el profesor asigna a cada criterio de logro un porcentaje y un color: rojo, amarillo y verde. Si marca de color rojo es porque el 50% de los estudiantes o más no logró desarrollar el procedimiento. El color amarillo indica que el grupo de estudiantes realizó procedimientos incorrectos pero pudo continuar con la tarea. El color verde refleja que los estudiantes realizan correctamente el proceso asociado al criterio de logro, y el profesor percibe que al menos un 90% de los estudiantes cumple con esta característica.

Para la dimensión afectiva, consideramos los siguientes elementos: tabla de consecución de las expectativas de tipo afectivo de la tarea, matematógrafo y tabla de toma de decisiones. Con el primero, buscamos que el profesor registre los niveles de consecución de las expectativas de tipo afectivo en porcentajes, según el total de estudiantes. En el segundo, queremos que el profesor señale su percepción sobre el nivel de agrado o desagrado del grupo de estudiantes para cada variable asociada a la motivación (aquí empleamos las mismas variables que en el matematógrafo del estudiante). Para el tercero, pretendemos que el profesor registre en la tabla algunas acciones que surjan en el momento de implementar la tarea de manera que puedan contribuir a tomar decisiones posteriores.

## **4. Sistema de evaluación de la unidad didáctica**

Para el sistema de calificación de la unidad didáctica, contemplamos tres instrumentos de valoración: diario del estudiante, desarrollo de las tareas de aprendizaje y examen final. Desde los requerimientos de la institución IED

Santa Bárbara, realizamos la evaluación desde tres aspectos: el procedimental que corresponde a las actividades desarrolladas por los estudiantes con las siete tareas de aprendizaje; el cognitivo que está asociado con las cuatro tareas de evaluación para cada objetivo; y el actitudinal que evaluamos al finalizar las tareas de aprendizaje de acuerdo con las expectativas de tipo afectivo y los niveles de consecución de cada una.

Para la valoración del aspecto actitudinal, consideramos la autoevaluación que es obtenida cuando el estudiante registra su desempeño con el grafo de criterios de logro en el diario del estudiante; la coevaluación cuando en los grupos de trabajo se evalúa el desempeño de cada compañero; y la heteroevaluación cuando el profesor escribe en el diario del profesor su percepción sobre el desempeño de los estudiantes de acuerdo con las expectativas de tipo afectivo. En la tabla 4, presentamos la valoración del desempeño final de un estudiante.

Tabla 4  
*Valoración del desempeño final de un estudiante*

Forma de evaluación	Instrumentos de evaluación	Obtención de la valoración		
Procedimental 56%	Tareas de aprendizaje	Cada tarea tiene un valor del 8%	Criterio de logro 4% según el diario del estudiante	Criterio de logro 4% según la activación de cada criterio de logro en el diario del profesor
	T1.1 Ruta H3		al rellenar el	
	T1.2 Mapa		semáforo	
	T2.1 Antena			
	T2.2 Recorrido			
	T3.1 Ruta			
	T3.2 Fotografía T3.3 Simulacro			
Cognitiva 14%	Tareas de evaluación			
	Tarea 1	4% objetivo 1		
	Tarea 2	4% objetivo 2		
	Tarea 3	3% objetivo 3		
	Tarea 4	3% objetivo 3		
Actitudinal 30%	Las cinco expectativas afectivas	Autoevaluación	Coevaluación	Heteroevaluación
		El estudiante se evalúa (10%)	El compañero de la clase lo evalúa (10%)	El profesor lo evalúa (10%)

## 5. Sistema ACE

A continuación, mostramos cómo, a partir de la información que proporciona la aplicación de las tareas de aprendizaje y de evaluación, obtenemos los resultados que nos permiten evaluar el diseño de la implementación de la unidad didáctica con el sistema ACE. El sistema ACE (anexo 8) permite establecer en qué medida el diseño implementado contribuye a las expectativas propuestas. Se basa en dos aspectos: las previsiones de cómo las tareas contribuyen a las expectativas de aprendizaje de nivel superior, a las expectativas afectivas y a los aspectos que afectan la motivación, y la corrección de las tareas de aprendizaje y el examen final.

Para cada uno de los objetivos y tareas propuestas, registramos los criterios de logro asociados, su respectiva descripción y los errores en los que prevemos que pueden incurrir los estudiantes. Luego de la corrección de las tareas, registramos en el sistema ACE los errores en los que incurre cada estudiante para cada uno de los criterios de logro. Esta información nos permitió establecer los caminos de aprendizaje activados y los niveles de consecución —nulo, parcial o total— de los criterios de logro. Registramos la activación con una valoración de 0, 1 o 2, respectivamente.

Según las previsiones hechas por el profesor, los criterios de logro contribuyen a determinadas expectativas de aprendizaje de nivel superior. En ese sentido, el sistema ACE promedia los resultados obtenidos en las tareas para cada criterio de logro y proporciona el porcentaje de desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos.

El nivel de consecución de las expectativas de tipo afectivo y la valoración de los factores que afectan la motivación se obtiene de dos fuentes de información. Para las expectativas de tipo afectivo, la primera fuente de información son las percepciones registradas en el diario del profesor para cada tarea, mientras que la segunda resulta de la activación de cada criterio de logro en el desarrollo de las tareas. La valoración de los factores que afectan la motivación surge de las percepciones de los estudiantes y del profesor que son representadas en los matematógrafos de los diarios. Esta información permite contrastar las percepciones del profesor y del estudiante en relación con el desarrollo de la dimensión afectiva en la unidad didáctica.

## 4. Descripción de la implementación

En este apartado, presentamos la descripción de la implementación (anexo 16) y proponemos los cambios realizados en el diseño previo. Para la implementación, iniciamos el desarrollo de la unidad didáctica con la presentación del tema a los estudiantes. Después, presentamos los tres objetivos de aprendizaje —con sus respectivas tareas de aprendizaje y metas— y los instrumentos de recolección de información. Luego, explicamos a los estudiantes la manera en que desarrollaríamos la unidad didáctica (a partir de la evaluación diagnóstica, la secuencia de tareas y el examen final) e hicimos énfasis en el trabajo individual y grupal, el uso de aplicativos, el sistema de evaluación abordado desde los aspectos cognitivo, procedimental y actitudinal, y el manejo del diario del estudiante.

Encontramos que, luego de aplicar la secuencia de tareas, los estudiantes mostraron falta de comprensión de algunos términos relacionados con las alturas sobre el nivel del mar en la tarea Recorrido del objetivo 2. Ante esta dificultad, modificamos la formulación de la tarea e incluimos la representación gráfica de la situación; también reorganizamos el agrupamiento, debido a que no se cumplía con las previsiones hechas para las expectativas de aprendizaje de nivel superior y de tipo afectivo.

Realizamos algunos cambios en el diario del profesor (anexo 18). En la última parte de ese documento, incluimos una tabla con las previsiones sobre la contribución de los criterios de logro a las expectativas de aprendizaje de nivel superior; allí, el profesor encierra en un círculo aquellas que se desarrollaron o que no fueron contempladas en el diseño previo y realiza la descripción de las observaciones cualitativas. A continuación, mostramos en la tabla 5, el diligenciamiento de la percepción del profesor sobre la contribución de la tarea Recorrido del objetivo 2 a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Realizamos los cambios relacionados con el sistema de evaluación y la nota final de cada uno de los estudiantes en el valor del porcentaje del examen final asignado para los tres objetivos (14%). Inicialmente, pretendíamos evaluar los tres objetivos, pero, por cuestiones externas a la unidad didáctica, no alcanzamos a evaluar el último objetivo, por lo que asignamos un valor del 7% para los objetivos 1 y 2.

Durante la implementación, identificamos el estándar de competencias “uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (MEN, 2006, p. 86) como un estándar transversal para todos los objetivos de nuestra unidad didáctica. La transversalidad

Tabla 5  
*Contribución de la tarea Recorrido a las expectativas de aprendizaje de nivel superior*

CdL	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
Objetivo 2.Tarea 1.1																					
22		✓	✓			✓			✓			✓			✓			✓			
23			✓			✓					✓	✓			✓					✓	
26	✓	✓		✓		✓			✓	✓			✓					✓			✓
213		✓				✓			✓			✓			✓			✓			✓

Nota. CdL= criterio de logro, F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas

del estándar se origina porque los tres objetivos apuntan a utilizar representaciones geométricas. Por ejemplo, para el objetivo 1, las tareas promueven la representación de la recta numérica con el uso del Google Maps y el Geoplano. Las tareas de los objetivos 2 y 3 requirieron la representación de parejas ordenadas en el plano cartesiano, trazar y calcular las distancias con ayuda de la calculadora, y el aplicativo Geogebra.

## 5. Evaluación del diseño y la implementación

En este apartado, mostramos el análisis a la evaluación del desarrollo de las dimensiones cognitiva y afectiva, a partir de los resultados proporcionados por el sistema ACE. Por último, presentamos la evaluación de la planificación, los ajustes y mejoras que realizamos a la unidad didáctica, luego del análisis de los resultados.

### 1. Evaluación del desarrollo de la dimensión cognitiva

Para la dimensión cognitiva, consideramos el logro de objetivos y la contribución de las tareas a las expectativas de aprendizaje de nivel superior. El sistema ACE proporciona resultados sobre el logro de los objetivos a partir de la activación de criterios de logro en el desarrollo de las tareas de aprendizaje y el examen final. En la figura 9, presentamos el porcentaje de logro de los tres objetivos, desde las tareas y los resultados del examen final.



Comparaciones de logros entre el proceso de enseñanza cotidiano y el examen final								
	Objetivo 1		Objetivo 2		Objetivo 3		Global	
Descripción corta	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final
Promedios de contribución a la exp.	66,3	74,6	73	48,3	85,1		75,8	61,4
Estud. Contr. Expect <50%		48		23				42

Figura 9. Logro de objetivos de la unidad didáctica

Presentamos el análisis de los resultados del examen del objetivo 2 teniendo en cuenta la rúbrica del examen y el criterio de logro CdL2.8. Según la información de la figura 9, vemos que el objetivo 1 presenta los porcentajes más bajos de consecución desde los resultados de la corrección de las tareas. Encontramos que el objetivo 2 presentó un porcentaje medio de consecución, mientras que el objetivo 3 tuvo el mayor porcentaje de logro debido a la secuencia de tareas planteada.

Centramos nuestro análisis en la tarea Recorrido, que forma parte del objetivo 2. En ese sentido, revisamos las previsiones sobre las ponderaciones asignadas a los criterios de logro. Observamos que los criterios de logro con mayor ponderación son aplicar el concepto de espacio recorrido (CdL2.8) y sustituir parejas en la fórmula de la distancia (CdL2.10). Luego, analizamos los resultados que proporciona el resumen de activación de criterios de logro y hallamos que el criterio de logro CdL2.8 fue el que presentó una menor activación, debido a que los estudiantes incurrieron en el error de confundir el concepto de recorrido y desplazamiento (E50).

La formulación del examen final para el objetivo 2 permitió a los estudiantes aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Pero, según los resultados que proporciona el sistema ACE, el objetivo 2 es el que presenta una mayor diferencia entre los resultados de la corrección de las tareas y el examen final. Esto se debe a que la extensión del examen final, junto con el tiempo previsto para su aplicación, ocasionó que los estudiantes no alcanzaran a contestar las preguntas de los objetivos 2 y 3.

### 1.1. Desarrollo de las expectativas de aprendizaje de nivel superior

Realizamos la revisión de las previsiones asignadas para la contribución de cada una de las tareas de aprendizaje a las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos. A continuación, mostramos el análisis de las contribuciones de cada una de las tareas a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

#### *Contribución de las tareas de la unidad didáctica a las capacidades matemáticas fundamentales*

Revisamos las previsiones para establecer que cada objetivo contribuye en mayor medida al desarrollo de determinadas capacidades matemáticas fundamentales. En la figura 10, mostramos el resumen de la contribución de las tareas de aprendizaje al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales que genera el sistema ACE a partir de la activación de los criterios de logro.

Diseño est. RP %	Matematiza- ción %	Comunica- ción %	Raz.Y Arg. %	Uso leng. y op. %	Representa- ción %	Herramientas matemat. %	Promedio global
<b>Totales Objetivo 1</b>							
62,4	64,9	64,2	64,9	63,9	62,8	67,9	MEDIA
Diseño est. RP %	Matematiza- ción %	Comunica- ción %	Raz.Y Arg. %	Uso leng. y op. %	Representa- ción %	Herramientas matemat. %	Promedio global
<b>Totales Objetivo 2</b>							
67,6	62,9	59,7	59,0	58,4	55,7	55,8	MEDIA
Diseño est. RP %	Matematiza- ción %	Comunica- ción %	Raz.Y Arg. %	Uso leng. y op. %	Representa- ción %	Herramientas matemat. %	Promedio global
<b>Totales Objetivo 3</b>							
70,8	69,3	70,1	68,8	68,0	65,4	65,8	MEDIA

Figura 10. Contribución de la unidad didáctica a las capacidades matemáticas fundamentales

Observamos en la figura que, para el objetivo 1, la capacidad fundamental de diseño de estrategias se activó en menor medida. Por esta razón, nos vamos a centrar en ella para identificar las debilidades del diseño de la unidad didáctica. En el objetivo 2, la capacidad matemática que más se desarrolló por medio de las tareas de aprendizaje fue el diseño de estrategias, porque los estudiantes seleccionaban o diseñaban un plan que permitía reformular matemáticamente la situación planteada. Además, las interacciones planteadas permitieron que los procesos de poner en común llevaran a los estudiantes a validar que la distancia entre dos puntos puede ser igual a las sumas parciales

de segmentos. Para el objetivo 3, encontramos que la capacidad matemática fundamental que más contribuyó fue el diseño de estrategias que coincide con las previsiones. Las tareas asociadas al objetivo permitieron desarrollar estrategias para interpretar, argumentar y validar resultados de acuerdo con la situación. El software Geogebra contribuyó a validar y comparar los resultados.

*Contribución de las tareas de la unidad didáctica a los procesos matemáticos*

En este subapartado, presentamos los resultados de activación de los procesos matemáticos que establecimos para cada uno de los objetivos de aprendizaje (figura 11).

Cont. CL a cada proceso Objetivo 1			Cont. CL a cada proceso Objetivo 2			Cont. CL a cada proceso Objetivo 3		
	Numérico	Etiqueta		Numérico	Etiqueta		Numérico	Etiqueta
Formular	62,7	MEDIA	Formular	69,8	MEDIA	Formular	68,7	MEDIA
Emplear	64,7	MEDIA	Emplear	54,8	MEDIA	Emplear	67,2	MEDIA
Interpretar	64,7	MEDIA	Interpretar	60,7	MEDIA	Interpretar	72,6	MEDIA

*Figura 11.* Promedio de desarrollo de los procesos matemáticos en la unidad didáctica

Revisamos los resultados y los comparamos con las previsiones, para establecer que las tareas de aprendizaje del objetivo 1 contribuyeron en menor medida al proceso matemático de interpretar. En la formulación de las tareas del objetivo 1, no evidenciamos con claridad el proceso de interpretar porque no le indicamos al estudiante que argumentara teniendo en cuenta el contexto de la situación para generar una reflexión sobre las soluciones matemáticas propuestas. Por otro lado, en el objetivo 1, el proceso matemático que más se activó fue emplear, porque en la tarea Ruta H3 y Mapa los estudiantes realizaron explicaciones que apoyaban la solución al problema. Los procesos de interacción planteados permitieron que los estudiantes comprendieran el alcance de la solución respecto al contexto.

Para el objetivo 2, según las previsiones, las tareas buscaban contribuir en mayor medida al proceso matemático de interpretar. Realizamos la revisión de los resultados y los comparamos con las previsiones, para establecer que las tareas de aprendizaje contribuyeron en menor medida al proceso matemático de interpretar. Para la tarea Antena, planteamos la interacción en un solo momento, por lo que no evidenciamos la interpretación de resultados y la valoración de dos o más representaciones de la situación. En el caso de la tarea Recorrido, no tuvimos en cuenta en las previsiones un tiempo específico para la puesta en común sobre la utilización de la fórmula de la distancia, ya

que no generamos un espacio para interactuar, articular una solución, mostrar el trabajo asociado y presentar los resultados matemáticos obtenidos.

En las previsiones para el objetivo 3, pretendíamos contribuir en mayor medida al proceso matemático de emplear. Sin embargo, al realizar el análisis de los resultados, establecimos que la formulación de la tarea Ruta le indicaba al estudiante el procedimiento que debía seguir, por lo que no tuvo la necesidad de seguir una serie de pasos que condujera a la solución. En la tarea Fotografía, la formulación no permitió que el estudiante utilizara el teorema de Tales para explicar, defender o justificar su aplicación. Finalmente, la tarea Simulacro no permitió el reconocimiento de la estructura matemática para calcular la distancia entre dos puntos y se enfocó más en el análisis de las representaciones geométricas.

## 2. Evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva

En este apartado, contemplamos la contribución de las tareas de aprendizaje a las expectativas de tipo afectivo y la valoración de los aspectos que afectan la motivación. Realizamos las comparaciones teniendo en cuenta los resultados del sistema ACE.

### 2.1. Contribución de las tareas de la unidad didáctica a las expectativas de tipo afectivo

En este subapartado, presentamos los resultados obtenidos según el sistema ACE para los tres objetivos planteados, desde el análisis de las expectativas afectivas. Los resultados surgen de las percepciones de los estudiantes y el profesor y de los criterios de logro que se registraron en los diarios. A partir de la información de la figura 12, establecemos, para la tarea Recorrido, cuáles fueron las expectativas afectivas con mayor y menor contribución.

Percepción de expectativas afectivas por el profesor_DP y contribución de los CL del grupo a las expectativas afectivas									
	Objetivo 1		Objetivo 2			Objetivo 3			
	EA2	EA3	EA2	EA3	EA4	EA2	EA3	EA4	EA5
Criterios de logro	76,9	72,1	75,8	58,9	81,2	75,0	73,8	84,7	73,8
	ALTA	MEDIA	ALTA	MEDIA	ALTA	ALTA	MEDIA	ALTA	MEDIA
Profesor	75	100	75	50	100	100	100	100	75
	ALTA	ALTA	ALTA	MEDIA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA

Figura 12. Desarrollo de expectativas de tipo afectivo por objetivo

Los resultados obtenidos en el sistema ACE nos confirman que las tareas de aprendizaje fortalecieron la expectativa afectiva EA2 —evaluar los resultados matemáticos— que evaluamos para los tres objetivos. La expectativa afectiva EA3 —desarrollar una predisposición favorable al emplear distintos sistemas de representación— tiene una menor contribución, porque en algunas tareas el sistema de representación fue una dificultad para alcanzar los criterios de logro propuestos. Encontramos que la tarea Recorrido, que forma parte del objetivo 2, contribuyó en mayor medida a la expectativa afectiva EA4 —desarrollar perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones— y en menor medida a la expectativa afectiva EA3.

Estos niveles de contribución a las expectativas de tipo afectivo se deben a que, en el desarrollo de la tarea Recorrido, los estudiantes realizaron en reiteradas ocasiones cálculos numéricos, procedimientos para escribir y hallar la fórmula de la distancia, inferir resultados y conjeturar conclusiones. Las acciones realizadas por los estudiantes nos indicaron que fueron perseverantes al resolver la situación planteada en la tarea, pero el uso del sistema de representación simbólico no favoreció el desarrollo de la tarea. El objetivo 2 presenta una mayor contribución a las expectativas afectivas EA2 —evaluar los resultados matemáticos— y EA4 —desarrollar perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones—, desde los criterios de logro y la percepción del profesor. En la figura 13, presentamos el desarrollo de las expectativas afectivas para el objetivo 2 desde la percepción del profesor.

Percepción del profesorado			
Objetivo 2		Tarea 1	Tarea 2
Expectativas afectivas	Descripción corta	0,1,2	0,1,2
EA2	Evaluar los resultados matemáticos	1	2
EA3	Emplea los distintos sistemas de representación	1	1
EA4	Perseverar en resolver situaciones	2	2

Figura 13. Percepción del profesor de las expectativas de tipo afectivo para el objetivo 2

La formulación de la tarea Recorrido (tarea 2) solicita al estudiante utilizar la fórmula de la distancia de forma repetitiva. Esto implica que la tarea se centró únicamente en el manejo de los sistemas de representación simbólico y numérico. Por lo anterior, los estudiantes desarrollaron en menor medida la expectativa de tipo afectivo EA3. Finalmente, se reitera que la expectativa afectiva con mayor contribución a la unidad didáctica es EA2 —evaluar los

resultados matemáticos— porque el uso de la calculadora y la representación gráfica permitieron poner en común los resultados y validar las soluciones.

## 2.2. Contribución de las tareas a los aspectos que afectan la motivación

Los factores que afectan la motivación están asociados a seis variables que se plantearon para el matematógrafo (anexo 13). En la figura 14, presentamos los resultados proporcionados por el sistema ACE respecto a la valoración de los factores que afectan la motivación.

	Var1	Var2	Var3	Var4	Var5	Var6
	Sabía por qué resolver la tarea	Sabía cómo hacerlo	Tema interesante	Detecté mis errores	Fue un reto motivante	Pude interactuar con los demás
<b>Objetivo 1</b>						
Estudiante	ALTA	MUY ALTA	ALTA	MUY ALTA	ALTA	ALTA
Profesor	ALTA	MUY ALTA	MUY ALTA	ALTA	ALTA	MUY ALTA
<b>Objetivo 2</b>						
Estudiante	ALTA	ALTA	MUY ALTA	MUY ALTA	ALTA	MUY ALTA
Profesor	MEDIA	MUY ALTA	ALTA	MUY ALTA	ALTA	MUY ALTA
<b>Objetivo 3</b>						
Estudiante	MUY ALTA	ALTA	MUY ALTA	MUY ALTA	ALTA	MUY ALTA
Profesor	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	MUY ALTA	MUY ALTA

Figura 14. Factores que afectan en la motivación para cada objetivo

Luego de la implementación de la unidad didáctica encontramos que la variable 2 —detecte mis errores— y la variable 6 —pude interactuar— son las que más contribuyeron, porque las ayudas previstas en el diseño previo permitían que el estudiante continuara con el desarrollo de la tarea. En el objetivo 2, y con los procedimientos que realiza el sistema ACE, encontramos contrastes entre las tres primeras variables. Por ejemplo, en la variable 3, los estudiantes tienen un mayor nivel de percepción y esto concuerda con el desarrollo de las tareas, porque los estudiantes incurren en varios errores, pero estuvieron motivados debido al uso de la calculadora y el Geoplano. Las variables 1 y 5 del objetivo 2 fueron las que obtuvieron un menor promedio debido a que la formulación de las tareas era confusa y el lenguaje no fue de fácil comprensión. En la figura 15, presentamos la percepción del profesor de los aspectos que afectan la motivación para el objetivo 2.

Objetivo 2		Percepción del profesorado de la motivación			
Factores		Tarea 1	Tarea 2		
Variable	Descripción corta	0,1,2,3,4	0,1,2,3,4	Media	Escala
Var1	Sabía por qué resolver la tarea	2	2	2	MEDIA
Var2	Sabía cómo hacerlo	4	3	3,5	MUY ALTA
Var3	Tema interesante	3	3	3	ALTA
Var4	Detecté mis errores	4	4	4	MUY ALTA
Var5	Fue un reto motivante	3	2	2,5	ALTA
Var6	Pude interactuar con los demás	4	4	4	MUY ALTA

Figura 15. Valoración de aspectos que afectan la motivación en las tareas del objetivo 2

Realizamos el análisis de los elementos de las tareas que contribuyeron a la valoración de los aspectos que afectan la motivación. En la tarea Antena, hicimos preguntas orientadoras y el profesor aclaró las dudas de acuerdo con el error. Esto permitió que los estudiantes continuaran con el desarrollo de la tarea. En el desarrollo de la tarea Recorrido, el hecho de relacionar la imagen que produce Google Maps, generó motivación en los estudiantes. Además, las interacciones planteadas para la tarea permitieron que los estudiantes pudieran discutir con sus compañeros y solucionar de manera acertada la situación.

Objetivo 2		Percepción del profesorado de la motivación			
Factores		Tarea 1	Tarea 2		
Variable	Descripción corta	0,1,2,3,4	0,1,2,3,4	Media	Escala
Var1	Sabía por qué resolver la tarea	2	2	2	MEDIA
Var2	Sabía cómo hacerlo	4	3	3,5	MUY ALTA
Var3	Tema interesante	3	3	3	ALTA
Var4	Detecté mis errores	4	4	4	MUY ALTA
Var5	Fue un reto motivante	3	2	2,5	ALTA
Var6	Pude interactuar con los demás	4	4	4	MUY ALTA

Figura 16. Valoración de los aspectos que afectan la motivación en las tareas del objetivo 2

La tarea Recorrido es la que contribuyó en menor medida a la motivación en el objetivo, como mostramos en la figura 16. La formulación de la tarea generó dificultad en la interpretación por parte de los estudiantes y llevó a que hicieran procesos repetitivos.

### 3. Evaluación de la enseñanza

En la evaluación de la enseñanza, revisamos los elementos de las tareas que permitieron concretar las debilidades y fortalezas del diseño implementado. Proponemos aspectos que pueden mejorar el diseño de la unidad didáctica.

#### *3.1. Identificación de las fortalezas y debilidades del diseño implementado*

Al hacer la revisión del logro de objetivos y el desarrollo de las expectativas de aprendizaje de nivel superior y de tipo afectivo, podemos establecer las debilidades y fortalezas de cada una de las tareas de aprendizaje para cada objetivo.

##### *Objetivo 1*

Identificamos que la tarea Ruta H3 contiene debilidades respecto a los literales 2.1 al 2.5 porque son repetitivos y están centrados en el cálculo de la distancia de un punto a otro en la recta numérica. El contexto de la tarea no fue cercano, ya que los estudiantes no reconocieron los lugares asociados con la ruta planteada. Y finalmente, en la implementación, el manejo del aplicativo Google Maps generó distracción a los estudiantes porque estaban más interesados en la exploración del aplicativo que en validar las respuestas obtenidas.

En cambio, para la tarea Mapa, identificamos fortalezas respecto a la interacción entre los estudiantes y el uso del Geoplano, ya que permitió seleccionar estrategias, explicarlas y justificarlas de acuerdo con el contexto. Además, en la tercera parte, el agrupamiento generó un espacio de discusión y validación de estrategias para reconocer la relación entre el contexto del problema y la solución. Finalmente, los estudiantes realizaron reflexiones sobre las soluciones matemáticas y proporcionaron argumentos validados mediante el uso del Geoplano.

##### *Objetivo 2*

La debilidad se presentó en la formulación de la tarea Antena (anexo 16) porque presentaba términos desconocidos para los estudiantes (metros sobre el nivel del mar). Además, los literales 2 y 3 de la formulación le indicaban al estudiante la estructura matemática que debía utilizar para resolver la situación. Solo planteamos la interacción en el literal 4, por lo que se vio afectada la interpretación de resultados y la valoración de dos o más representaciones en relación con la situación. En las previsiones, no tuvimos en cuenta un tiempo específico para la puesta en común sobre la utilización de la fórmula de la distancia, por lo cual no generamos un espacio para interactuar, articular una solución, mostrar el trabajo asociado y presentar los resultados



matemáticos obtenidos. Aunque la tarea Recorrido presenta fortalezas en su implementación, observamos que los literales 4 y 5 no permitieron que el estudiante activara mecanismos para la solución del problema desde el análisis de la representación gráfica.

### *Objetivo 3*

Encontramos la debilidad en la redacción de los literales 1, 2 y 6 de la tarea Ruta porque llevó al estudiante a realizar el mismo procedimiento y no tuvo la necesidad de diseñar una estrategia de solución. El literal 8 no contribuyó a que el estudiante explicara, defendiera o facilitara una justificación de la necesidad de emplear el teorema de Pitágoras para calcular distancias. En la formulación, no promovimos el reconocimiento de la estructura matemática para calcular la distancia entre dos puntos y solo nos enfocamos en el análisis de la representación geométrica.

También, en la tarea Fotografía, la formulación del literal 2 no es precisa porque no permite al estudiante identificar las variables y estructuras matemáticas asociadas con la representación geométrica de la situación. En los literales 3 y 5, le indicamos al estudiante una serie de pasos concretos para resolver la situación, Por lo tanto, no podía elaborar suposiciones o formular un modelo.

### *3.2. Ajustes de mejora*

Mostramos los ajustes teniendo en cuenta las limitaciones de aprendizaje, las debilidades y fortalezas encontradas en las dimensiones cognitiva y afectiva.

#### *Tareas asociadas al objetivo 1*

En la tarea Ruta H3, modificamos el enunciado de la situación y agrupamos los literales 2.1 a 2.5 para permitir que el estudiante elabore y argumente en el contexto. En los apartados 1 y 3 de la tarea Mapa, cambiamos la redacción con el fin de que el estudiante utilice el contexto para justificar los resultados matemáticos.

#### *Tareas asociadas al objetivo 2*

Decidimos eliminar la tarea Antena porque el contexto fue confuso para los estudiantes y el lenguaje propuesto no les permitió determinar las variables que intervenían en el problema. Los literales 1, 2 y 3 le impedían al estudiante elaborar y presentar explicaciones porque solo estaban encaminados a la utilización de operaciones. La secuencia de tareas no se ve afectada con la eliminación de la tarea porque la meta de las dos tareas asociadas al objetivo

2 es calcular la distancia más corta entre dos puntos. Para la tarea Recorrido, eliminamos el literal 7, ya que el estudiante tiene que hacer operaciones repetitivas.

### *Tareas asociadas al objetivo 3*

En la tarea Ruta, organizamos la formulación con el fin de utilizar Geogebra para la construcción de la situación y su posterior solución. Asimismo, eliminamos los literales 1, 2, 6 y 8 porque solo generan instrucción para que el estudiante utilice el teorema de Pitágoras. Luego, adicionamos un literal donde el estudiante explique, defienda y argumente el resultado que presenta el programa Geogebra.

En la tarea Fotografía, proponemos reformular el literal 1 para encaminarlo a hallar las distancias desconocidas. Eliminamos los literales 2, 3 y 5 porque son preguntas que inducen al estudiante a aplicar el teorema de Tales y no le permiten elaborar suposiciones o formular un modelo para resolver la situación. Para la tarea Simulacro, unificamos los literales 4 y 5 encaminados hacia el concepto de distancia y la validación de la información utilizando Geogebra.

## **6. Nuevo diseño**

En este apartado, describimos el nuevo diseño global de la unidad didáctica. Abordamos los siguientes aspectos: concreción del tema, caracterización de los objetivos, expectativas de tipo afectivo, descripción de las tareas, secuencia de tareas, instrumentos de recolección y análisis de información, y sistema de evaluación.

### **1. Concreción del tema de la unidad didáctica**

El tema que desarrollamos en la unidad didáctica es el cálculo de la distancia entre dos puntos. Según el análisis de contenido, realizamos el diseño de la unidad didáctica de acuerdo con las subestructuras matemáticas valor absoluto, fórmula de la distancia, teorema de Pitágoras y teorema de Tales.

### **2. Objetivos**

Presentamos los objetivos a los que queremos contribuir en el nuevo diseño de la unidad didáctica. Primero, describimos cada objetivo respecto al contenido

matemático y mostramos su relación con los estándares básicos de matemáticas a los que contribuyen. La unidad didáctica contempla los siguientes objetivos.

*Objetivo 1.* Resolver situaciones que requieran la aplicación del valor absoluto para determinar la medida de la trayectoria entre dos puntos.

*Objetivo 2.* Utilizar diferentes sistemas de representación para emplear la fórmula de la distancia en el plano cartesiano y justificar la viabilidad de las respuestas.

*Objetivo 3.* Emplear e interpretar los teoremas de Pitágoras y Tales en una situación real para calcular distancias entre dos puntos.

Para el objetivo 1, abordamos los siguientes contenidos: números reales, métrica —valor absoluto—, geometría analítica —recta numérica—, magnitudes físicas —longitud—. Estos contenidos están ubicados en la subestructura de valor absoluto, en el contexto fenomenológico de hallar la medida de la trayectoria entre dos puntos en la recta numérica. El objetivo 1 está asociado al estándar propuesto por el MEN (2006) “resuelve problemas y simplifica cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos” (p. 87). Para el objetivo 2, abordamos los contenidos de números reales, topografía —trayectorias rectas y distancia taxi—, geometría analítica —plano cartesiano— y magnitudes físicas —longitud—, que corresponden con la subestructura de la fórmula de la distancia y el contexto fenomenológico de hallar la distancia más corta entre dos puntos en el plano cartesiano. El objetivo está relacionado con el estándar propuesto por el MEN (2006) “justifica la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias” (p. 87). Para el objetivo 3, abordamos los siguientes contenidos: números reales, geometría analítica —plano cartesiano— y magnitudes físicas —longitud—. Estos contenidos corresponden a la subestructura de los teoremas de Pitágoras y Tales, en el contexto fenomenológico de calcular la medida del lado de un triángulo rectángulo y de un segmento en figuras semejantes. El objetivo contribuye al estándar propuesto por el MEN (2006) “reconoce y contrasta propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales)” (p. 86).

Finalmente, en el nuevo diseño de la unidad didáctica, incluimos el estándar propuesto por el MEN (2006) “uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas” (p. 86), ya que se convierte en un estándar transversal para todos los objetivos, porque las tareas de aprendizaje propuestas en el nuevo diseño se encaminan

a que el estudiante utilice las representaciones geométricas de una situación para crear una representación del mundo real.

### 2.1. Caracterización de los objetivos

En la figura 17 presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 1. Reorganizamos los criterios de logro (anexo 25) que relacionan la distancia taxi en la recta numérica y el plano cartesiano. Cambiamos, la redacción en el criterio de logro CdL1.1 y adicionamos el criterio de logro CdL1.11.

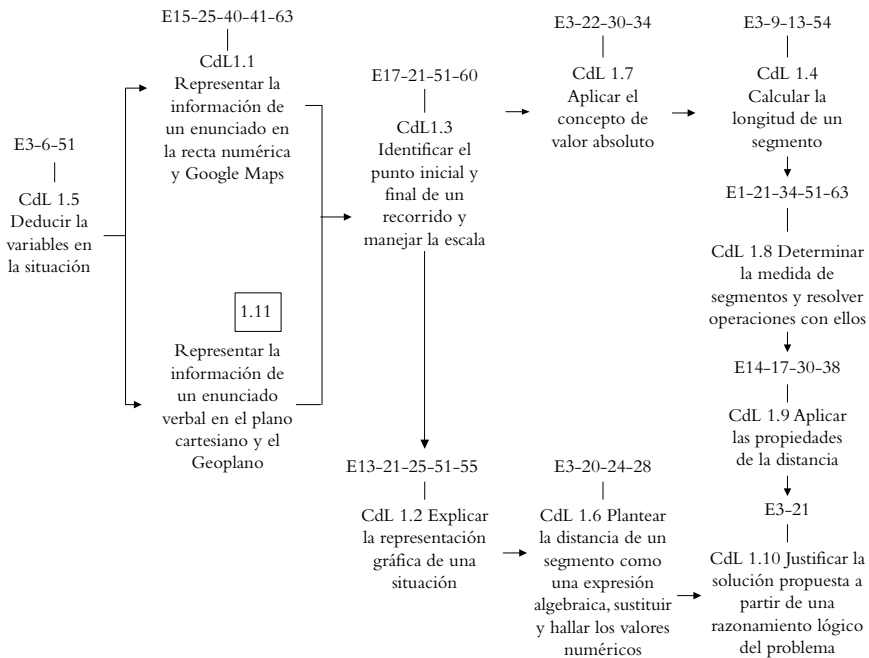


Figura 17. Grafo de criterios de logro para el objetivo 1

Para el desarrollo del objetivo 1, prevemos la activación de cuatro caminos de aprendizaje. Uno de los caminos de aprendizaje inicia cuando el estudiante deduce variables de la situación (CdL1.5). Luego, representa la información del enunciado con la recta numérica y el aplicativo Google Maps para identificar recorridos (CdL1.1). Posteriormente, maneja escalas (CdL1.3), aplica el valor absoluto (CdL1.7), calcula la longitud de los segmentos (CdL1.4) y opera con ellos (CdL1.8). En seguida, el estudiante aplica las propiedades de la distancia (CdL1.9) para llegar a la solución y justificar su respuesta (CdL1.10).

En la figura 18, mostramos el grafo del objetivo 2, en el cual ajustamos la redacción de los criterios de logro CdL2.3, CdL2.5 y CdL2.9 para hacerlos más específicos al uso de la fórmula de la distancia, ya que estos no permitían identificar con claridad las acciones que emprende el estudiante. Luego, reorganizamos, la ubicación de los criterios de logro debido a que eliminamos la tarea Antena planteada en el diseño previo.

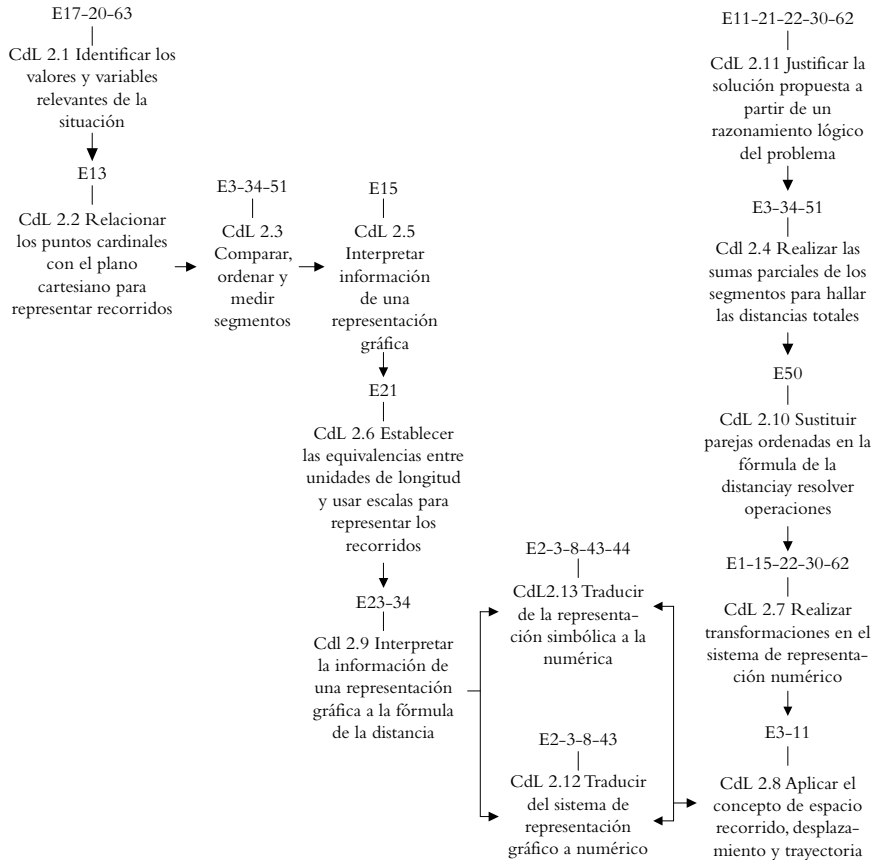


Figura 18. Grafo de criterios de logro para el objetivo 2

Para el objetivo 2, prevemos la activación de dos caminos de aprendizaje. Ambos inician cuando el estudiante identifica los valores y variables relevantes en la situación (CdL2.1) y relaciona los puntos cardinales con el plano cartesiano para representar recorridos (CdL2.2). Luego, debe comparar, ordenar y medir segmentos (CdL2.3), interpretar una información de una

representación gráfica (CdL2.5), establecer las equivalencias entre unidades de longitud (CdL2.6) e interpretar la información de una representación gráfica a la fórmula de la distancia (CdL2.9). A partir del criterio de logro CdL2.9, se desprenden dos caminos. El estudiante puede traducir del sistema de representación gráfico al numérico (CdL2.13) o de la representación simbólica a la numérica (CdL2.7). Finalmente, debe realizar transformaciones en el sistema de representación numérico, sustituir parejas ordenadas en la fórmula de la distancia (CdL2.10), aplicar el concepto de espacio recorrido, trayectoria y desplazamiento (CdL2.8), realizar las sumas parciales de los segmentos (CdL2.4) y justificar la solución propuesta (CdL2.11).

En la figura 19, presentamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 3. Este grafo no sufrió ninguna modificación.

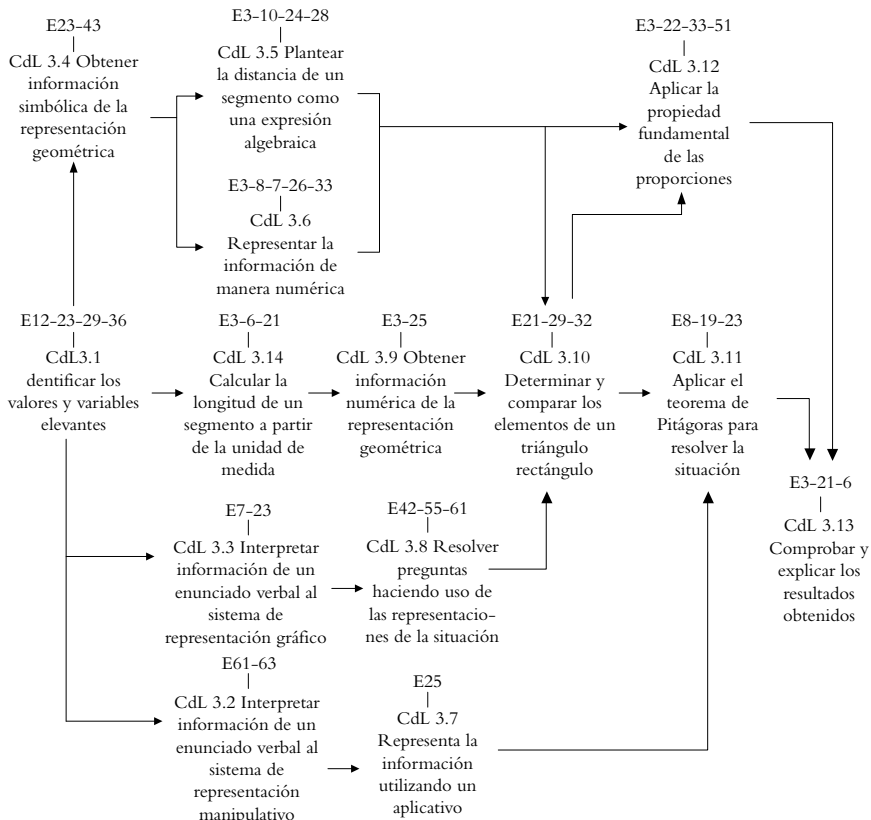


Figura 19. Grafo de criterios de logro para el objetivo 3

Para el objetivo 3, prevemos la activación de seis caminos de aprendizaje. Por ejemplo, uno de los caminos de aprendizaje inicia con identificar los valores y variables relevantes (CdL3.1), luego, traducir del sistema de representación geométrico al simbólico y al numérico (CdL3.4 y CdL3.6), establecer las razones y las proporciones que le permiten aplicar el teorema de Tales (CdL3.12), y expresar la solución, comprobar y explicar los resultados obtenidos (CdL3.13).

### 3. Expectativas de tipo afectivo

En la evaluación de las expectativas de tipo afectivo, determinamos que la expectativa EA1 —promover el hábito de realizar un diagrama o gráfico en la resolución de problemas asociados a encontrar la distancia entre dos puntos— no se evaluó porque, de las siete tareas diseñadas, seis presentaban el gráfico o representación geométrica. Esto hace evidente la falta de relación entre los requerimientos de las tareas y la expectativa afectiva. Ajustamos la redacción de la expectativa afectiva EA1 de la siguiente manera: promover el hábito de interpretar información de una representación gráfica o geométrica en la resolución de problemas. A continuación, mostramos en la tabla 6 el nuevo listado de expectativas de tipo afectivo.

Tabla 6

*Listado de expectativas afectivas del tema cálculo de la distancia entre dos puntos*

EA	Descripción
1	Promover el hábito de interpretar información de una representación gráfica o geométrica en la resolución de problemas
2	Valorar la utilidad de los resultados matemáticos en el cálculo de la distancia
3	Desarrollar una predisposición favorable al emplear distintos sistemas de representación en el cálculo de distancias entre dos puntos
4	Desarrollar perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones relacionadas con el cálculo de la distancia entre dos puntos
5	Desarrollar actitud favorable en la resolución de problemas asociados al cálculo de la distancia

*Nota.* EA = expectativa afectiva

Cada expectativa afectiva está articulada con la consecución de los objetivos de la unidad didáctica. El objetivo 1 se relaciona con las expectativas

afectivas EA1, EA2 y EA3; el objetivo 2 con las expectativas afectivas EA1, EA2, EA3 y EA4; y el objetivo 3 con las expectativas afectivas EA1, EA2, EA3, EA4 y EA5. Las expectativas de tipo afectivo que proponemos tienen en cuenta el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje y que centra su atención en analizar las actitudes y los hábitos favorables al aprendizaje propuestos por González y Gómez (2018).

#### **4. Tareas de aprendizaje y secuencia de tareas**

Presentamos la descripción general de las tareas de aprendizaje y la secuencia de tareas. En la ejemplificación realizamos la descripción de los elementos de la tarea Recorrido.

##### *4.1. Tareas de aprendizaje*

A continuación, hacemos una descripción de las tareas de aprendizaje asociadas a cada objetivo y ejemplificamos cada uno de los elementos de la ficha de la nueva versión de la tarea Recorrido. También, describimos la secuencia de tareas. Presentamos las fichas de tareas para el nuevo diseño en el anexo 20.

##### *Tareas asociadas al objetivo 1*

Para el objetivo 1, planteamos dos tareas de aprendizaje relacionadas con la subestructura de valor absoluto. La primera, la tarea Ruta H3, está relacionada con la utilización del aplicativo Google Maps para hallar la distancia de un recorrido en línea recta. La segunda, la tarea Mapa, se centra en utilizar la distancia taxi en el plano cartesiano a través del Geoplano.

##### *Tareas asociadas al objetivo 2*

Para el objetivo 2, proponemos una tarea de aprendizaje denominada Recorrido, que está orientada a calcular la distancia más corta entre dos puntos al utilizar la fórmula de la distancia. También incluimos el uso del Geoplano como un material para representar información de un contexto real. La tarea Recorrido permite que el estudiante pueda interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones de una situación en la cual se calcula la distancia más corta entre dos puntos. Asimismo, buscamos que el estudiante pueda valorar dos o más representaciones en relación con una situación.



### *Tareas asociadas al objetivo 3*

Para el objetivo 3, proponemos tres tareas de aprendizaje. La primera, la tarea Ruta, tiene como meta emplear el teorema de Pitágoras en situaciones de la vida real a través de la elaboración de representaciones en el software Geogebra. La segunda, la tarea Fotografía, se centra en utilizar el teorema de Tales en la resolución de problemas relacionados con la medida de segmentos en figuras semejantes. Finalmente, la tarea Simulacro concentra la utilización de los teoremas de Pitágoras y Tales para resolverla. Establecemos la coherencia de la secuencia de tareas al tener en cuenta que, para realizar las tareas del objetivo 3, el estudiante debe tener como requisito los temas desarrollados en las tareas de los objetivos 1 y 2. A continuación, presentamos la nueva ficha de la tarea Recorrido como ejemplo de la nueva versión de las fichas de tareas (anexo 20).

#### *4.2. Ejemplo de la ficha de la tarea Recorrido*

Presentamos los requisitos, la meta, la formulación, materiales y recursos, formas de agrupamiento y los esquemas de interacción que planteamos para la tarea. En la formulación, solo presentamos las modificaciones que realizamos en la tarea de aprendizaje.

*Requisitos.* Para que los estudiantes realicen la tarea, es necesario que los estudiantes logren identificar y diferenciar las distancias verticales y horizontales en el plano cartesiano, utilizar las medidas de longitud, construir y ubicar parejas ordenadas en el plano, y manejar la calculadora científica.

*Meta.* La tarea pretende que el estudiante aplique la fórmula de la distancia entre dos puntos en el plano, al traducir de los sistemas de representación ejecutable al gráfico y del simbólico al numérico.

*Formulación.* A continuación presentamos la formulación de la tarea Recorrido.

1. Utiliza el Geoplano para colocar dos cauchos y trazar los dos ejes  $x$  y  $y$ . Luego, ubica las siguientes parejas A (0,0), B (0,3) y C (2,0) y une los puntos. ¿Qué figura se formó? Ahora, traza los posibles caminos desde el punto C hasta B (máximo 3), calcula la distancia de los caminos trazados desde C a B ¿Cuál es la distancia más corta? ¿Qué expresión matemática te permite calcular la distancia más corta entre el punto C hasta B?
2. Google Maps es un servicio gratuito de Google que permite encontrar ubicaciones reales en el mundo, además de proponer distintas rutas para

un destino. Las rutas que maneja Google Maps son para el automóvil, las personas y el avión.

El señor Joaquín se encuentra en su automóvil localizado en la calle 19 con carrera 52 de Bogotá y decide utilizar Google Maps teniendo en cuenta la ruta en automóvil para llegar al centro comercial Calima (Calle 19 # 28 – 80) y dejar a su amigo Juan.

Al utilizar el aplicativo, se genera la información que se presenta en la figura A.

- a. De manera individual, interpreta la información que suministra el aplicativo Google Maps para un recorrido en automóvil.

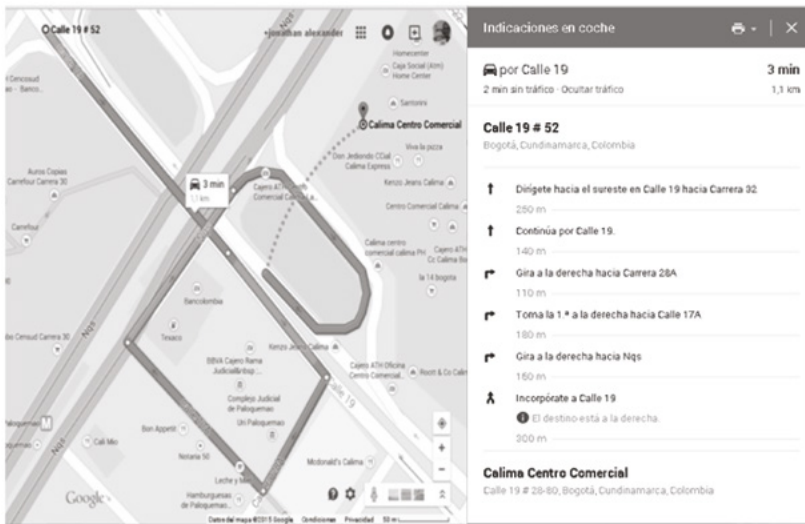


Figura A. Ruta en automóvil de Google Maps

3. Conformar grupos de cuatro personas y observar la figura A. Luego, responder las siguientes preguntas.

- a. ¿En qué situaciones crees que se utilizan los puntos cardinales en la vida diaria?
- b. ¿Qué relación hay entre las direcciones, los puntos cardinales y el plano cartesiano?

Ahora se muestra una aproximación de la ruta del automóvil en el plano cartesiano donde la escala está dada en metros ( $m$ ), según la figura B.

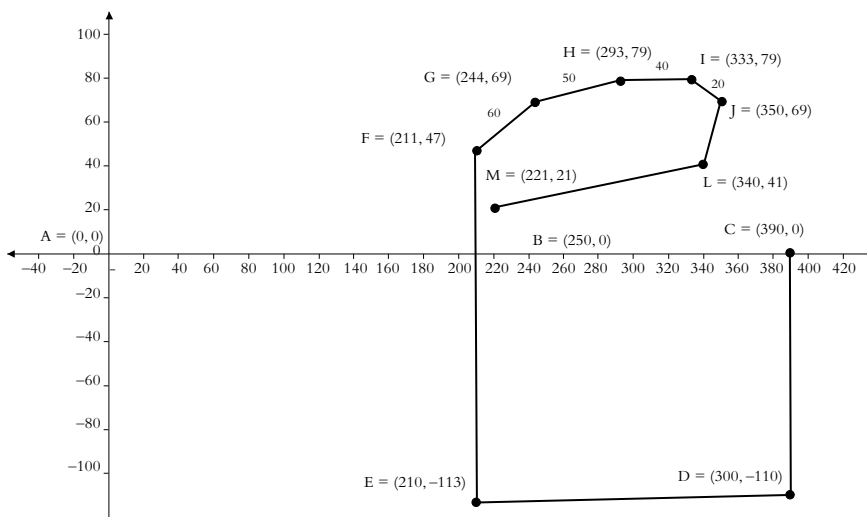


Figura B. Representación de la ruta en el plano cartesiano

4. Responde las siguientes preguntas.
  - a. ¿Cómo se relacionan los puntos cardinales con la representación gráfica que se muestra en la figura B?
  - b. ¿Cómo se relacionan la imagen de Google Maps con los puntos cardinales y el plano cartesiano?
  - c. ¿La ruta que se presenta es un recorrido o un desplazamiento?
  - d. ¿Cuáles son las coordenadas que indican el punto de partida y llegada?
  - e. ¿Qué distancia recorre el automóvil desde el punto A hasta el punto C?
  - f. ¿Qué distancias se pueden hallar sin hacer procedimientos matemáticos en el recorrido del automóvil? Argumenta tu respuesta.
  - g. Utiliza la calculadora para encontrar la distancia total recorrida por el automóvil desde el punto A hasta el punto M, sabiendo que  $\overline{FG} = 40$ ,  $\overline{GH} = 50$ ,  $\overline{HI} = 40$  y  $\overline{IJ} = 20$ .
5. Comparte los resultados con tus compañeros.

*Materiales y recursos.* En esta tarea, se utilizan el Geoplano y la calculadora para realizar representaciones y encontrar resultados numéricos asociados con la fórmula de la distancia entre dos puntos. Este material es de fácil acceso para los estudiantes y no requiere mayor tiempo de preparación para el profesor y el estudiante.

*Agrupamiento.* La tarea de aprendizaje se presenta en tres partes. La primera consiste en la interacción de los estudiantes con el Geoplano, la segunda está relacionada con la interpretación individual de la imagen que genera Google Maps y la tercera se realiza en parejas, momento en el cual es necesario la interpretación de la representación gráfica, geométrica, simbólica y numérica de la fórmula de la distancia en el plano.

*Esquemas de interacción.* En primer lugar, los estudiantes conforman grupos de tres personas y utilizan el Geoplano para resolver la situación planteada; luego, el docente induce a los estudiantes a conjeturar la fórmula de la distancia. En segundo lugar, los estudiantes interpretan individualmente la gráfica de Google Maps para compartir su análisis en el pequeño grupo de tres estudiantes y comunican los resultados a sus compañeros y el profesor para llegar a determinar conclusiones. Por último, los estudiantes discuten, resuelven y argumentan los interrogantes planteados ante el gran grupo y el profesor realiza las aclaraciones pertinentes relacionadas con la representación gráfica de la información que suministra Google Maps y la fórmula de la distancia.

*Temporalidad.* La tarea comprende cinco momentos de acuerdo con la formulación hecha anteriormente. El primer momento (5 minutos) corresponde a la puesta en común del grafo de criterios de logro de la tarea; el segundo (5 minutos), a la explicación de la meta de la tarea. En el tercer momento (30 minutos), mostramos una imagen del recorrido de un automóvil en la ciudad de Bogotá, en la que se analizan conceptos como recorrido, puntos cardinales y distancia. En el cuarto momento (60 minutos), proponemos una representación gráfica en el plano cartesiano de ese recorrido y, a partir de ella, el estudiante calcula las distancias entre dos puntos. En el quinto momento (15 minutos), se utiliza para diligenciar y poner en común el formato del diario del estudiante.

*Previsiones.* En las previsiones para el desarrollo de la tarea Recorrido, presentamos el grafo de criterios de logro y la tabla de ayudas (anexo 25). En la figura 20, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea con sus dos caminos de aprendizaje.

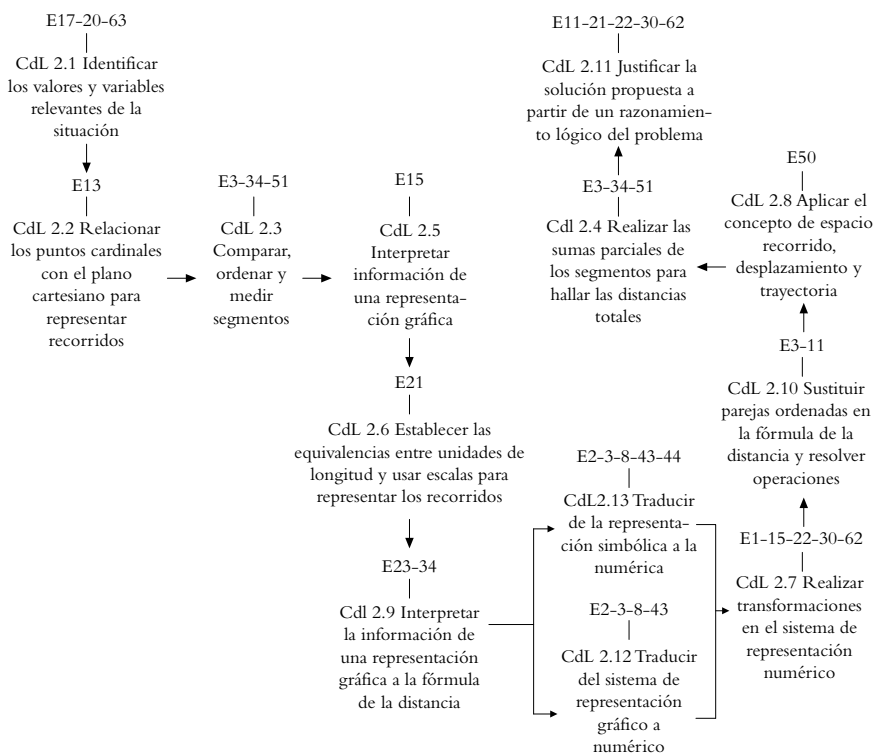


Figura 20. Grafo de criterios de logro tarea Recorrido

### 4.3. Secuencia de tareas

En la tabla 7, mostramos la sesión, el objetivo, las tareas de aprendizaje, las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos a los que pretendemos contribuir en mayor medida.

Cada una de las sesiones que consideramos para el nuevo diseño es de 110 minutos. Para el objetivo 1, plantemos dos tareas de aprendizaje relacionadas con la subestructura de valor absoluto. La primera, Ruta H3, está relacionada con la utilización del aplicativo Google Maps para hallar la distancia de un recorrido en línea recta. La segunda, la tarea Mapa, centrada en utilizar la distancia taxi en el plano cartesiano a través del Geoplano.

Para el objetivo 2, proponemos una tarea de aprendizaje, denominada Recorrido, que está orientada a calcular la distancia más corta entre dos puntos al utilizar la fórmula de la distancia. También incluimos el uso del Geoplano como un material para representar información de un contexto real. La tarea

Tabla 7  
*Secuencia de tareas para el nuevo diseño*

S	O	T	DRP			M			C			Ra			U			Re			H			
			F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F
1	1	1.1	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2	1	1.1	✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3	2	1.2	✓			✓	✓				✓	✓			✓			✓			✓			✓
4	2	2.1	✓	✓		✓		✓			✓	✓			✓			✓			✓			✓
5	2	2.1	✓	✓		✓		✓			✓	✓			✓			✓			✓			✓
6	3	3.1	✓			✓		✓			✓			✓				✓						✓
7	3	3.2	✓		✓			✓			✓			✓				✓						✓
8	3	3.3	✓			✓		✓	✓	✓	✓			✓				✓						✓

Nota. T1.1 = Ruta H3; T1.2 = Mapa; T2.1 = Recorrido; T3.1 = Ruta; T3.2 = Fotografía; T3.3 = Simulacro; O = objetivo; S = sesión; T = tarea

Recorrido permite que el estudiante pueda interpretar, relacionar y utilizar distintas representaciones de una situación en la cual se calcula la distancia más corta entre dos puntos. Asimismo, buscamos que el estudiante pueda valorar dos o más representaciones en relación con una situación.

Para el objetivo 3, proponemos tres tareas de aprendizaje. La primera, la tarea Ruta, tiene como meta emplear el teorema de Pitágoras en situaciones de la vida real mediante la elaboración de representaciones en el software Geogebra. La segunda, la tarea Fotografía, se centra en utilizar el teorema de Tales en la resolución de problemas relacionados con la medida de segmentos en figuras semejantes. Finalmente, la tarea Simulacro concentra la utilización de los teoremas de Pitágoras y Tales para resolverla. Establecemos la coherencia de la secuencia de tareas, al tener en cuenta que, para realizar las tareas del objetivo 3, el estudiante debe tener como requisito los temas desarrollados en las tareas de los objetivos 1 y 2.

La secuencia de tareas no se ve afectada con la eliminación de la tarea Antena porque la meta de las dos tareas asociadas al objetivo 2 consiste en calcular la distancia más corta entre dos puntos. Para el nuevo diseño que proponemos, la tarea Recorrido recibe el nombre T2.1. Por lo anterior, modificamos la tarea Recorrido para fortalecer las capacidades matemáticas fundamentales de representación, matematización y manejo de herramientas matemáticas en los procesos matemáticos de interpretar. Pretendemos que la tarea Recorrido fomente en los estudiantes la apropiación del concepto

del cálculo de la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. Dentro de los ajustes de la tarea Recorrido, adicionamos el uso del Geoplano como un material que permite que el profesor explique la fórmula de la distancia teniendo en cuenta una representación. Además, modificamos la información que presentábamos en la representación del recorrido en el plano cartesiano, de manera que incluimos algunos datos para que el estudiante no tenga que emplear de manera repetitiva la fórmula de la distancia.

Para el desarrollo del objetivo 3, proponemos tres tareas de aprendizaje: Ruta, Fotografía y Simulacro. La tarea Ruta permite que el estudiante aplique el teorema de Pitágoras y verifique los resultados con el uso del aplicativo Geogebra. Para esta tarea, y en relación con el marco PISA 2012, pretendemos fortalecer las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias, matematización y razonamiento, y fortalecer los procesos matemáticos de emplear e interpretar.

La tarea Fotografía permite que el estudiante aplique el teorema de Tales para calcular distancias desconocidas. Con esta tarea, pretendemos contribuir a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, comunicación y matematización en los procesos de emplear y formular. En la tarea Simulacro, el estudiante valida los teoremas de Tales y Pitágoras por medio del aplicativo Geogebra. Con esta tarea, pretendemos fortalecer las capacidades matemáticas de diseño de estrategias, matematización y representación en los procesos matemáticos de emplear y formular.

#### *4.4. Instrumentos de recolección y análisis de datos*

A continuación, presentamos las modificaciones en los instrumentos de recolección y análisis de datos. Describimos las tareas de evaluación —tarea diagnóstica y examen final— y los cambios realizados en los diarios del estudiante y del profesor, y en el sistema de evaluación de la unidad didáctica.

##### *Tarea diagnóstica*

Para el desarrollo de la unidad didáctica, son necesarios algunos conocimientos previos. La tarea diagnóstica que proponemos para el tema sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos (anexo 21) contiene siete apartados con los que pretendemos evaluar en los estudiantes los siguientes conocimientos previos: medida, orden y comparación entre segmentos, puntos cardinales y conversión de unidades de medida, potenciación en números reales, plano cartesiano y ubicación de parejas ordenadas, conceptos básicos de geometría, el triángulo rectángulo y sus elementos, y semejanza de triángulos y proporcionalidad.

Como lo indicamos en el diseño previo, en el planteamiento de la tarea diagnóstica, tuvimos en cuenta los errores en los que pueden incurrir los estudiantes. Clasificamos esos errores en dos dificultades: una está relacionada con la aplicación de principios y reglas, y la otra está relacionada con la traducción entre los sistemas de representación. Para el desarrollo de esta tarea, prevemos su desarrollo en dos sesiones de 110 minutos cada una. Para abordar los errores en que puede incurrir el estudiante en el desarrollo de la tarea diagnóstica, consideramos una serie de ayudas (anexo 10). Además, para superar las dificultades prevemos entregar un taller individual que el estudiante puede resolver en casa (anexo 12).

### *Examen final*

En las tareas del examen final, no presentamos cambios en relación con el diseño previo. En el anexo 22, incluimos la rúbrica que permite evaluar cada uno de los objetivos. Esta rúbrica está estructurada por nivel de logro (escala de valoración nacional), indicadores y escala institucional.

### *Diario del estudiante*

Para que los estudiantes participen en el proceso de evaluación, proponemos que cada estudiante diligencie un diario del estudiante para cada tarea, en el que registra sus percepciones en el dominio cognitivo y afectivo. Con el diario del estudiante, indagamos sobre la activación de criterios de logro, los aspectos que afectan la motivación y la percepción sobre las expectativas de tipo afectivo. El diario del estudiante nos permite realizar la recolección y análisis de la información para luego revisar los resultados de la implementación de la unidad didáctica, pero, en la dimensión afectiva, no hay un medio específico de recolección de información sobre la percepción del estudiante. Por lo anterior, percibimos la necesidad de contrastar la percepción del profesor con la del estudiante respecto a las expectativas afectivas. Proponemos adicionar en este instrumento un apartado en el que incluyamos un formato de evaluación para las expectativas de tipo afectivo. El formato que hemos previsto toma la misma estructura del matematógrafo, pero cambiamos las variables de la motivación a las variables de las expectativas afectivas. La valoración asignada a cada variable es de 0 a 4. En el anexo 24, presentamos la nueva versión del diario del estudiante. En la figura 21, presentamos el formato para recolectar la información sobre la percepción del estudiante acerca de las expectativas afectivas.



	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	Valoro la utilidad de los resultados obtenidos	Interpreto información de una representación gráfica o geométrica	Me intereso por emplear distintas representaciones	Desarrollo perseverancia para solucionar una situación	Desarrollo una actitud favorable para resolver una situación

Figura 21. Formato para la recolección de la percepción sobre las expectativas afectivas

### *Diario del profesor*

En el diario del profesor, registramos las percepciones del profesor sobre la activación de criterios de logro, las expectativas afectivas y los aspectos que afectan la motivación. El diario incluye apartados para registrar observaciones cualitativas relacionadas con estos aspectos. Además, registramos las acciones no previstas y las percepciones cualitativas sobre las contribuciones de cada criterio de logro a las expectativas de aprendizaje de nivel superior. Este diario conserva la misma estructura del diseño implementado (anexo 23).

### *Sistema de evaluación de la unidad didáctica*

El sistema de calificación de la unidad didáctica se mantiene con la utilización de los siguientes instrumentos de valoración: diario del profesor, tareas de aprendizaje y examen final. Los cambios que proponemos se refieren al porcentaje de las tareas de aprendizaje (9%) y la valoración del tercer objetivo en el examen final (8%), ya que se elimina una tarea.

En la evaluación procedimental, examinamos el trabajo y desempeño realizado por cada uno de los estudiantes en cada tarea. Sugerimos que la evaluación actitudinal se lleve a cabo al finalizar la aplicación de las tareas de aprendizaje. Consideramos que la valoración que se asigna a las expectativas

afectivas, de acuerdo con los indicadores de logro, se ajuste a la siguiente escala: activación alta (8-10), activación media (6-7,9) y activación baja (0-5,9).

## 7. Conclusiones

La unidad didáctica siempre mantuvo un proceso sistemático y reflexivo, porque tuvo una planeación, un diseño, una evaluación y unos ajustes luego de la implementación. Consideramos este diseño como una herramienta que le brinda al profesor un método de enseñanza y aprendizaje para abordar el tema del cálculo de la distancia entre dos puntos. El proceso fue reflexivo porque se dio paso a paso, comenzando con la elección del tema de las matemáticas escolares, la ubicación en los documentos curriculares nacionales e institucionales, y la estructura conceptual en la que se enmarca el tema. Resaltamos el hecho de diseñar cada una de las tareas de aprendizaje y evaluación para que se ajustaran a los objetivos propuestos, a las expectativas de aprendizaje de nivel superior, a las expectativas de tipo afectivo y a los factores que afectan la motivación para articular la secuencia de tareas.

Luego de la implementación en el aula de cada una de las tareas de aprendizaje y evaluación, encontramos que, con el uso de instrumentos para la recolección de la información, logramos comparar las percepciones del estudiante y el profesor. A partir de los resultados obtenidos con el sistema ACE sobre cada una de las tareas de aprendizaje, determinamos qué tareas habían contribuido en mayor y menor medida al logro de los objetivos. Lo anterior nos ayudó a establecer debilidades y fortalezas de la dimensión cognitiva y afectiva para proponer los ajustes de mejora de la unidad didáctica. Por ejemplo, resaltamos la tarea Simulacro, que corresponde al objetivo 3, porque el uso del software Geogebra facilitó a los estudiantes la solución de la tarea y la argumentación de sus respuestas. Además, el contexto en que se desarrollaba la situación era cercano al entorno de los estudiantes. La secuencia de tareas permitió que los estudiantes hallaran la distancia entre dos puntos en el plano o en la recta numérica. Además, ellos pudieron poner en juego los temas de valor absoluto, fórmula de la distancia y los teoremas de Pitágoras y Tales.

En este trabajo, pusimos en juego una visión diferente de la evaluación. En lugar de ver la evaluación solamente como un sistema con el que asignamos una nota a cada estudiante, ahora vemos la evaluación también como un proceso que nos permite valorar nuestro trabajo como profesores. Al hacerlo, constatamos que podemos usar la evaluación para identificar qué estamos

haciendo bien y qué no. De esta manera, podemos mejorar nuestra enseñanza con el propósito de contribuir al aprendizaje de nuestros estudiantes. Por ejemplo, el sistema ACE nos indicó que el objetivo 1 obtuvo porcentajes bajos de logro en los estudiantes. Estos resultados surgen de la corrección de las tareas, con base en el grado de criterios de logro del objetivo de aprendizaje y de los errores asociados a esos criterios de logro. El análisis de los errores en los que los estudiantes incurrieron nos permitió identificar aspectos de las tareas asociadas a este objetivo de aprendizaje que era necesario mejorar. Este fue el caso, por ejemplo, de la tarea Ruta H3. En esa tarea, modificamos el enunciado de la situación y agrupamos los literales 2.1 a 2.5 para permitir que el estudiante elabore y argumente en el contexto. Por otro lado, en los apartados 1 y 3 de la tarea Mapa, cambiamos la redacción con el fin de que el estudiante utilice el contexto para justificar los resultados matemáticos. Realizamos cambios en las otras tareas de la unidad didáctica de la misma manera: nos basamos en los resultados del sistema ACE para identificar aquellos criterios de logro que se activaron en menor medida, establecer los errores en los que los estudiantes incurrieron con mayor frecuencia y modificar las tareas para contribuir a que los estudiantes pudieran superar esas limitaciones. De esta forma, pasamos de usar la evaluación para asignar nota a usar la información que surge de la implementación para mejorar la enseñanza y el aprendizaje.

Finalmente, consideramos que nuestra experiencia como grupo en MAD 3 nos permitió una reflexión continua sobre nuestra labor como docentes. El análisis didáctico nos llevó a tener una visión más clara del desarrollo de una clase al contemplar las previsiones, la implementación y la evaluación y tener en cuenta la apreciación propia y la del estudiante. Hemos aprendido a incorporar en nuestra práctica profesional las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos, así como a incluir en el proceso de evaluación las expectativas afectivas y los factores que afectan la motivación.

## 8. Referencias

- Bernardis, S. y Moriena, S. (2013). Ideas para el aula. *Epsilon*, 30 (1), 67-84.
- Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.

- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2014). Análisis didáctico en la práctica de la formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Gómez (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (vol. 1, pp. 1-23). Bogotá, Colombia: Ediciones Uniandes.
- Gómez, P. y Castro, P. (2018). Evaluación de la planificación y la implementación. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 371-411). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M. C. y Tourón, J. (1992). *Autoconcepto y rendimiento escolar: Sus implicaciones en la motivación y en la autorregulación del aprendizaje*. Pamplona, España: EUNSA.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). Nueva York: Macmillan.
- Marín, M. J. (2011). *Teorema de Pitágoras*. Trabajo de fin de máster. Máster profesorado educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas. Tesis no publicada, Universidad de Granada, Granada. Disponible en <http://is.gd/Ip0bim>.
- Marín, A. y Gómez, P. (2018). Análisis de datos. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 303-369). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013).  *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, lectura y ciencias*. Descargado el 30/1/2014, de <https://goo.gl/Xwmerl>.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en <http://tinyurl.com/bljb3wd>.
- Romero, I. y Gómez, P. (2018). Análisis de actuación. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Bogotá: Universidad de los Andes.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En L. R. Coord, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra & M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ICE-Horsori.

## 9. Anexos

En este índice, mostramos los anexos para la unidad didáctica sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos. Organizamos el listado de anexos teniendo en cuenta el diseño previo, implementado, la evaluación y el nuevo diseño. Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8702/>.

### Anexo 1. Sistemas de representación

En este anexo, mostramos la explicación del mapa conceptual sobre los sistemas de representación asociados al cálculo de la distancia entre dos puntos.

### Anexo 2. Fenomenología

En este anexo, presentamos las relaciones entre las subestructuras matemáticas propuestas para la unidad didáctica sobre el cálculo de la distancia entre dos puntos.

### Anexo 3. Listado de capacidades

Presentamos, el listado de capacidades planteadas para la unidad didáctica. Estas capacidades las tenemos en cuenta para generar los criterios de logro.

### Anexo 4. Listado de dificultades y errores

En este anexo, presentamos el listado de dificultades y errores que planteamos para el desarrollo de las tareas de aprendizaje. Los errores en que puede incurrir un estudiante están asociados con cada criterio de logro. Los errores están asociados con una dificultad.

### Anexo 5. Fichas de tareas para el diseño previo

En este anexo, presentamos cada una de las tareas de aprendizaje que planteamos para la implementación de la unidad didáctica. En cada tarea, mostramos, los siete elementos de una tarea de aprendizaje: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, interacción, agrupamiento, temporalidad y previsiones.

### Anexo 6. Tabla de expectativas de tipo afectivo diseño previo

Presentamos la tabla que corresponde a las expectativas de tipo afectivo. El enfoque que tuvimos en cuenta para estas expectativas entrelaza motivación y aprendizaje.

#### Anexo 7. Globalidad de la unidad didáctica diseño previo

En este anexo, presentamos la tabla que explica la globalidad de la unidad didáctica. En esta tabla indicamos la sesión, el objetivo, la meta de cada tarea y la temporalidad prevista.

#### Anexo 8. Sistema ACE (Análisis de Consecución de Expectativas)

En este anexo, mostramos los datos específicos y organizados del sistema ACE.

#### Anexo 9. Tabla con las dificultades y errores asociados a los conocimientos previos

En este anexo, presentamos la tabla en la cual clasificamos cada uno de los errores en que puede incurrir un estudiante al resolver la tarea diagnóstica. Los errores están asociados a una dificultad.

#### Anexo 10. Listado de ayudas para la tarea diagnóstica

En este anexo, presentamos las ayudas previstas para cada uno de los errores en que puede incurrir un estudiante al desarrollar la tarea diagnóstica.

#### Anexo 11. Tarea diagnóstica diseño previo

En este anexo, mostramos la evaluación diagnóstica para la unidad didáctica. Contiene varios apartados con los que pretendemos evaluar los siguientes conceptos: (a) operaciones con números reales, (b) medida, orden y comparación entre segmentos, (c) operaciones algebraicas, (d) puntos cardinales y conversión de unidades de medidas, (e) potenciación en números reales, (f) plano cartesiano y ubicación de parejas ordenadas, (g) conceptos básicos de geometría, (h) el triángulo rectángulo y sus elementos e (i) semejanza de triángulos y proporcionalidad.

#### Anexo 12. Taller de refuerzo para los estudiantes con desempeño bajo en la tarea diagnóstica

En este anexo, mostramos el taller de refuerzo que se puede implementar para aquellos estudiantes con desempeño bajo en la realización de la tarea diagnóstica.

#### Anexo 13. Diario del estudiante versión previa

En este anexo, presentamos el diario del estudiante para la tarea Recorrido. En el diario del estudiante mostramos la manera de recolectar información de la dimensión cognitiva y afectiva en el desarrollo de la tarea.

#### Anexo 14. Diario del profesor versión previa

En este anexo, presentamos el diario del profesor para la tarea Recorrido. En el diario del profesor mostramos la manera de recolectar la información de la dimensión cognitiva y afectiva en el desarrollo de la tarea.

#### Anexo 15. Examen final y rúbrica para evaluar el examen

En este anexo, mostramos el examen final para evaluar cada uno de los objetivos. El examen final está compuesto por cuatro apartados con los que se pretende evaluar cada una de las subestructuras planteadas para la unidad didáctica. Además,

presentamos la rúbrica que permite evaluar el logro de los tres objetivos de aprendizaje.

Anexo 16. Fichas de tareas de la implementación

En este anexo, presentamos cada una de las tareas de aprendizaje implementadas. En cada tarea, mostramos los siete elementos de una tarea de aprendizaje: requisitos, meta, formulación, materiales y recursos, interacción, agrupamiento, temporalidad y previsiones.

Anexo 17. Diarios de estudiante de la implementación

En este anexo, presentamos el diario del estudiante implementado en el desarrollo de la tarea Recorrido.

Anexo 18. Diario del profesor de la implementación

En este anexo, presentamos los diarios del profesor implementado en el desarrollo de la tarea Recorrido.

Anexo 19. Tabla de expectativas afectivas nuevo diseño

Presentamos la tabla que corresponde a las expectativas afectivas. Realizamos modificaciones en la expectativa afectiva 1 para que se active en cada una de las tareas y responda al enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje.

Anexo 20. Fichas de tareas nuevo diseño

En este anexo, presentamos las fichas de todas las tareas de aprendizaje y las previsiones (grafos de criterios de logro y ayudas).

Anexo 21. Tarea diagnóstica nuevo diseño

En este anexo, presentamos la nueva versión de la tarea diagnóstica. Esta nueva versión de la tarea diagnóstica se modificó teniendo en cuenta los conocimientos previos necesarios para abordar la unidad didáctica.

Anexo 22. Examen final nuevo diseño

En este anexo, presentamos la nueva versión del examen final y su rúbrica de valoración. Este instrumento de recolección de información se reestructuró teniendo en cuenta la temporalidad para desarrollarlo.

Anexo 23. Diario del profesor nuevo diseño

En este anexo, mostramos el diario del profesor para la tarea Recorrido.

Anexo 24. Diario del estudiante nuevo diseño

En este anexo, mostramos el nuevo diseño que proponemos para el diario del estudiante. Incluimos un instrumento que permite que el estudiante registre sus percepciones sobre las expectativas afectivas para la tarea Recorrido.

Anexo 25. Tabla de criterios de logro

En este anexo, mostramos la tabla con los criterios de logro asociados a cada objetivo.