

CAPÍTULO 5

ESPACIOS MUESTRALES ESTOCÁSTICOS

NORMA ÁLVAREZ, NURY ESPINOSA, EDWARD MÉNDEZ,
MARÍA PEÑA Y FERNANDO TORRES

1. Introducción y descripción del problema

En este capítulo, presentamos el informe final que realizamos en la Maestría en Educación Matemática sobre espacios muestrales estocásticos. El análisis didáctico del tema nos permitió formular el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica. A continuación, presentamos el contexto institucional y la formulación del problema que abordamos en este trabajo.

1. Contexto institucional

Implementamos la unidad didáctica en el Colegio Germán Arciniegas, ubicado en la localidad de Bosa. Uno de los autores de este trabajo labora en esta institución. El PEI de la institución se denomina “Trascendencia social con calidad humana hacia la excelencia” y tiene como énfasis la comunicación, el arte y la expresión. Su objetivo es lograr que los estudiantes tomen conciencia de lo importante y divertido que es aprender. El plan de área de la institución tiene un énfasis en la dimensión social del estudiante. Esto se evidencia en los indicadores de logro del plan de área. Por ejemplo, uno de ellos es el siguiente: “manifiesta interés por el énfasis institucional y por los temas vistos en clase, reconociendo la importancia que estos tienen en su cotidianidad escolar y la construcción de su proyecto de vida”. La unidad didáctica se implementó en grado noveno. Cada grado está compuesto por

dos o tres grupos, de 45 estudiantes aproximadamente. Los estudiantes pertenecen a estratos socioeconómicos 1 y 2.

2. Formulación del problema

La unidad didáctica se enmarca en la construcción de espacios muestrales y hace referencia a la toma de decisiones del diario vivir. Tuvimos en cuenta dos variables en particular: las personas que se involucran en una situación determinada y los beneficios al tomar algún tipo de decisión. La combinación entre el número de personas y los posibles beneficios que obtiene cada persona genera un espacio muestral estocástico. Nuestra intención consistió en asociar este hecho a un contexto cercano al estudiante.

El problema que abordamos en la unidad didáctica se plantea cuando se utiliza el Sistema Integrado de Transporte Público de Bogotá (SITP). Con este contexto, inducimos a los estudiantes a ponerse en el lugar de una persona que espera viajar de la mejor forma en términos de tiempo y comodidad (y, en algunos casos, dinero), cuando recorre la ciudad de un lugar a otro. Además, este problema atiende tres cuestiones: la relación con los estándares nacionales planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), la relación con las categorías planteadas por PISA 2012 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2013) y la relación con un caso particular de la teoría de juegos.

En cuanto a los estándares nacionales planteados por el MEN (2006), una parte del problema se asocia con el pensamiento aleatorio y sistema de datos, ya que estos estándares se refieren al estudio de la teoría de la probabilidad y la estadística. Encontramos los siguientes estándares relacionados con el tema: “cálculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo)”, “interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos” y “resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo)” (pp. 86-89). En el marco conceptual de PISA (2012), encontramos que la categoría de incertidumbre se relaciona con el tema.

Además de establecer la relación con los estándares nacionales y el marco PISA 2012, nuestro trabajo presenta una relación no establecida hasta el momento entre el contexto escolar y un caso en particular de la teoría de juegos. Damos relevancia al tratamiento de situaciones que se modelan de forma estocástica y que están orientadas hacia la toma de decisiones cuando existen varias personas incluidas en un problema.

Para establecer los objetivos de la unidad didáctica atendimos a los procesos de formular, emplear e interpretar, propuestos por el marco conceptual de PISA 2012. El primero hace referencia a la extracción de información para plantear un espacio muestral estocástico de un problema contextualizado. El proceso matemático de emplear hace referencia a la forma mediante la cual los estudiantes utilizan los sistemas de representación con sus respectivos algoritmos y reglas. En nuestro caso, propusimos utilizar dos sistemas de representación que permiten identificar las posibilidades en una situación (matrices de pago y diagramas de árbol). Finalmente, el proceso de interpretar permite a los estudiantes reflexionar sobre las posibles soluciones en el contexto de la teoría de juegos.

Abordamos la relación entre los espacios muestrales estocásticos y la teoría de juegos por medio de una situación en la que se pueden presentar algunas posibilidades cuando se viaja por la ciudad. Esta situación implica tener en cuenta diversas condiciones como el tiempo, las personas y los objetos que llevan con ellos. El problema que planteamos consiste en determinar cuáles son las situaciones más convenientes.

La originalidad de nuestra unidad didáctica se evidencia cuando los estudiantes representan las situaciones de dos formas diferentes. Para ello, pueden tomar decisiones en las que encuentren la ventaja de viajar en determinadas rutas y a determinadas horas, pero con una condición especial. Cada decisión que los estudiantes tomen debe beneficiar a todas las personas, con base en las situaciones de suma no cero propuestas en la teoría de juegos.

Por otra parte, la experiencia fue gratificante porque nos ofreció la oportunidad de crear una unidad didáctica en la cual trabajamos los espacios muestrales de forma no tradicional. Intentamos desarrollar una parte de la economía denominada teoría de juegos, área que no es común en las matemáticas escolares. Este trabajo nos permitió crear nuevo material y usar sistemas de representaciones usuales e inusuales para resolver determinados problemas. Otra ventaja consistió en integrar el trabajo del aula con el marco conceptual de PISA 2012 al utilizar nuevas formas de trabajo para el desarrollo de temas integrados a otros contextos.

A continuación, presentamos el diseño de la unidad didáctica, para después analizar su implementación y sus resultados. Por último, damos cuenta de los cambios realizados a las tareas de aprendizaje, luego de identificar las dificultades en el momento de su implementación.

2. Diseño previo

En este apartado, presentamos el diseño previo de la unidad didáctica. Para su construcción, realizamos el análisis didáctico del tema con base en los análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación, que describimos a continuación. Al final del apartado, presentamos detalladamente una de las tareas de aprendizaje que configuran el diseño previo de la unidad didáctica.

1. Análisis de contenido

En el análisis de contenido, establecemos las características propias del tema espacios muestrales estocásticos a partir de la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

1.1. Estructura conceptual

En la estructura conceptual (figura 1), identificamos los conceptos y procedimientos que caracterizan el tema.

En la figura 1, los conectores gruesos indican que los procesos de ensayos independientes estocásticos son el centro del análisis de contenido. Hacemos énfasis en la teoría de juegos —entre líneas discontinuas—, que consiste en un conjunto de estrategias para determinados jugadores, al buscar maximizar las utilidades a partir de decisiones.

Los espacios muestrales se relacionan con la ocurrencia de un evento y la colección de variables aleatorias. Se representan como una función entre los sucesos y los tiempos, ya sean continuos o discretos. Dentro de las funciones continuas encontramos las de Markov, y los procesos estacionarios, de incrementos independientes, Gaussiano, Martingalas y Lèvy. Una función discreta es el proceso de ensayo independiente. Este es el objeto de estudio de nuestro trabajo.

1.2. Sistemas de representación

Según Kaput (1992, p. 523), los sistemas de representación son “un sistema de reglas para (a) identificar o crear signos, (b) operar sobre y con ellos y (c) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)”. En la figura 2, mostramos los siete sistemas de representación que encontramos relevantes para nuestro tema.

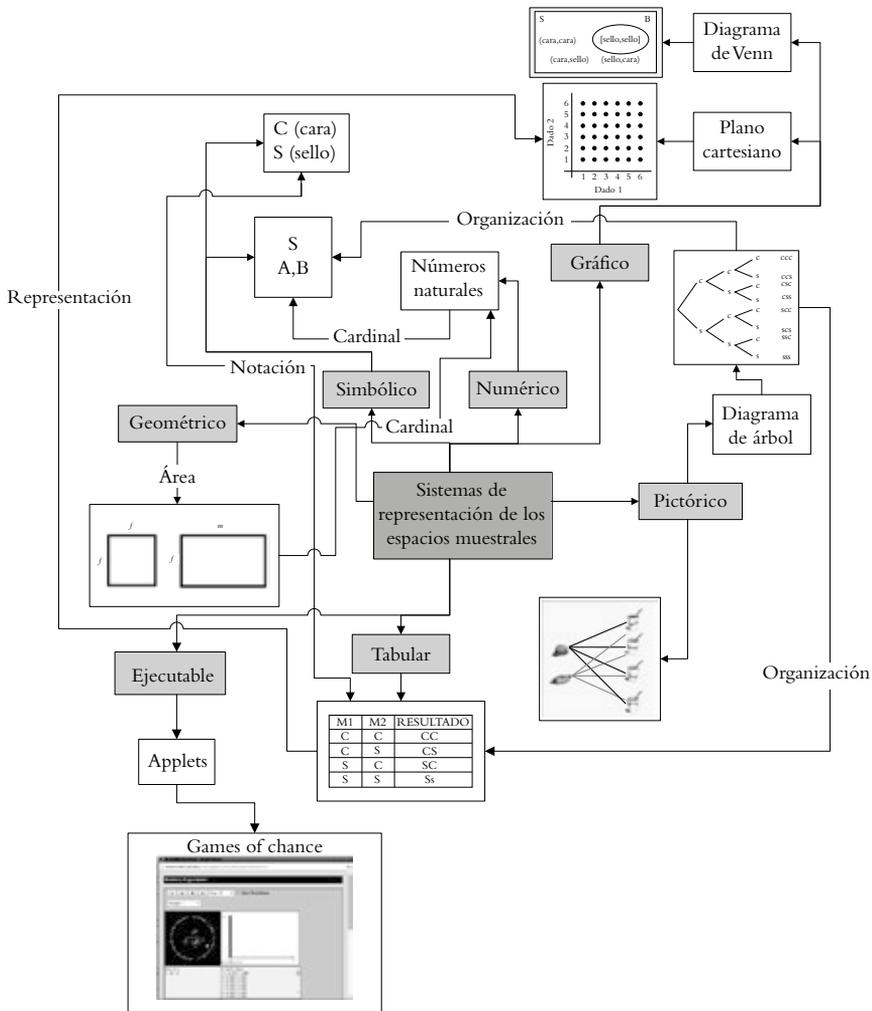


Figura 2. Sistemas de representación de los espacios muestrales estocásticos

El sistema de representación geométrico consiste en el cálculo del área de cuadrados y rectángulos que puede ponerse en correspondencia con el número de elementos del espacio muestral al lanzar una moneda una cantidad determinada de veces. En el sistema de representación simbólico, indicamos los eventos con (A, B) , los espacios muestrales con S , la cara de una moneda con C y el sello de una moneda S . El cálculo de áreas de cuadrados y rectángulos, para hallar la cantidad de elementos del espacio muestral del lanzamiento de una moneda n veces, corresponde a $2^{\frac{n}{2}}$, $2^{\frac{n+1}{2}}$ y $2^{\frac{n-1}{2}}$. Por otra

parte, en el sistema de representación numérico, los números naturales N se utilizan para enumerar y hallar el cardinal del espacio muestral $\#S$ generado al realizar un experimento aleatorio. En el sistema de representación gráfico, se pueden utilizar diagramas de Venn para representar los eventos de un espacio muestral. El plano cartesiano también permite representar gráficamente los puntos muestrales del espacio de un experimento aleatorio. En el sistema de representación pictórico, el diagrama de árbol es una representación en la que se parte de un punto y el árbol se ramifica de acuerdo con la cantidad de elementos del espacio muestral. En el sistema de representación tabular, se utilizan tablas matriciales para organizar las posibilidades de ocurrencia de experimentos aleatorios y posteriormente construir su espacio muestral. Finalmente, el sistema de representación ejecutable se asocia con el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), por lo que para el estudio de los espacios muestrales mostramos dos aplicaciones: Games of Chance, que permite simular juegos con dados, monedas, cartas y ruletas, y Tree, que permite construir diagramas de árbol.

1.3. Fenomenología

En la tabla 1, presentamos seis fenómenos que dan sentido a nuestro tema. Cada uno de los fenómenos está enmarcado dentro de un contexto fenomenológico que, a su vez, está relacionado con una subestructura matemática. De acuerdo con Cañadas, Gómez y Pinzón (2018, p. 95), un contexto fenomenológico es la agrupación de los fenómenos que tienen características estructurales similares.

Tabla 1
Fenomenología del tema

Subestructura	Contexto fenomenológico	Fenómeno
Series de tiempo	Describir las series de tiempo a través del componente aleatorio de ruido blanco, como la serie estocástica más posible	Serie de datos
		Tasa de variación del dólar
Teoría de juegos	Enumerar la cantidad de opciones que tiene un jugador para actuar dadas unas condiciones o reglas iniciales de juego	Jugadores y estrategias
		Valiente
Sucesión de eventos independientes estocásticos	Enumerar la cantidad de posibilidades al realizar un evento aleatorio	Dados
		Balotas

En la tabla 1, observamos que cada subestructura conceptual tiene su respectivo contexto fenomenológico. Para la unidad didáctica, empleamos la situación que consiste en que, dado un conjunto de personas y otro de decisiones, se debe encontrar la función o funciones de utilidad que maximicen sus beneficios. De acuerdo con lo anterior, el espacio muestral se construye a partir de la cantidad de jugadores y de estrategias que cada uno adopta.

2. Análisis cognitivo

En el análisis cognitivo, describimos lo que esperamos que nuestros estudiantes aprendan una vez resuelvan las tareas de la unidad didáctica. Formulamos previsiones de aprendizaje con base en las expectativas de aprendizaje de nivel superior, medio e inferior. Además, produjimos las limitaciones de aprendizaje al prever los errores en que podrían incurrir los estudiantes.

2.1. Expectativas de aprendizaje

Las expectativas de aprendizaje se pueden clasificar en tres niveles: superior, medio e inferior. En el nivel superior, tenemos los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales, según el marco conceptual del proyecto PISA 2012. Específicamente, con el desarrollo de la unidad didáctica pretendimos que los estudiantes adquirieran las capacidades matemáticas fundamentales de comunicar, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones, lenguaje simbólico, formal y técnico, y uso de herramientas matemáticas. Además, los estudiantes trabajaron de manera simultánea los tres procesos matemáticos (formular, emplear e interpretar). Por su parte, en el nivel medio están los objetivos de aprendizaje que esperábamos que los estudiantes logaran. Finalmente, en el nivel inferior, determinamos las capacidades de aprendizaje a las que pretendimos contribuir con el desarrollo de la unidad didáctica. De acuerdo con González y Gómez (2018, p. 133), una capacidad es la actuación de los estudiantes al solucionar una tarea rutinaria sobre un tema matemático. En la tabla 2, presentamos un listado corto de las capacidades para la tarea Rutas, que presentaremos más adelante. El listado completo se encuentra en el anexo 1¹.

1 Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8704/>

Tabla 2
Listado corto capacidades de la tarea Rutas

C	Descripción
1	Identifica las variables involucradas en un experimento estocástico
48	Elabora diagramas de árbol con un número de nodos correcto
14	Determina los posibles resultados de un experimento estocástico dado un diagrama de árbol

Nota. C = capacidad

2.2. *Objetivos de aprendizaje*

Construimos los objetivos de aprendizaje con base en los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales contempladas en el marco conceptual de PISA 2012. Con el logro de los objetivos, pretendimos que los estudiantes desarrollaran cada uno de los tres procesos matemáticos de forma secuencial: formular, emplear e interpretar. De acuerdo con lo anterior, los tres objetivos de aprendizaje para la unidad didáctica son los siguientes.

Objetivo 1. Identificar situaciones estocásticas del mundo real mediante la creación de espacios muestrales en los que se utilizan diagramas de árbol o matrices de pago y asociarlos a una decisión en particular.

Objetivo 2. Justificar procesos y procedimientos que determinan funciones de utilidad a partir de un espacio muestral, para comprender el procedimiento de juegos de suma no cero.

Objetivo 3. Interpretar las decisiones tomadas dada una matriz de pago o un diagrama de árbol, al presentar argumentos válidos dentro del contexto del problema, enmarcado en reglas implícitas, que se presentan con el fin del beneficio grupal y no personal.

Para caracterizar cada uno de los objetivos de aprendizaje, elaboramos una tarea prototípica. A partir de la tarea prototípica, seleccionamos las capacidades que desarrollarían los estudiantes al solucionarla y los errores en que podrían incurrir. Estas capacidades llevan un orden secuencial que permite a los estudiantes lograr un objetivo. Cada estrategia de solución se denomina *camino de aprendizaje*. A su vez, los caminos de aprendizaje agrupan procedimientos concretos dentro de la solución de una tarea, denominados *secuencias de capacidades*. Por último, estas se ordenan en criterios de logro, con el fin de que los estudiantes comprendan fácilmente lo que deben lograr. De acuerdo

con lo anterior, construimos un grafo de criterios de logro para cada objetivo. En la figura 3, presentamos el grafo para el objetivo 1.

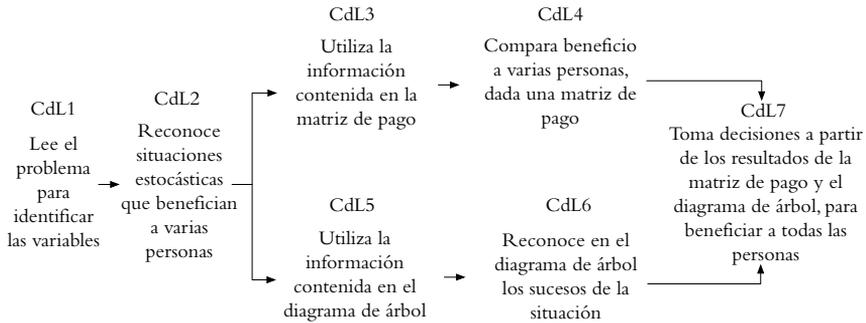


Figura 3. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

En el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje 1, planteamos, por medio de la formulación del problema, que los estudiantes transformen contextos no matemáticos al utilizar los sistemas de representación matrices de pago y diagramas de árbol. Posteriormente, previmos que el material concreto empleado por los estudiantes para trabajar las rutas del SITP les ayudara a tomar decisiones. Luego, mediante el reconocimiento e identificación de la situación, y el manejo del material, los estudiantes encuentran la respuesta por medio de dos caminos de aprendizaje diferentes que los conducen al mismo resultado. En la figura 4, presentamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 2.

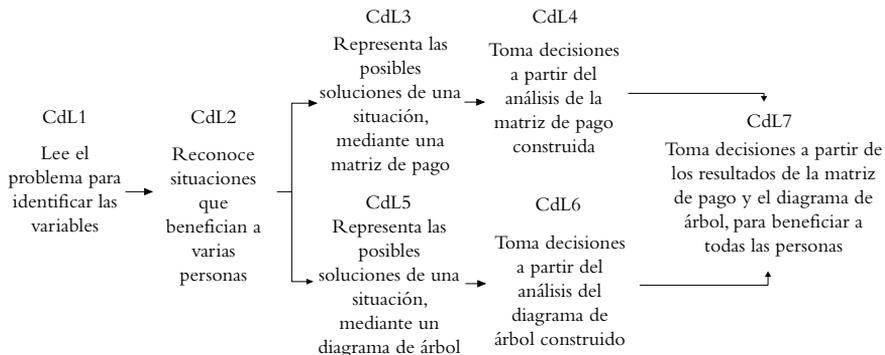


Figura 4. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

Planteamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 2 en términos de dos sistemas de representación. El primero apunta hacia el uso de las matrices de pago, en las que los estudiantes identifican ganancias o pérdidas, para después definir el beneficio propio, originar la matriz de pago y finalmente compararlas. El segundo sistema de representación hace referencia a los diagramas de árbol, en el que los estudiantes deben identificar las variables y reconocer que es una situación estocástica y suma no cero. En la figura 5, presentamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 3.

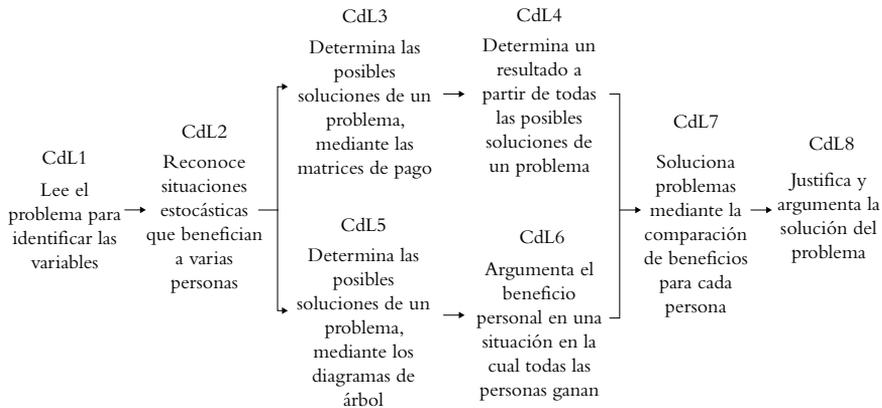


Figura 5. Grafo de criterios de logro, objetivo 3

Diseñamos el grafo de criterios de logro para el objetivo 3 en términos de dos sistemas de representación. Sin embargo, pretendíamos que los estudiantes, al tener como base la suma no cero, vieran la matriz de pago como una forma específica de las tablas matriciales para establecer escenarios de pago simples. Además, los estudiantes debían construir diagramas de árbol para identificar ganancias y pérdidas con movimientos secuenciales y poder interpretar las funciones de utilidad generadas a partir de estos. Posteriormente, debían tomar decisiones dada una función de utilidad. Finalmente, observamos que el diseño de estrategias se convierte en la parte esencial del desarrollo de este objetivo. La descripción detallada de los grafos de criterios de logro para los objetivos 2 y 3 puede consultarse en el anexo 3.

2.3. Expectativas de tipo afectivo

Es importante que los estudiantes desarrollen capacidades cognitivas. Para lograrlo, intervienen aspectos afectivos que permiten que los estudiantes

fortalezcan valores para su bienestar y desarrollen habilidades para el trabajo en equipo e individual. Por lo anterior, formulamos cinco expectativas de tipo afectivo basadas en los procesos matemáticos y las capacidades matemáticas fundamentales. En la tabla 3, presentamos el listado de expectativas afectivas.

Tabla 3
Listado de expectativas afectivas del tema espacios muestrales estocásticos

EA	Descripción
1	Presenta disposición para desarrollar las actividades sobre espacios muestrales estocásticos
2	Argumenta con criterios matemáticos válidos los resultados obtenidos y respeta las ideas de los demás
3	Trabaja con perseverancia y confianza en el planteamiento y solución de situaciones relacionadas con espacios muestrales
4	Desarrolla habilidades para comunicar, debatir y transferir ideas con argumentos válidos
5	Demuestra interés en utilizar diferentes representaciones de los espacios muestrales estocásticos en la solución de las tareas propuestas

Nota. EA = expectativa afectiva

2.4. Limitaciones de aprendizaje

Centramos nuestra atención en que las limitaciones de aprendizaje están comprendidas por los errores y las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos propios del pensamiento matemático (Socas, 1997). Para nuestro tema, agrupamos los errores en que podrían incurrir los estudiantes en tres dificultades. Cada dificultad está asociada a un proceso matemático. Por ejemplo, formulamos la dificultad D1: dificultad para comprender situaciones en las que los procesos estocásticos generan espacios muestrales y la posible toma de decisiones, en la que no todas las personas reciben algún beneficio. Para esta dificultad, formulamos el error E1: expresar incorrectamente las características de una situación estocástica que beneficia a todas las personas. El listado completo de dificultades y errores puede observarse en el anexo 2.

3. Análisis de instrucción

Con base en los análisis de contenido y cognitivo, formulamos los objetivos de aprendizaje, listamos las capacidades que pretendimos desarrollar en los

De acuerdo con la tabla 4, en cada uno de los objetivos, pretendíamos desarrollar en los estudiantes un proceso matemático distinto, acompañado de algunas capacidades matemáticas fundamentales. Además, pretendíamos que los objetivos fueran secuenciales y, uno a uno, atendieran a los procesos de formular, emplear e interpretar. En cuanto a las expectativas de tipo afectivo, desde el planteamiento del diseño previo, tuvimos la intención de contribuir a las cinco expectativas afectivas que formulamos y a los cinco aspectos que afectan la motivación de los estudiantes. Para lograr lo anterior, previmos la utilización de materiales que sirvieran como puente entre sus conocimientos y el nuevo tema por trabajar. A continuación, presentamos con detalle el diseño de la tarea Rutas.

4. Tarea Rutas

A continuación, presentamos la descripción detallada de las componentes de la tarea Rutas. Esta versión de la tarea fue la implementada con los estudiantes.

4.1. Requisitos

La tarea puede ser abordada por los estudiantes porque trabaja algunos conocimientos previos como identificar y organizar los datos de una situación, extraer información del entorno, organizar parejas ordenadas, aplicar principio multiplicativo y producto cartesiano.

4.2. Metas

Pretendimos que la tarea contribuyera a que los estudiantes identificaran situaciones estocásticas del mundo real, como beneficio de una sola persona o de todas, y que identificaran los sistemas de representación y usaran los recursos para solucionarla.

4.3. Formulación

La siguiente es la formulación de la tarea.

Johan y Bryan deben trasladarse del barrio Tibabita-Torca en Usaquén a Metrovivienda en Bosa. Para su trabajo, deben llevar varias maletas con herramientas. Se encuentran a las 7:00 a.m., pues saben que deben llegar a su destino a más tardar a las 9:00 a.m. para no perder el contrato. Además, se colaborarán al llevar las maletas entre los dos y buscarán para su comodidad que el bus en

el que se transporten tenga asientos disponibles. Como es la primera vez que hacen ese recorrido por la ciudad, deciden consultar el aplicativo “mirutafacil.com”. Ellos encuentran la información de las figuras A a E.

Resuelve cada uno de los siguientes puntos en tu cuaderno.

1. Usa el listado de paraderos de las rutas del SITP que te presentamos y escribe el espacio muestral para las opciones de recorrido de acuerdo con la variable dinero. Es decir, encuentra el recorrido menos costoso. Busca la ruta que menos transferencias tengan que hacer Johan y Bryan en su desplazamiento desde Tibabita-Torca hasta Metrovivienda.
2. Determina el diagrama de árbol que mejor representa el espacio muestral, al tomar en cuenta las diferentes rutas que tienen disponibles. Establece la más adecuada. Recuerda que solo tienen dos horas para llegar y no perder el contrato.
3. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de que los trabajadores viajen juntos o por aparte?
4. De acuerdo con el literal 3, construye la matriz de pago al tener en cuenta el beneficio que obtiene cada trabajador al llevar las maletas y determina la ruta más adecuada.
5. Usa el acetato, las fichas con las tablas de las rutas y los colores (figuras A a E disponibles en el anexo 6). Organiza las distintas rutas que pueden utilizar los trabajadores para ir de Tibabita-Torca a Metrovivienda. Ten en cuenta que puedes realizar transferencias o trasbordos si lo crees conveniente y que solo disponen de dos horas para trasladarse.
6. Marca con un color diferente cada ruta encontrada desde el punto de partida al de llegada.
7. En grupos de tres estudiantes, comparen las respuestas de los puntos 1, 2, 4, 6 y determinen cuál de todas las rutas es la más conveniente para Johan y Bryan, de tal manera que sea la ruta más económica y en la que se demoren menos. Hay que tener en cuenta que solo tienen 2 horas para llegar a su destino.

Los grupos podrán hacer uso de cinco fichas que contienen todos los paraderos de las rutas 801, E46, Z4, Z8, 341 del SITP de Bogotá. A continuación, mostramos un ejemplo de la ficha (figura A).



Figura A. Rutas del SITP 1

4.4. Materiales y recursos

Para esta tarea, empleamos el recurso “jugar con el SITP”. Este recurso permite a los estudiantes manipular un material que se parece a los juegos de mesa. Consiste en utilizar fichas de diversos colores (figuras 6, 7 y 8) con las que los estudiantes identifican diferentes rutas para solucionar la situación planteada. Ellos marcan cada opción de ruta con un color diferente, desde el punto de partida al de llegada al tomar en cuenta la información de las figuras 6, 7 y 8. A cada estudiante se le entrega en un acetato el mapa de las rutas en el que marcan con colores distintos las diferentes posibilidades de transferencia que encuentren para cubrir la ruta. Con lo anterior, los estudiantes generan distintos espacios muestrales. Con el uso de este material, los estudiantes ponen en juego su creatividad para establecer la opción más conveniente a la hora de tomar una decisión que resuelve la situación propuesta.



Figura 6. Explicación del rutero SITP

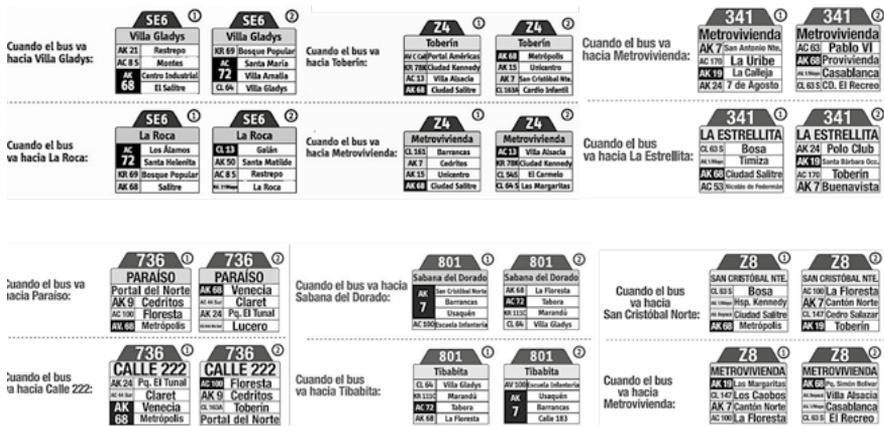


Figura 7. Fichas 1 para juego del SITP



Figura 8. Fichas 2 para juego del SITP

4.5. Tipos de agrupamiento

La solución de las preguntas 1 al 6 se realiza de manera individual. Después, los estudiantes resuelven la pregunta 7 organizados en grupos de tres personas. Finalmente, los estudiantes comparten sus respuestas con todo el grupo.

4.6. Formas de interacción

La interacción que predomina en esta tarea está dada entre los estudiantes cuando comparten sus respuestas en el pequeño grupo y con el resto del salón de clases. Además, el docente interactúa con los tríos al afinar las repuestas para la puesta en común en el gran grupo.

4.7. Temporalidad

La tarea se desarrolla de acuerdo con lo que presentamos en la tabla 5.

Tabla 5
Temporización tarea Rutas

Actividad	Sesión	Tiempo
Compartir metas	1	50 minutos
Exposición del tema espacios muestrales	1	30 minutos
Presentación del juego que se va a utilizar en la primera tarea	1	30 minutos
Resolución de la tarea	2	60 minutos
Pedir trabajos y devolverlos realimentados	2	20 minutos
Llenar diario del estudiante	2	10 minutos
Compartir diario del estudiante	2	20 minutos

4.8. Previsiones

La caracterización del objetivo 1 con su respectivo grafo se encuentra en el apartado de objetivos de aprendizaje. Por su parte, para cada error previsto diseñamos una ayuda, en forma de pregunta (véase anexo 22). En la tabla 6, presentamos un ejemplo de las ayudas.

Tabla 6
Descripción de las ayudas de la tarea Rutas

E	A	Descripción
3	1	¿En el diagrama de árbol se puede repetir opción?
6	2	¿Cómo podrías justificar que todas las personas resultan beneficiadas con la decisión que toman?
7	3	Busca un argumento que sea coherente con el contexto de la situación
8	4	Clasifica las variables que intervienen en el contexto del problema y escribe el espacio muestral estocástico que encuentras

Nota. E = error; A = ayuda

De acuerdo con lo presentado en la ficha de la tarea, pretendíamos que los estudiantes, con el desarrollo de la tarea Rutas, activaran en mayor medida el proceso matemático de formular. Sin embargo, debido a que los dos sistemas de representación también están presentes en la tarea Rutas, el proceso matemático de emplear también debía desarrollarse, aunque en menor medida.

En cuanto a las expectativas de tipo afectivo, nuestra intención fue hacer que los estudiantes tuvieran curiosidad por aprender el tema nuevo y por

manipular los aplicativos pertinentes para solucionar la tarea. Las fichas de todas las tareas implementadas pueden consultarse en el anexo 6.

3. Instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información

En este apartado, presentamos los instrumentos que utilizamos en la recolección de datos, en el momento de implementar la unidad didáctica. Los instrumentos fueron fundamentales para incorporar datos en el sistema ACE (Análisis de Consecución de Expectativas). ACE es un sistema desarrollado en Excel que permite compilar toda la información percibida en los instrumentos de recolección, para después ser analizada (Marín y Gómez, 2018).

1. Instrumentos de recolección de información

Durante la aplicación de la unidad didáctica, utilizamos la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje, el diario del estudiante y el diario del profesor como instrumentos de recolección de datos. Además, dentro de los diarios se encuentran el matematógrafo y el semáforo, que permiten indagar sobre las percepciones de los estudiantes y el profesor frente a la consecución de los criterios de logro y los factores que influyen en la motivación.

La tarea diagnóstica está diseñada para identificar los conocimientos previos de los estudiantes en el tema espacios muestrales estocásticos. Los espacios muestrales estocásticos fueron agrupados de acuerdo con los tres procesos matemáticos: formular, emplear e interpretar (PISA, 2012). En cuanto a lo conceptual, la intención es verificar los conceptos básicos que los estudiantes deben manejar sobre el tema y el razonamiento frente a problemas clásicos de la teoría de juegos. En lo procedimental, el objetivo es observar la habilidad de los estudiantes para construir diagramas de árbol y tablas matriciales. Por su parte, en la tarea diagnóstica encontramos tres apartados, el primero es una situación sencilla en la que los estudiantes tienen que determinar las posibles soluciones y enunciar cuál de ellas es la más favorable. El segundo apartado presenta una situación en la que se deben realizar tablas matriciales, utilizar un sistema de representación y justificar los procesos implementados. En el tercer apartado se presenta un enunciado sencillo, con un sistema de representación y una tabla, en el que el estudiante debe determinar si la información propuesta es correcta o no.

Dado que previmos que los estudiantes podrían incurrir en errores al solucionar la tarea diagnóstica, planteamos acciones adicionales para cada proceso matemático. Las acciones adicionales serán desarrolladas con aquellos estudiantes que presenten dificultades. Obedecen a ejercicios complementarios para que los estudiantes profundicen en los conocimientos previos necesarios para abordar las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. Por lo anterior, la tarea diagnóstica se desarrolla en las cuatro primeras sesiones de clase. La tarea diagnóstica y las acciones de mejoramiento para cada proceso matemático pueden consultarse en el anexo 7.

Las tareas de aprendizaje tienen la intención de alcanzar los tres objetivos propuestos. Esto significa que las tareas Rutas 1 y 2, Condiciones de familia 1 y 2, y Reflexionar sobre la decisión 1 y 2 atienden a los tres procesos matemáticos descritos en PISA 2012. Por otro lado, pretendemos que los estudiantes activen el proceso matemático de emplear al desarrollar todas las tareas. El objetivo de las tareas Rutas 1, Condiciones de familia 1 y Reflexionar sobre la decisión 1, consiste en el uso correcto del sistema de representación matriz de pago. Así mismo, el sistema de representación diagrama de árbol se trabaja en las tareas Rutas 2, Condiciones de familia 2 y Reflexionar sobre la decisión 2.

Los estudiantes registran en el diario su perspectiva sobre los desarrollos cognitivo y afectivo propuestos en cada tarea. Para rellenar el grafo que atiende al aspecto cognitivo, se tienen en cuenta los colores del semáforo: verde, amarillo y rojo. Cada color representa los niveles de desempeño alto, medio y bajo en cada uno de los criterios de logro. En cuanto a los aspectos que afectan la motivación, las variables del matematógrafo permiten a los estudiantes evaluar su desarrollo de las tareas. En Romero y Gómez (2018), se propone un modelo de matematógrafo que indaga sobre estos aspectos. Sin embargo, nosotros implementamos un esquema que incluye preguntas cerradas y abiertas.

El diario del profesor tiene la intención de registrar sus percepciones sobre la consecución de los criterios de logro del objetivo. Para nuestro caso particular, el docente rellenará cada criterio al tener en cuenta que el 60% de los estudiantes lo hayan pintado del mismo color en su diario. El diario del profesor es una herramienta mediante la cual se identifican los errores en que los estudiantes incurrir. Los instrumentos de recolección pueden consultarse en los anexos del 7 al 11.

2. Procedimientos para la codificación de la información

El sistema ACE permite codificar los resultados de la implementación de las tareas de la unidad didáctica, al tener en cuenta la consecución de cada uno de los objetivos. Estos resultados abarcan los aspectos motivacionales, las expectativas de tipo afectivo y los errores en los cuales incurren los estudiantes al solucionar las tareas.

La información se codifica para realizar la traducción de los datos entre los instrumentos de recolección y el sistema ACE. Para ello, hacemos una equivalencia entre lo observado y una escala numérica que valora los resultados obtenidos. En las figuras 9 y 10, mostramos cómo realizamos esa traducción del diario del estudiante al sistema ACE, con el ejemplo para una estudiante.

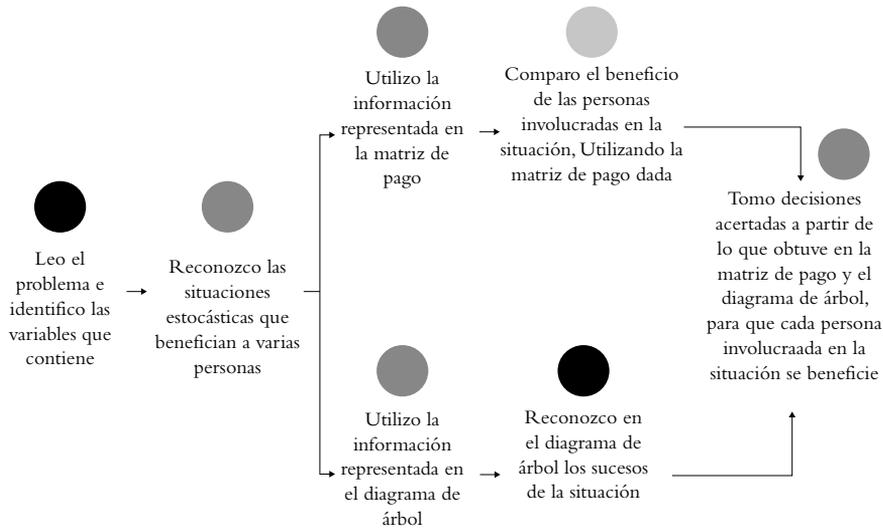


Figura 9. Respuesta de una estudiante al semáforo

Los procedimientos de codificación nos permitieron traducir esta información a los datos que presentamos en la figura 10. En la figura 9, observamos que la estudiante coloreó de verde el primer criterio de logro, el segundo y tercero de amarillo, el cuarto de rojo y el último de amarillo. En el sistema ACE se codifica el color verde con el número 2, el amarillo con el 1 y el rojo con el 0. De acuerdo con lo anterior, la estudiante obtiene una impresión global de media en el desarrollo de la tarea Rutas.

Objetivo 1	Tarea 1							
Criterio de logro	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	
Descripción corta	Lee e identifica variables	Reconoce situaciones de beneficio a varios	Usa información (Matrices de pago)	Compara beneficios usando matrices de pago	Usa información (Diagramas de árbol)	Compara beneficios usando diagramas de árbol	Toma decisiones mediante diagramas de árbol y matrices de pago	Impresión global CL tarea
Valores posibles CCL_DE	0,1,2	0,1,2	0,1,2	0,1,2	0,1,2	0,1,2	0,1,2	
Estudiantes								
	2	1	1	0			1	MEDIA

Figura 10. Hoja CLDE de ACETAM_O1 para el estudiante 1

3. Examen final e integración de la evaluación

Implementamos la unidad didáctica de acuerdo con el diseño previo y realizamos modificaciones en sus tiempos de desarrollo. Lo anterior, debido a que los estudiantes tuvieron dificultades en la construcción de las matrices de pago y fue necesario intervenir para que las realizaran de manera correcta. En este apartado, presentamos el examen final de la unidad didáctica y la forma como utilizamos esta prueba.

3.1. Examen final

Con el examen final, pretendemos dar cuenta de la consecución de los tres procesos matemáticos y de las capacidades matemáticas fundamentales propuestas en el diseño de la unidad didáctica. Diseñamos el examen final al tener en cuenta los contextos, los sistemas de representación y la construcción de las tareas. El examen final está compuesto por tres partes con las que buscamos evaluar la consecución de cada proceso matemático. En la tabla 7, presentamos la rúbrica que utilizamos para evaluar el examen final.

Tabla 7
Rúbrica del examen final

Nivel de desempeño	Indicadores	Puntos
Superior	Contesta todos los apartados y tiene claro que se pretende justificar la solución a situaciones determinadas. Puede tener pequeñas dificultades en relación con los sistemas de representación que no afecten el resultado inicial. Contesta la totalidad de los literales. Desarrolla los criterios de logro CdL1, CdL2, CdL3, CdL4, CdL5, CdL6, CdL7, CdL8 y CdL9.	(4,7-5,0)

Nivel de desempeño	Indicadores	Puntos
Alto	Contesta los apartados I: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y II: 1, 2, 3, 4, 5. Tiene problemas con los literales I: 11 y II: 6. No cumple con el criterio de logro CdL9 e incurre en los errores E46 y E92.	(4,0-4,6)
Básico	Contesta los apartados I: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y II: 1, 2, 3, 5, pero no puede argumentar por qué se toman decisiones y cómo estas afectan a varias personas involucradas en la situación, además de malinterpretar los resultados de los dos sistemas de representación. Otra posibilidad es que conteste a los apartados I: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9 y II: 1, 2, 4. Cumple con los criterios de logro CdL3, CdL4 y CdL5, o puede cumplir con los CdL6, CdL7 y CdL8. No cumple con el criterio de logro CdL9 e incurre en los errores E46 y E92.	(3,0-3,9)
Bajo	Presenta dificultad en justificar soluciones a situaciones determinadas, entendiendo que se generan a partir de espacios muestrales estocásticos y tienen como fin el beneficio de todas las personas involucradas en el problema. Contesta al menos los literales I: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y II: 1, 2. Cumple con los criterios de logro CdL1 y CdL2. No cumple con los criterios de logro CdL3, CdL4, CdL5, CdL6, CdL7, CdL8 y CdL9 e incurre en los errores E3, E4, E25, E26, E27, E65, E66, E67, E68, E69, E74, E75.	(1,0-2,9)

El examen final y la rúbrica se relacionan de acuerdo con ciertas características para cada nivel de desempeño. En el nivel bajo, los estudiantes extraen información del problema a partir de la construcción de espacios muestrales. En nivel básico, los estudiantes manipulan un sistema de representación a partir de un espacio muestral determinado. En el mismo sentido, el nivel alto lo obtienen quienes manipulen los dos sistemas de representación dado un espacio muestral. Por último, el nivel superior lo obtienen quienes tomen decisiones a partir de los sistemas de representación y el beneficio de todas las personas involucradas en el problema. El anexo 11 contiene la formulación completa del examen final.

3.2. Integración de la evaluación y la institución

La evaluación se integra con los requerimientos institucionales. Corresponde al 60% de la nota definitiva y tiene en cuenta aspectos cognitivos, cualitativos y cuantitativos. De acuerdo con lo anterior, en el anexo 12 se encuentran las

tablas del sistema de evaluación de la unidad didáctica. La unidad didáctica se adaptó al sistema de evaluación institucional, al contemplar la autoevaluación, la heteroevaluación y la coevaluación.

4. Descripción de la implementación

En este apartado, recogemos la información de los apartados anteriores y mostramos el proceso hecho antes de la implementación de la unidad didáctica y en el transcurso de ella. A continuación, mostramos la descripción general de la implementación y los cambios realizados durante la aplicación de las tareas de aprendizaje.

1. Descripción general

Inicialmente, planeamos una tarea diagnóstica y tres tareas de aprendizaje que recibieron los nombres de Rutas, Condiciones de familia y Reflexionar sobre la decisión. Iniciamos la implementación con la aplicación de la tarea diagnóstica en las cuatro sesiones planeadas: una para la aplicación de la tarea diagnóstica y las demás para las acciones de mejoramiento para los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar. En la sesión 5, compartimos con los estudiantes los objetivos, los criterios de logro y el sistema de evaluación de la unidad didáctica. Además, explicamos la forma de diligenciar el diario del estudiante. Luego, dentro de la misma sesión 5, presentamos a los estudiantes el tema espacios muestrales estocásticos y explicamos el juego que se utilizaría en el desarrollo de la tarea Rutas. El desarrollo de estas sesiones se ejecutó según lo planeado.

En la sesión 6, comenzamos la aplicación de la tarea Rutas, en la que los estudiantes trabajaron inicialmente según lo planeado al abordar la tarea de forma individual. Posteriormente, los escolares presentaron dificultades en la lectura e interpretación de los mapas utilizados para desarrollar la tarea. También tuvieron dificultades para solucionar los ítems que trabajaban las matrices de pago. Debido a lo anterior, tomamos la decisión de realizar cambios para las siguientes sesiones. A continuación describimos los cambios realizados.

2. Cambios realizados

Como consecuencia de que en la tarea Rutas los estudiantes no elaboraran matrices de pago ni tablas matriciales para la solución de los puntos que abordaban este sistema de representación, decidimos implementar ayudas para cada una de las tareas. Las ayudas permitieron que los estudiantes aprendieran

a construir matrices de pago, lo que ayudó a reforzar el logro de los procesos matemáticos que pretendíamos desarrollar en cada tarea.

En la sesión siguiente a la del desarrollo de la tarea Rutas, implementamos una acción de mejoramiento en la que les presentamos a los estudiantes una situación del contexto escolar con cinco preguntas distribuidas de la siguiente forma: dos preguntas de uso de sistemas de representación, una pregunta de elaboración del espacio muestral y dos preguntas de toma de decisiones.

Para la tarea Condiciones de familia, decidimos presentar a los estudiantes una situación que contiene un contexto familiar y en la que debían contestar tres preguntas relacionadas con los sistemas de representación y dos con la toma de decisiones. Para la tarea Reflexionar sobre la decisión, planteamos a los estudiantes una acción de mejoramiento diferente a sus contextos cercanos y les presentamos una matriz de pago para extraer información y así resolver las cinco preguntas planteadas sobre toma de decisiones. Realizamos estas acciones de mejoramiento y la corrección de las tareas de aprendizaje después de su implementación: en la sesión 6 para la tarea Rutas, en la sesión 8 para la tarea Condiciones de familia y en la sesión 10 para la tarea Reflexionar sobre la decisión. Con la intervención de las acciones de mejoramiento en la implementación de cada una de las tareas, pretendimos promover el logro de los objetivos según lo planeado. A continuación, mostramos la acción de mejoramiento para la tarea Rutas. Con ella, logramos que los estudiantes identificaran los sistemas de representación en un contexto cercano y tomaran decisiones.

A Jhonier le dan \$2000 de onces para comprar en la cafetería del colegio. Para comprar algún producto de beber y algo de comer, él va a la cafetería y observa dos gaseosas: una de marca Coca-Cola que cuesta \$1000 y la otra de marca Koca-Cola que vale \$500. Además, observa las opciones de comer en el mostrador: hay empanadas de \$1000 y empanadas de \$500 de hace dos días.

1. Elabora las posibilidades si tenemos en cuenta que Jhonier debe comprar algo de bebida y algo de comer.
2. Representa en una tabla matricial las posibilidades del punto anterior, al tener en cuenta el dinero que te puede llegar a sobrar.
3. Representa en un diagrama de árbol las posibilidades del literal 2.
4. ¿Cuál sería la decisión de Jhonier?
5. Si otros compañeros aseguran que las empanadas de \$500 causan dolor de estómago y la Koca-Cola no tiene buen sabor, realiza una nueva tabla

matricial y un diagrama de árbol al tener en cuenta el factor que Jhonier se puede enfermar o ingerir una bebida que no es agradable. ¿Cuál sería la nueva decisión de Jhonier?

Realizamos las mejoras de las tareas al tener en cuenta la noción de tarea propuesta por Gómez, Mora y Velasco (2018) y las propuestas de mejoramiento que mencionamos anteriormente.

3. Diseño implementado

En las primeras cinco sesiones, la planeación y la implementación coincidieron. Esto significa que implementamos la tarea diagnóstica y las acciones para los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar como estaba previsto. Además, se compartió con los estudiantes las metas, los sistemas de evaluación, el tema específico y la presentación del juego. En la planificación de la sesión 6, previmos evaluar la tarea Rutas sin importar los sistemas de representación que los estudiantes utilizaron. Evaluamos en la implementación por separado cada uno de los sistemas de representación utilizados por los estudiantes para solucionar la tarea.

Para la sesión 7, se planeó realimentar la tarea, mostrar el diario del estudiante y del profesor, presentar el nuevo tema y explicar los elementos necesarios para la tarea Condiciones de familia. Sin embargo, durante la implementación, solamente se hizo la realimentación del diario del estudiante y el diario del profesor. Por su parte, en la sesión 8 fue necesario implementar una acción de mejoramiento de la tarea Rutas, ya que el tiempo de la sesión 7 no fue suficiente para hacerlo. Posteriormente, en la sesión 9 se presentó el tema y los elementos relacionados con las aplicaciones para la tarea Condiciones de familia.

Planeamos la sesión 8 para realizar la realimentación de la tarea Condiciones de familia y trabajar el diario del estudiante y el diario del profesor, pero la realizamos en la sesión 10. Durante la sesión 11, trabajamos una tarea de refuerzo que atendió a las dificultades presentadas por los estudiantes en la tarea Condiciones de familia.

Para la sesión 9, previmos resolver la tarea Reflexionar sobre la decisión con los dos sistemas de representación integrados. Sin embargo, implementamos esta tarea en la sesión 12 y trabajamos los sistemas de representación por separado. Planeamos la realimentación de la tarea Reflexionar sobre la decisión para la sesión 10, pero la implementamos en la sesión 13.

Finalmente, para la sesión 11 propusimos el examen final diseñado en dos partes. La primera parte del examen buscaba evaluar los objetivos de aprendizaje 1 y 2, y, la segunda parte, el objetivo 3. Sin embargo, implementamos el examen final en tres partes, una para cada objetivo, durante la sesión 14. Planeamos la realimentación del examen final para la sesión 12, pero, dadas todas las modificaciones antes mencionadas, la realizamos en la sesión 15.

5. Evaluación del diseño y la implementación

En este apartado, presentamos las conclusiones a las que llegamos después de implementar y evaluar nuestra unidad didáctica con base en la información suministrada por el sistema ACE. Además, identificamos las debilidades y fortalezas del diseño implementado y tomamos decisiones sobre los aspectos que debíamos mejorar para que el nuevo diseño sea exitoso.

Después de la implementación de la unidad didáctica obtuvimos mucha información que organizamos mediante el sistema ACE. El sistema nos permitió obtener indicadores del proceso de aprendizaje de los estudiantes. Interpretamos los resultados en términos de las expectativas cognitivas y de tipo afectivo.

1. Evaluación del desarrollo de la dimensión cognitiva y afectiva

La dimensión cognitiva aborda los objetivos de aprendizaje, las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos. A continuación, describimos los indicadores proporcionados por el sistema ACE para dicha dimensión. Realizamos el análisis para las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos con la información tomada de la contribución de las tareas a las expectativas de aprendizaje de nivel superior y de los indicadores arrojados por el sistema ACE (véase anexo 13).

1.1. Logro de los objetivos de aprendizaje

A continuación, presentamos el resumen y la interpretación de los datos que obtuvimos del sistema ACE en términos de la contribución de las tareas a las expectativas cognitivas y de tipo afectivo. En la tabla 8, observamos que el mayor porcentaje de activación corresponde al objetivo 3 (88,2%) y el menor al objetivo 1 (70,1%). El detalle de estos resultados se encuentra en el anexo 14.

Tabla 8
Consecución de los tres objetivos

Logro o desarrollo	Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3
Objetivos de aprendizaje			
Criterios de logro	Alta	Alta	Alta
Examen final	Baja	Baja	Baja
Percepciones de los estudiantes (semáforos)	Media	Media	Media
Percepciones del profesor (semáforos)	Media	Alta	Alta
Expectativas de aprendizaje de nivel superior: capacidades matemáticas fundamentales			
Desarrollo EANS por capacidades	Alta	Alta	Alta
Expectativas de aprendizaje de nivel superior: procesos matemáticos			
Formular	Media	Alta	Alta
Emplear	Alta	Alta	Alta
Interpretar	Media	Alta	Alta
Expectativas de tipo afectivo			
Criterios de logro	Media	Alta	Alta
Percepciones del profesor	Media	Alta	Alta
Factores que influyen en la motivación			
Percepciones del profesor	Alta	Alta	Muy alta
Percepciones de los estudiantes	Media	Media	Media

En la tabla 8, observamos que los objetivos en criterio de logros, el examen final y la percepción del estudiante fueron alcanzados en la misma medida para cada objetivo. No obstante, la percepción del profesor frente a la consecución del objetivo 1 fue más baja que la percepción de la consecución de los otros objetivos. Además, concluimos que el objetivo 1 se activó en menor medida que los objetivos 2 y 3, ya que con este objetivo se logró solo la consecución de dos capacidades matemáticas fundamentales y en mayor medida los criterios de logro orientados al proceso de emplear. Además, inferimos que los estudiantes lograron una mayor consecución de los objetivos 2 y 3, a partir de la aplicación de la segunda acción de mejoramiento, referente al sistema de representación matrices de pago.

Por otro lado, al comparar los logros entre el proceso de las tareas de aprendizaje y el examen final (véase anexo 15), concluimos que, al igual que

los resultados de las tareas de aprendizaje, aumentaron de un objetivo al otro. Sin embargo, los estudiantes obtuvieron puntajes muy bajos en el desarrollo del examen final. Esto se debe al cambio del contexto propuesto. Lo anterior nos permite concluir que los estudiantes tuvieron dificultad con el sistema de representación matrices de pago, tanto en las tareas de aprendizaje como en el examen final.

1.2. Contribución a los procesos matemáticos

Ahora bien, en cuanto a la contribución de las tareas de aprendizaje a los procesos matemáticos, encontramos que, para los objetivos 1 y 3, se contribuyó en mayor medida al proceso de emplear sin que lo hayamos previsto en la planeación (75,5 y 93,2%, respectivamente). Sin embargo, cada tarea desarrolla los tres procesos en diferente medida. Lo anterior nos permite ver que incluir preguntas de toma de decisiones aporta cierta robustez a las tareas en cuanto a los procesos matemáticos, por lo que no podemos diseñar una actividad exclusiva que desarrolle un único proceso.

1.3. Contribución a las capacidades matemáticas fundamentales

En cuanto a la contribución de las tareas a las capacidades matemáticas fundamentales, tenemos tres momentos. El primero corresponde a la contribución de las tareas Rutas 1 y 2, en el que observamos que las tareas activaron en mayor medida el uso de lenguaje y operaciones (87,7%), el uso de herramientas matemáticas (79,7%) y el diseño de estrategias para solucionar problemas (73,3%). El segundo momento concierne a la contribución de las tareas Condiciones de familia 1 y 2 a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización (85,1%), uso de lenguaje y operaciones (85,3%), razonamiento (83%) y representación (83%). Finalmente, las tareas Reflexionar sobre la decisión 1 y 2 activaron en mayor medida las capacidades matemáticas fundamentales de representación (94,6%) y diseño de estrategias (93,4%).

2. Evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva

La dimensión afectiva aborda las expectativas de tipo afectivo y los factores que influyen en la motivación de los estudiantes. En este apartado, describimos dicha dimensión basados en los indicadores proporcionados por el sistema ACE.

Para obtener la contribución de las tareas de aprendizaje a las expectativas de tipo afectivo, utilizamos los datos y tablas arrojadas por el sistema ACE (véase anexo16). De allí, concluimos que la expectativa afectiva EA5 tuvo la menor

consecución en las tareas Rutas 1 y 2 (64,6%) y Condiciones de familia 1 y 2 (79,5%). Sin embargo, durante el desarrollo de las tareas Reflexionar sobre la decisión 1 y 2, la expectativa afectiva EA5 tuvo el 100% de logro, ya que los estudiantes utilizaron los dos sistemas de representación para argumentar las decisiones tomadas. Las cuatro expectativas afectivas restantes tuvieron un porcentaje de activación muy similar dentro del desarrollo de las tareas correspondientes a cada objetivo.

Observamos (anexo 17) que las expectativas afectivas se lograron en menor medida para el objetivo 3. Conjeturamos que este resultado se debe a que los estudiantes superaron las dificultades presentadas con el sistema de representación matrices de pago al desarrollar las tareas relacionadas con los otros objetivos y sus acciones de mejoramiento. Además, el diseño de las tareas solicitaba a los estudiantes establecer conclusiones basadas en las respuestas dadas por ellos a las tareas Rutas y Condiciones de familia. Por otro lado, la tarea Rutas 1 del objetivo 1 fue la que contribuyó en menor medida a las expectativas afectivas, debido al poco conocimiento que los estudiantes tenían de las matrices de pago y al contexto propuesto en la tarea: la tarea Rutas 1 implica el uso del sistema integrado de transporte de Bogotá (SITP), desconocido por muchos estudiantes.

Para analizar los factores que influyen en la motivación, tuvimos en cuenta dos posiciones: la percepción de los estudiantes y la del profesor. Cada uno registró esta información en el matematógrafo de su respectivo diario. Obtuvimos los resultados con base en el sistema ACE (anexos 18, 19 y 20). Observamos que, según las percepciones de los estudiantes, ellos respetan las ideas de los demás puesto que la variable 3 del matematógrafo se desarrolla de manera eficiente al obtener un promedio “Muy alto”. Lo anterior nos lleva a concluir, basados en las respuestas del diario del estudiante, que las tareas que más contribuyen en la motivación de los estudiantes son las tareas Condiciones de familia 2 y Reflexionar sobre la decisión 2. Con estas tareas, los estudiantes deben utilizar el sistema de representación diagramas árbol para tomar decisiones de acuerdo con el contexto de la situación. Por el contrario, las variables 2 y 4 correspondientes a “argumento de forma matemática” y “me comunico matemáticamente”, presentan un nivel de consecución bajo. Por otra parte, de acuerdo con las percepciones del profesor en los factores que afectan la motivación, la variable 3 obtiene un nivel de consecución muy alto. Esto se concluye del trabajo en equipo y la buena comunicación que mantienen los estudiantes entre ellos. Adicionalmente, las variables 2 y 3 obtuvieron un resultado medio, lo que manifiesta la dificultad que los

estudiantes tuvieron para argumentar y comunicarse de manera matemática. Los estudiantes hicieron un buen uso de los materiales propuestos en las tareas mencionadas y esto ayudó a que tuvieran interés por la toma de decisiones y por el alcance global de los objetivos. Finalmente, observamos que la tarea que menos contribuyó a la motivación fue la tarea Rutas 1, ya que los estudiantes presentaron dificultad en la construcción y uso de las matrices de pago.

3. Análisis de la enseñanza

A partir de las previsiones del diseño previo y los resultados de la implementación que acabamos de presentar, identificamos las debilidades y fortalezas del diseño e implementación de la unidad didáctica para las dimensiones cognitiva y afectiva.

3.1. Debilidades de la unidad didáctica

En cuanto a las debilidades en la formulación de los objetivos, encontramos que el objetivo 1 es el que tiene menor porcentaje de consecución con un 70,1% (véase anexo 14). La tarea Rutas 1 fue la que más contribuyó en este resultado. Esta situación se explica porque los criterios de logro CdL1.3, CdL1.4 y CdL1.7 tienen activación total de 0%. Los estudiantes incurrieron en los errores E4, E25, E65, E7 y E92 para esos tres criterios de logro. Esto nos indica que tuvieron dificultades con la construcción e interpretación de las matrices de pago.

En el mismo sentido, al analizar las debilidades de las tareas desde las expectativas de aprendizaje de nivel superior, tenemos que, para el objetivo 1, pretendíamos contribuir en mayor medida a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización y al uso del lenguaje y operaciones, y a los procesos matemáticos de emplear y formular. De acuerdo con los resultados, la capacidad matemática fundamental de matematización presenta un nivel de desarrollo más bajo que el uso del lenguaje y operaciones (69,3 y 87,7% respectivamente). El proceso matemático de emplear presenta un nivel de desarrollo más alto que formular (75,5 y 72,5% respectivamente). Al revisar qué produjo estos resultados, observamos que la tarea Rutas 1 contribuyó en menor medida al desarrollo de estas expectativas y procesos matemáticos. Esto se debe a que los estudiantes debían tomar como principio la movilidad en Bogotá y el sistema de transporte, traducir la situación y representarla mediante matrices de pago, con el fin de identificar el beneficio de varias personas y construir espacios muestrales estocásticos.

En cuanto a las debilidades de las tareas, identificamos el objetivo 1 como el de menor nivel de consecución (70,1%) y observamos que las tareas asociadas a este objetivo pretendían contribuir a la consecución de las expectativas de tipo afectivo EA1, EA2, EA3 y EA4 (véase anexo 23). Los resultados arrojados por el sistema ACE (véase anexo 17) muestran que las cuatro expectativas afectivas tuvieron el mismo porcentaje de consecución durante la implementación de la unidad didáctica (74,3%). En el mismo sentido, de acuerdo con las percepciones del profesor en cuanto a las expectativas afectivas (véase anexo 18), la tarea Rutas 1 es la de menor contribución a las expectativas de tipo afectivo EA1, EA2, EA3 y EA4. Las anteriores expectativas afectivas están relacionadas con el objetivo 1. Para determinar qué produjo estos resultados, encontramos que los criterios de logro CdL1, CdL2, CdL3, CdL4 y CdL7 son los que intervienen directamente con el desarrollo de la tarea Rutas 1, específicamente con el sistema de representación matrices de pago. Particularmente, los criterios de logro CdL3, CdL4 y CdL7 presentan un nivel de activación total del 0%, mientras que los criterios CdL1 y CdL2 tienen un 91,7%. Esta información manifiesta que la mayor dificultad está en el uso de las matrices de pago y el reconocimiento de los beneficios que de allí surge. Esto se debe a que los estudiantes desconocían las matrices de pago. Del mismo modo, analizamos las debilidades de las tareas desde los factores que influyen en la motivación, basados en la información proporcionada por el sistema ACE (véase anexo 20). Según la percepción del profesor, la variable “me comunico matemáticamente” obtuvo una valoración media. De acuerdo con estos resultados, determinamos que el objetivo 1 fue el que contribuyó en menor medida a los aspectos que influyen en la motivación. Específicamente, encontramos que la tarea Rutas 1 fue la que contribuyó en menor medida. Esto se debe a que los estudiantes nunca habían manejado las matrices de pago y además la implementación del material “jugar con el SITP” fue confusa para su manejo.

3.2. Fortalezas de la unidad didáctica

En cuanto a la formulación de los objetivos, encontramos que el objetivo 3 fue el de mayor consecución (88,2%) (véase anexo 13). Este resultado se ajusta a lo esperado, debido a que el diseño de la unidad didáctica buscaba la integración de los objetivos de manera que cada uno contribuyera al siguiente. Además, establecimos que las tareas Reflexionar sobre la decisión 1 y 2 contribuyeron en mayor medida al logro de dicho objetivo. Lo anterior nos permite concluir que los diagramas de árbol ayudaron a los estudiantes

a tomar decisiones, acción que se prioriza en el objetivo 3. Para confirmar que el trabajo con los diagramas de árbol es la mayor fortaleza de los objetivos en la unidad didáctica, observamos (anexo 24) que los criterios de logro de mayor ponderación fueron CdL3.5 (100%) y CdL3.6 (100%). Estos criterios de logro tuvieron una activación total, permitiéndonos concluir que se desarrolló todo el proceso según el diseño propuesto. Adicionalmente, al revisar el grafo de criterios de logro de la tarea Reflexionar sobre la decisión 2 y el del objetivo 3, encontramos una consecución del 88,2%. Esto sucedió porque el diseño previo permitió que cada objetivo aportara los elementos necesarios para abordar el siguiente objetivo.

Para finalizar, encontramos fortalezas en las tareas desde las expectativas de aprendizaje de nivel superior. Para el objetivo 3, las capacidades matemáticas a las que pretendíamos contribuir en mayor medida eran matematización, y razonamiento y argumentación. Además, los procesos matemáticos más relevantes eran emplear e interpretar. Al implementar la unidad didáctica, la capacidad matemática de matematización presenta un nivel de desarrollo más bajo que razonamiento y argumentación (84,9 y 91,2%, respectivamente). El proceso matemático de emplear presenta un nivel de desarrollo más alto que interpretar (93,2% y 90,1%, respectivamente, véase anexo 13). Para identificar claramente la fortaleza, observamos que las tareas Reflexionar sobre la decisión 1 y 2 contribuyeron en mayor medida al desarrollo de estas expectativas y procesos. Lo anterior se debe a que los estudiantes debían comprobar qué tan acertada fue la decisión tomada en las tareas para el objetivo 2, al conectar elementos de la situación en contexto y relacionarlos con los espacios muestrales estocásticos generados a partir de los diagramas de árbol. Posteriormente, los estudiantes debían extraer información que garantizara el bienestar de todas las personas involucradas en la situación.

En cuanto a las fortalezas de las tareas, desde las expectativas de tipo afectivo, de manera análoga, encontramos que el objetivo 3 contribuyó en mayor medida a las expectativas afectivas planteadas en la unidad didáctica. Observamos que la expectativa afectiva EA5 es la de mayor activación (100%), debido al alto interés que mostraron los estudiantes en el desarrollo de las tareas (véase anexo 17). Particularmente, las tareas Reflexionar sobre la decisión 1 y 2 contribuyeron en mayor medida a la activación de las expectativas afectivas mediante los criterios de logro CdL3.3 y CdL3.5. Lo anterior nos lleva a afirmar que estas tareas están estructuradas bajo el principio de organización de las rutas del SITP, al tener como objetivo el bienestar para todas las personas involucradas en la situación. Además, esta información nos permite

concluir que los resultados obtenidos son los esperados. Esto se debe a que los dos caminos de aprendizaje y sus respectivos criterios de logro se planearon de tal manera que se trabajaron de forma simultánea y no consecutiva.

Finalmente, observamos que el objetivo 3 fue el de mayor contribución a los factores que influyen en la motivación. Observamos que las variables Var1, Var3 y Var4 obtienen una valoración muy alta. Particularmente, la tarea Reflexionar sobre la decisión 2 fue la que contribuyó en mayor medida a los resultados identificados para el objetivo 3. Esta tarea apunta a trabajar la toma de decisiones mediante el sistema de representación diagramas de árbol. Permite que a los estudiantes se les facilite su manejo, debido a la familiaridad que tienen con en este sistema de representación.

3.3. Ajustes de mejora

Para realizar los ajustes al diseño de la unidad didáctica, tomamos como base el análisis de las dimensiones cognitiva y afectiva en cuanto a las debilidades y fortalezas encontradas en el diseño implementado. Establecimos un orden para cada mejora que se iba a realizar. La primera mejora consistió en la inserción de nuevos criterios de logro al grafo del objetivo 1 que permiten que los estudiantes hagan la transición entre la construcción de espacios muestrales y las matrices de pago. La segunda corresponde a la reformulación de la tarea Rutas 1: agregamos algunos apartados específicos para el desarrollo del proceso de formular y la capacidad matemática fundamental de matematizar. La tercera mejora fue la inclusión de un tutorial sobre la implementación del sistema integrado de transporte público de Bogotá SITP.

Justificamos las mejoras realizadas desde la dimensión cognitiva y el objetivo 1. A partir de las debilidades encontradas en el objetivo 1, desde la planeación de las tareas de aprendizaje, encontramos que existe un vacío entre los criterios de logro CdL1.2 y CdL1.3, específicamente al usar el sistema de representación matriz de pago. Además, el punto 3 de la tarea Rutas1 debe modificarse. La reformulación de la tarea Rutas 1 permite a los estudiantes hacer la transición entre la construcción de espacios muestrales y las matrices de pago. Con esta modificación también pretendemos lograr una mayor consecución de los procesos formular y emplear y de la capacidad matemática fundamental de matematización.

Así mismo, desde la dimensión afectiva, pretendíamos contribuir en mayor medida a las expectativas afectivas EA1, EA2, EA3 y EA4, y a las cinco variables del matematógrafo. Sin embargo, de acuerdo con los resultados del análisis realizado anteriormente, la expectativa afectiva EA2 y la variable 2

del matemático, que apuntan a que los estudiantes argumenten con criterios matemáticos válidos, no se lograron, porque ellos no tenían construida correctamente la matriz de pago para comparar las funciones de utilidad y por lo tanto no argumentaron los beneficios para todas las personas involucradas en la situación. Consideramos que con las mejoras a la tarea Rutas 1, la consecución de los aspectos de la dimensión afectiva también aumentará.

4. Ejemplo de una tarea

En este apartado, mostramos detalladamente las debilidades encontradas en la tarea Rutas implementada en las sesiones 5 y 6. Las debilidades se centran en aspectos relacionados con las dimensiones cognitiva y afectiva. Cabe recordar que la ficha de la tarea Rutas está en el apartado del diseño previo. A continuación, presentamos un compendio de las debilidades de la tarea Rutas desde la dimensión cognitiva.

Objetivo 1. En la planeación de las tareas de aprendizaje hay un vacío entre los criterios de logro CdL1.2 y CdL1.3, al usar el sistema de representación de matrices de pago. Adicionalmente, entre los puntos 3 y 4 de la tarea Rutas 1 hace falta un ítem que permita a los estudiantes hacer la transición entre la construcción de espacios muestrales y las matrices de pago.

Matematización. El uso de las matrices de pago debe permitir interpretar el contexto de la situación desde las matemáticas.

Razonamiento y argumentación. En la formulación de la tarea, los estudiantes deben poder detectar la condición de beneficio para todas las personas.

Diseño de estrategias para resolver problemas. El contexto de la tarea debe permitir a los estudiantes el uso de los conceptos matemáticos.

Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico. Incluir palabras o significados que permitan la comprensión de las definiciones y reglas en las diferentes situaciones.

Representación. Promover la traducción entre los sistemas de representación y uso de las matrices de pago.

La información anterior nos permite concluir que, debido a que la tarea Rutas 1 ocasionó un bajo alcance del objetivo 1, la formulación del nuevo diseño de la tarea debe incluir una introducción sobre los elementos y el uso de las matrices de pago. A continuación, realizamos un análisis similar para

la dimensión cognitiva. En relación con las expectativas de tipo afectivo, encontramos lo siguiente.

EA2. La transición entre los espacios muestrales y el uso y construcción de las matrices de pago dificulta el trabajo de argumentar las decisiones. Eso se hizo evidente en la tarea Rutas 1, en la cual las matrices de pago generaron dificultad en la toma de decisiones.

EA4. En la formulación de la tarea no se explica la forma correcta de manipular el material.

Para los factores que afectan la motivación, encontramos que, para la variable 2, en la tarea se solicita argumentar de forma matemática las decisiones tomadas respecto al beneficio para todas las personas, basados en un sistema de representación (matrices de pago) que no es comprendido por los estudiantes.

Concluimos que una dificultad radica en el uso de los materiales propuestos para el desarrollo de la tarea. Esto lo percibimos en el momento de la implementación, ya que los estudiantes encontraron difícil manipular los mapas de las rutas requeridas para solucionar la tarea y se sentían inconformes al no poder hacerlo. Consideramos que es importante realizar una actividad que instruya a los estudiantes en el uso correcto del sistema integrado de transporte de Bogotá SITP. La actividad debe incentivar a los estudiantes a manipular de forma correcta el material propuesto para el desarrollo de la tarea Rutas 1. Además, sugerimos realizar la actividad después de implementar la tarea diagnóstica y antes de implementar las tareas de aprendizaje.

6. Nuevo diseño

En este apartado, presentamos el nuevo diseño de la unidad didáctica del tema espacios muestrales estocásticos. Para ello, formulamos las nuevas versiones de las expectativas de aprendizaje y de tipo afectivo, la secuencia de las tareas de aprendizaje, los instrumentos de recolección de datos y el sistema de evaluación.

1. Objetivos

Los objetivos se comportan de forma secuencial. Esto significa que si hablamos de las capacidades matemáticas fundamentales, los tres objetivos pretenden activarlas en su totalidad. A lo largo de la implementación de la unidad didáctica, la capacidad matemática fundamental que se pretende activar es la de matematizar. En la figura 11, presentamos el nuevo grafo del objetivo 1.

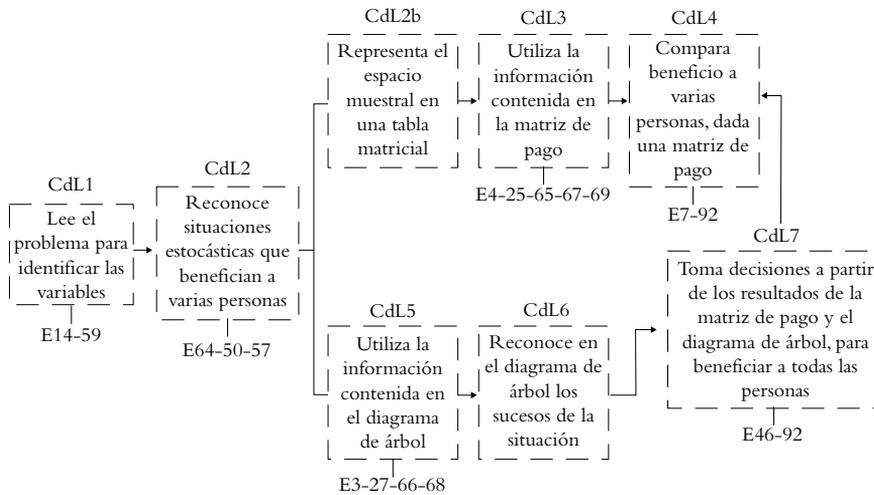


Figura 11. Grafo del objetivo 1

Al realizar el análisis del objetivo 1 y su respectivo grafo, encontramos que la mayor debilidad está en la transición que los estudiantes deben realizar entre los espacios muestrales y las matrices de pago. Lo anterior afecta los procesos matemáticos de formular y emplear y la capacidad matemática fundamental de matematizar. A partir de esto, originamos el criterio de logro CdL1.2b: representa el espacio muestral en una tabla matricial. Este criterio de logro apunta al proceso emplear y a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, representación y razonamiento y argumentación. Al realizar este ajuste, tuvimos la intención de generar una alta consecución de los criterios de logro CdL2.3 y CdL2.4 de la tarea Condiciones de familia 1 y el criterio de logro CdL3.3 de la tarea Reflexionar sobre la decisión 1. Nuestros objetivos están relacionados secuencialmente y las mejoras realizadas en el objetivo 1 repercuten en los objetivos 2 y 3. Al insertar un criterio de logro al grafo del objetivo 1, también se generó un nuevo error: E105 (realiza de forma incorrecta tablas matriciales basadas en espacios muestrales determinados).

2. Descripción de las tareas de aprendizaje

A continuación, presentamos la descripción general de las tareas de aprendizaje y la secuencia de las tareas. Luego, presentamos la nueva ficha de la tarea Rutas en la que realizamos la descripción de los cambios efectuados.

2.1. Tareas de aprendizaje

Las tareas de aprendizaje fueron diseñadas para atender a cada uno de los objetivos propuestos en la unidad didáctica. Tomamos como insumo los resultados obtenidos después de la implementación. Al tomar en cuenta este análisis, observamos que el objetivo 1 fue el de menor activación, por lo cual realizamos ajustes solamente a la tarea Rutas.

2.2. Secuencia de las tareas de aprendizaje

La meta de la tarea Rutas satisface los requisitos de la tarea Condiciones de familia. La meta de las tareas Rutas y Condiciones de familia satisface los requisitos de la tarea Reflexionar sobre la decisión. En la tabla 9, presentamos el objetivo, las tareas de aprendizaje, las capacidades matemáticas fundamentales, los procesos matemáticos, las expectativas de tipo afectivo y los aspectos que afectan la motivación a los que pretendimos contribuir en mayor medida.

Tabla 9
Descripción de la secuencia de tareas para el nuevo diseño

S	O	T	Capacidades matemáticas fundamentales					Procesos matemáticos					Expectativas afectivas					Aspectos que afectan la motivación				
			DRP	M	C	Ra	U	Re	H	F	E	I	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1	1.1					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1	1	1.1					✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2	2	2.1	✓				✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
3	2	2.1	✓				✓		✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4	3	3.1	✓					✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5	3	3.1	✓					✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Nota. S = sesión; O = objetivo; T = tarea; T1 = Rutas; T2 = Condiciones de familia; T3 = Reflexionar sobre la decisión, F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas

Observamos que el objetivo 1 hace referencia a leer el problema e identificar las variables. Luego, los estudiantes deben usar, construir e interpretar matrices de pago y diagramas de árbol al buscar el beneficio propio. Después, los estudiantes deben comparar los valores de beneficio para tomar

una decisión, argumentar y justificar su respuesta. En el objetivo 2, se hace referencia a leer el problema e identificar las variables. Después, los estudiantes deben identificar en la situación el beneficio para varias personas, y luego usar, construir e interpretar diagramas de árbol y matrices de pago para tomar decisiones mediante la comparación de los valores de la función de utilidad. En el objetivo 3, también se hace referencia a leer el problema e identificar las variables. Los estudiantes deben interpretar matrices de pago y diagramas de árbol al buscar el beneficio para cada persona. Posteriormente, ellos proponen, justifican y argumentan la solución.

En el análisis de la dimensión afectiva, en las tres tareas nos concentramos en los factores que influyen en la motivación y el aprendizaje. A partir de la actitud de los estudiantes frente al material concreto, determinamos que este es creativo, ya que les permite explorar diversas habilidades y capacidades, de acuerdo con la buena disposición que muestran en torno a su uso y seguimiento de instrucciones. Por otro lado, el interés por aprender que demuestran los estudiantes al utilizar el material concreto permite que lo vean como un puente entre lo que conocen y el nuevo tema que se va a trabajar. La curiosidad de los estudiantes se evidencia en el momento en que muestran un interés en desarrollar situaciones alternas y representarlas, aunque no exista una solución evidente.

3. Tarea Rutas

En este apartado, presentamos la descripción de los componentes de la tarea Rutas que fueron modificados.

3.1. Formulación

0. Observa el video tutorial sobre el uso del sistema integrado de transporte de Bogotá SITP, en el que se aclara el concepto de trasbordo y se explica el uso de la aplicación Moovit. Puedes acceder a este en el siguiente enlace: <https://goo.gl/RVnGUF>.
1. A Jhonier le dan \$2000 de onces. Debe comprar sus onces en la cafetería, para lo que es necesario comprar algún producto de beber y algo de comer. Él va a la cafetería y observa dos gaseosas, una de marca Coca-Cola que cuesta \$1000 y la otra de marca Koca-Cola que vale \$500. Ahora observa las opciones de comer. En el mostrador hay empanadas de \$1000 y empanadas de \$500 de hace dos días.

- a. Elabora las posibilidades si tenemos en cuenta que Jhonier debe comprar algo de bebida y algo de comer.
 - b. Representa mediante un espacio muestral las posibilidades de Jhonier.
 - c. De acuerdo con la explicación dada por el profesor, representa en una tabla matricial las posibilidades del punto anterior, al tomar en cuenta el dinero que te puede llegar a sobrar.
 - d. ¿Cuál sería la decisión de Jhonier?
2. Johan y Bryan deben trasladarse del barrio Tibabita-Torca en Usaquén a Metrovivienda en Bosa. Para su trabajo, deben llevar varias maletas con herramientas. Se encuentran sobre las 7:00 a.m., pues saben que deben llegar a su destino a más tardar a las 9:00 a.m. porque, de lo contrario, pierden el contrato. Además se colaborarán al llevar las maletas entre los dos y buscar para su comodidad que el bus en el que se transporten tenga asientos disponibles. Como es la primera vez que hacen ese recorrido por la ciudad, deciden consultar el aplicativo “mirutafacil.com”, en el que encuentran la información contenida en las figuras A a G.
- Resuelve cada uno de los siguientes puntos en tu cuaderno.
3. Usa el listado de paraderos de las rutas del SITP que te presentamos y escribe el espacio muestral para las opciones de recorrido de acuerdo con la variable dinero, es decir el recorrido menos costoso. Busca la ruta para la que Johan y Bryan tengan que hacer menos transferencias en su desplazamiento desde Tibabita-Torca hasta Metrovivienda.
 4. Determina el diagrama de árbol que mejor representa el espacio muestral, al tener en cuenta las diferentes rutas que tienen disponibles. Al estipular la más adecuada, recuerda que solo tienen dos horas para llegar y no perder el contrato.
 5. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de que los trabajadores viajen juntos o por aparte? Construye una tabla con la información anterior.
 6. De acuerdo con el literal 4, construye la matriz de pago al tomar en cuenta el beneficio que obtiene cada trabajador al llevar las maletas y determina la ruta más adecuada.
 7. Usa el acetato, las fichas con las tablas de las rutas y los colores (figuras A a E disponibles en el anexo 25) para organizar las distintas rutas que pueden utilizar los trabajadores para ir de Tibabita-Torca a Metrovivienda. Ten en cuenta que puedes realizar transferencias o trasbordos si lo crees conveniente y que solo disponen de dos horas para trasladarse.
 8. Marca con un color diferente cada ruta encontrada desde el punto de partida al de llegada.

9. En grupos de tres estudiantes, comparen las respuestas de los puntos 2, 3, 5, 7 y determinen cuál de todas las rutas es la más conveniente para Johan y Bryan, de tal manera que sea la ruta más económica y en la que se demoren menos.

A continuación, mostramos algunas de las fichas de las rutas (figuras 12a a 12g).

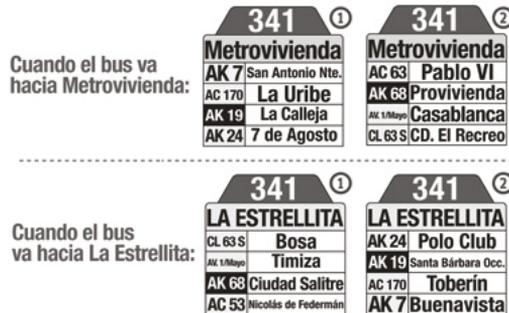


Figura 12a. Rutas del SITP 1

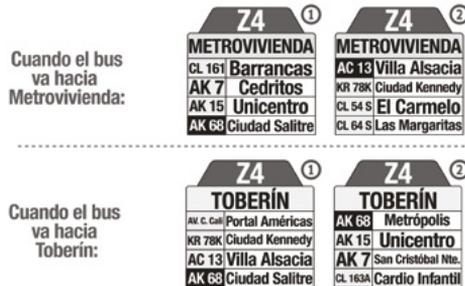


Figura 12b. Rutas del SITP 2

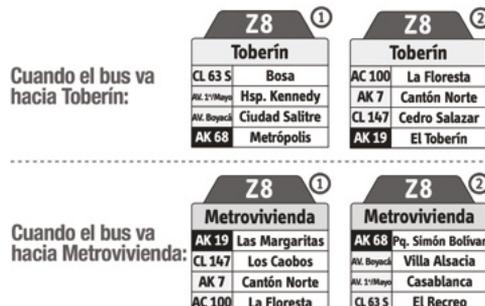


Figura 12c. Rutas del SITP 3

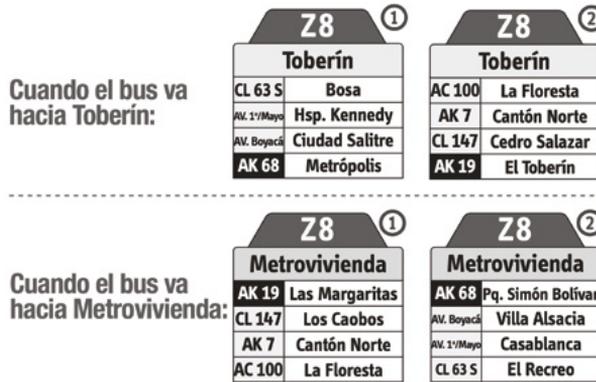


Figura 12d. Rutas del SITP 4



Figura 12e. Rutas del SITP 5



Figura 12f. Rutas del SITP 6



Figura 12g. Rutas del SITP 11

3.2. Materiales y recursos

Esta tarea emplea como recurso el juego “jugar con el SITP” que tiene como objetivo que los estudiantes manipulen las tablas y mapas de los caminos recorridos por algunas rutas del SITP. Se trata de utilizar marcadores de diversos colores con los que los estudiantes identifican diferentes rutas para solucionar la situación planteada. Los estudiantes marcan cada opción con un color diferente, desde el punto de partida al de llegada, al tener en cuenta la información de las figuras 13 a 18. Con el uso de este material, los estudiantes ponen en juego su creatividad para establecer la opción más conveniente a la hora de tomar una decisión que resuelve la situación propuesta.



Figura 13. Explicación del rutero SITP



Figura 14. Mapa 1 para juego del SITP



Figura 15. Mapa 2 para juego del SITP



Figura 16. Mapa 3 para juego del STTP



Figura 17. Mapa 4 para juego del STTP

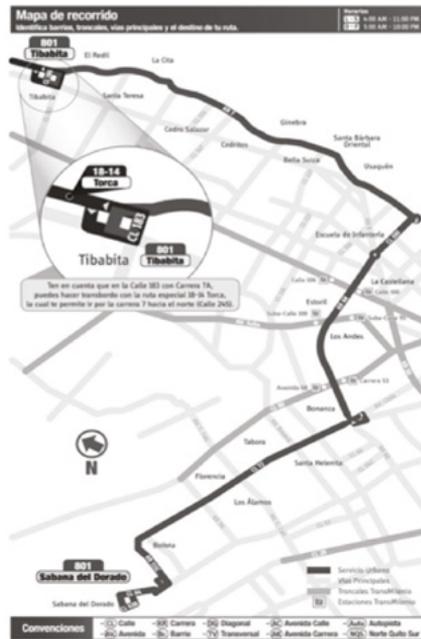


Figura 18. Mapa 5 para juego del SITP

3.3. Temporalidad

Sugerimos desarrollar la tarea de acuerdo con los tiempos presentados en la tabla 10.

Tabla 10
Temporización tarea Rutas

Actividad	Sesión	Tiempo
Compartir metas	1	50 minutos
Exposición del tema espacios muestrales	1	30 minutos
Presentación del juego que se va a utilizar en la primera tarea	1	30 minutos
Resolución de la tarea	2	90 minutos
Pedir trabajos y devolverlos realimentados	2	20 minutos
Llenar diario del estudiante	2	10 minutos
Compartir diario del estudiante	2	20 minutos

3.4. Previsiones

En la figura 19, presentamos el grafo de criterios de logro de la tarea Rutas.

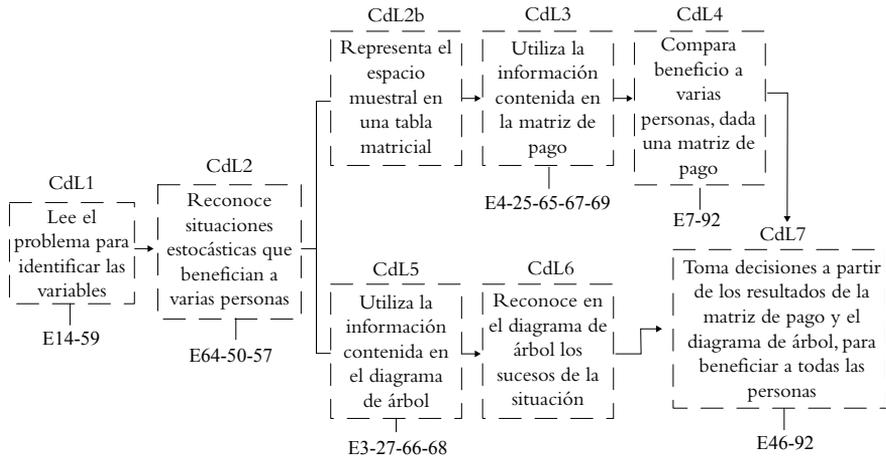


Figura 19. Grafo de criterios de logro de la tareas Rutas

En la primera tarea de aprendizaje de la unidad didáctica, proponemos, por medio de la formulación del problema y el contexto del SITP, que los estudiantes logren transformar contextos no matemáticos (CdL1 y CdL2) mediante el uso de las matrices de pago (CdL2b y CdL3) y de los diagramas de árbol (CdL5). Posteriormente, el recurso empleado para trabajar las rutas del SITP ayuda a tomar decisiones debido al manejo de material concreto (CdL4 y CdL6), en el que se privilegia el proceso matemático de formular y las capacidades matemáticas fundamentales. Por último, mediante el reconocimiento y la identificación de la situación junto con el manejo del material, los estudiantes encuentran la respuesta mediante dos caminos de aprendizaje diferentes que los conducen al mismo resultado (CdL7).

Entre otras cosas, en la tarea Rutas, proponemos por medio de la formulación del problema y el contexto del SITP, que los estudiantes logren transformar contextos no matemáticos mediante los sistemas de representación utilizados (matrices de pago y diagrama de árbol). Posteriormente, el recurso para trabajar sobre rutas del SITP ayuda a potenciar, mediante el manejo de material concreto, la identificación de transferencias con aplicativos para reconocer las variables de una situación estocástica en la que el proceso matemático de formular y las capacidades matemáticas fundamentales en general se desarrollan de acuerdo con las actividades anteriores. Por último,

propiciamos, mediante el reconocimiento y la identificación de la situación y el manejo del material, que los estudiantes encuentren respuestas al activar dos caminos diferentes para llegar al mismo resultado.

En cuanto a la dimensión cognitiva, luego de reformular la tarea, observamos que se activa el proceso de formular junto con todas las capacidades matemáticas fundamentales. Con la tarea Rutas, se desarrolla la mayor parte de lo propuesto en el objetivo 1. Además, se incluye un camino adicional para lograr el objetivo con base en el uso del material concreto. Cada tarea de aprendizaje tiene una ficha en la que se describen sus componentes. La ficha de las tareas puede consultarse en el anexo 25.

4. Instrumentos de recolección de información

A continuación, presentamos las modificaciones que realizamos en los instrumentos de recolección y análisis de datos. Describimos los cambios realizados en los diarios del profesor y del estudiante, y finalizamos con los cambios para el examen final. No realizamos cambios a la tarea diagnóstica.

4.1. Diarios

El diario del profesor se divide en dos aspectos: cognitivo y afectivo. En el aspecto cognitivo, adicionamos el objetivo asociado a cada una de las tareas, el número de cada criterio de logro, la codificación de los errores en el grafo del objetivo y la descripción del error correspondiente dentro de la tabla de niveles de consecución. Estas adiciones permiten al docente realizar un conteo ágil de los errores, así como determinar de manera global los resultados del curso para tomar las decisiones pertinentes en la siguiente sesión. En cuanto al diario del estudiante, no proponemos modificaciones. El diario del estudiante y el diario del profesor se encuentran en los anexos 9 y 26, respectivamente.

4.2. Sistema de evaluación

En cuanto al sistema de evaluación, decidimos mantener los valores porcentuales de la versión implementada. Por lo tanto, la unidad didáctica es una de las notas del sistema de evaluación institucional, que tiene en cuenta aspectos cognitivos, cualitativos y cuantitativos. Proponemos presentar a los estudiantes el sistema de evaluación de la unidad didáctica después de la implementación de la tarea diagnóstica y al inicio de cada una de las tareas. Consideramos que lo anterior permite aclarar el porcentaje en los aspectos evaluados sobre la nota

final. Por último, y antes del examen final, proponemos explicar la rúbrica de la evaluación y su equivalencia con la valoración cuantitativa.

4.3. Examen final

Dada la baja consecución de los objetivos durante la implementación del examen, concluimos que su formulación debe modificarse en dos aspectos. Primero, debemos utilizar un vocabulario que los estudiantes comprendan con mayor facilidad y, segundo, debemos emplear un contexto más cercano a ellos o similar al de las tareas de aprendizaje. En el examen final, indagamos sobre los tres procesos matemáticos, al integrar los grafos de los tres objetivos. La parte inicial está compuesta por 11 literales, en los que se propone una situación cotidiana para la que los estudiantes deben identificar beneficios, costos, determinar el espacio muestral y realizar la tabla de matriz de pago y diagramas de árbol para tomar la decisión. Además, se analizan los procesos matemáticos de formular y emplear. La segunda parte está compuesta por seis literales en los que los estudiantes deben encontrar beneficio, espacio muestral, construir una tabla matricial, generar un diagrama de árbol y una matriz de pago, para tomar una decisión. Adicionalmente, se indaga acerca del proceso matemático de interpretar. De acuerdo con lo anterior, esperamos que el proceso matemático que más se active en los estudiantes sea el de emplear. El examen final en su versión definitiva puede consultarse en el anexo 27.

La rúbrica con la que se evalúa el examen final de la unidad didáctica está diseñada de tal manera que refleje la medida en que el estudiante ha avanzado en el logro de los criterios del objetivo con los niveles de desempeño. Así, cada nivel de logro está caracterizado por los criterios de logro conseguidos y los errores en los que el estudiante ha podido incurrir. Al tener en cuenta estos criterios, asignamos una calificación numérica dentro de un rango de puntuación correspondiente al nivel. La ficha de la rúbrica del examen final puede consultarse en el anexo 28.

7. Conclusiones

La unidad didáctica implementada en la IED Germán Arciniegas nos permitió observar la importancia de involucrar contextos en la educación matemática y la relevancia de la evaluación formativa como medio para mejorar la enseñanza y contribuir al aprendizaje. El trabajo realizado para el diseño, implementación y análisis de la unidad didáctica está basado en los conocimientos

previos y la experiencia profesional y en los estudios de los integrantes del grupo. La asesoría de los formadores de MAD 3 ha sido fundamental para realizar el diseño final, a partir de la implementación de la unidad didáctica. La versión modificada de la unidad didáctica facilita el trabajo de un tema no convencional de la matemática escolar, pero está involucrado en los estándares curriculares nacionales.

El diseño previo incluye tres objetivos. En cada objetivo se abordan dos sistemas de representación: diagramas de árbol y matrices de pago. Los sistemas de representación como base para los espacios muestrales son una herramienta fundamental para la toma de decisiones dentro de la teoría de juegos. En particular, la toma de decisiones busca el beneficio de todas las personas involucradas en la situación. En la implementación de la unidad didáctica, encontramos la necesidad de crear una acción de mejoramiento en torno al manejo del sistema de representación matriz de pago para abordar el segundo y tercer objetivos. Por otra parte, fue importante observar la modificación de algunos tiempos durante la implementación de la unidad didáctica. El éxito de la unidad didáctica se encuentra en el uso de los dos sistemas de representación, dado que los diagramas de árbol son convencionales y las matrices de pago, aunque no lo sean, aportan al proceso con la implementación de las acciones de mejoramiento.

El software propuesto en el módulo de análisis de datos de la maestría (sistema ACE) nos permitió analizar con profundidad el impacto de las tareas en el desarrollo de los objetivos y su relación con los procesos matemáticos. Alimentamos este software con los datos que surgieron de la corrección de las tareas de aprendizaje y de los diarios del estudiante y del profesor para cada una de esas tareas. Los resultados que proporcionó el sistema nos permitieron identificar las debilidades y fortalezas del diseño previo y de su implementación. Encontramos, por ejemplo, que el objetivo 1 se logró en un 70,1%. Este fue el objetivo que obtuvo un menor porcentaje de logro. Al analizar la información registrada en el sistema y sus resultados específicos para las tareas asociadas a este objetivo de aprendizaje, encontramos que los criterios de logro CdL1.3, CdL1.4 y CdL1.7 tuvieron una activación nula. El sistema nos informó que esto se debió a que los estudiantes incurrieron en los errores E4, E25, E65, E7 y E92 para esos tres criterios de logro. Esta situación puso de manifiesto las dificultades de los estudiantes para construir matrices de pago porque había una brecha entre los criterios de logro CdL1.2 y CdL1.3. Con esta información, modificamos la tarea Rutas 1 de tal forma que los estudiantes pudieran hacer la transición entre la construcción de espacios muestrales

y las matrices de pago. Realizamos este mismo proceso con otras tareas en los demás objetivos. De esta forma, utilizamos la información que surgió de la evaluación para producir un nuevo diseño mejorado que contribuirá más eficaz y eficientemente al aprendizaje de los estudiantes.

Por otro lado, MAD nos aportó la experiencia de diseñar una unidad didáctica al tener en cuenta un contexto cercano a los estudiantes y al realizar un análisis *a posteriori* de la aplicación del diseño previo. Esta implementación nos permitió detectar las dificultades presentadas en el aula y corregirlas para que el diseño nuevo no se hiciera solo desde la teoría. El sistema ACE fue una herramienta de análisis fundamental que nos permitió evidenciar las falencias del diseño de la unidad didáctica.

En el ámbito profesional, MAD nos brindó la oportunidad de aplicar la unidad didáctica en varias instituciones, lo que dio lugar a una serie de reflexiones en torno al quehacer docente. La mayor fortaleza se encuentra en la relación planeación-clase, al constatar que muchas veces la planeación difiere de la realidad.

8. Referencias

- Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Bogotá: Universidad de los Andes.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). Nueva York: Macmillan.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, lectura y ciencias. Descargado el 30/1/2014, de <http://www.mecd.gov.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d>.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.

Romero, I. y Gómez, P. (2018). Análisis de actuación. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Bogotá: Universidad de los Andes.

9. Índice de los anexos

A continuación, presentamos el listado de anexos. Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8704/>.

Anexo 1. Expectativas de aprendizaje: capacidades de tarea Rutas

Este anexo contiene las capacidades creadas para la tarea Rutas.

Anexo 2. Dificultades y errores de la tarea Rutas

Este anexo contiene las dificultades que presentan los estudiantes en la tarea Rutas y los errores en los que pueden incurrir.

Anexo 3. Descripción de los grafos de los objetivos 2 y 3

En este anexo mostramos los grafos 2 y 3 y su explicación.

Anexo 4. Expectativas de tipo afectivo

En este anexo mostramos las expectativas de tipo afectivo construidas para la unidad didáctica.

Anexo 5. Factores que influyen en la motivación de los estudiantes

Este anexo contiene los factores motivacionales creados para la unidad didáctica.

Anexo 6. Ficha de tareas implementadas, diseño inicial

En este anexo mostramos las tareas planteadas en el diseño previo con todos sus componentes: formulación, materiales y recursos, agrupamiento, interacción y temporalidad.

Anexo 7. Tarea diagnóstica y acciones de mejoramiento

Este anexo contiene la tarea diagnóstica elaborada para la unidad didáctica y las acciones de mejoramiento.

Anexo 8. Tareas de aprendizaje implementadas

Este anexo contiene la versión de las tareas implementadas en el aula.

Anexo 9. Diarios del estudiante

En este anexo mostramos el diario del estudiante para cada tarea.

Anexo 10. Diarios del profesor

Este anexo contiene el diario del profesor para cada tarea.

Anexo 11. Examen final de la unidad didáctica

En este anexo mostramos el examen elaborado para la unidad didáctica.

Anexo 12. Sistema de evaluación

Este anexo muestra la rúbrica diseñada para el examen de la unidad didáctica que se implementó.

64. Anexo 13. Sistema ACE: LEANS de ACETOS

En este anexo mostramos la tabla con los resultados de la consecución de las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Anexo 14. Sistema ACE: LogroObjetivos de ACLE

Este anexo contiene la tabla con los resultados de logro de los objetivos de la unidad didáctica.

Anexo 15. Sistema ACE: CLPE_EX de ACLE

Este anexo contiene la comparación de logro entre el proceso de enseñanza y el examen final.

Anexo 16. Sistema ACE: LEAFS de ACETOS

En este anexo mostramos la tabla de los resultados de la consecución de las expectativas afectivas.

Anexo 17. Sistema ACE: PEA_DP de ACLE

Este anexo contiene la percepción de expectativas afectivas. Diario del profesor.

Anexo 18. Sistema ACE: AyMTDP de ACETAM

En este anexo mostramos la tabla con los resultados de la percepción de las expectativas afectivas y motivación en las tareas en el diario del profesor.

Anexo 19. Sistema ACE: MDE_DE de ACETAM

Este anexo contiene la tabla con los resultados de la percepción de expectativas sobre los criterios de logro en el diario del estudiante para las tareas 1, 2 y 3.

Anexo 20. Sistema ACE: PM_DP_DE de ACLE

En este anexo mostramos la tabla sobre la percepción de la motivación en el diario del profesor y del estudiante.

Anexo 21. Sistema ACE: T1 de ACETOS_O1

En este anexo mostramos los resultados obtenidos por cada estudiante en relación con los errores y activación de caminos de aprendizaje para la tarea Rutas 1.

Anexo 22. Limitaciones de aprendizaje

Este anexo contiene las dificultades que presentan los objetivos, la lista de errores en las que pueden incurrir los estudiantes y las ayudas que puede utilizar el profesor al aplicar la unidad didáctica.

Anexo 23. Sistema ACE: CCL_EAFS de ACETOS_O1

Este anexo contiene la ponderación que realizamos de la contribución de cada criterio de logro a las expectativas afectivas.

Anexo 24. Sistema ACE: T2 de ACETOS_O3

En este anexo mostramos los resultados obtenidos por cada estudiante en relación con los errores y activación de caminos de aprendizaje para la tarea Rutas 2.

Anexo 25. Nuevo diseño de tareas de aprendizaje

En este anexo mostramos la nueva versión de las tareas de aprendizaje luego de realizar el análisis de datos.

Anexo 26. Diseño definitivo de los diarios del profesor

En este anexo mostramos los nuevos diseños del diario del profesor para cada una de las tareas de aprendizaje.

Anexo 27. Diseño definitivo del examen final

En este anexo mostramos el nuevo diseño del examen final.

Anexo 28. Sistema de evaluación

Este anexo contiene la rúbrica del diseño definitivo del examen final.