

CAPÍTULO 6

PROBABILIDAD CONDICIONAL

ROSEMARY DÍAZ, CAMILO LÓPEZ, SERGIO MONTES,
DIANA RODRÍGUEZ Y MARÍA FERNANDA MORA

1. Introducción

En este documento, presentamos el informe final del trabajo que hemos desarrollado a lo largo de los dos años de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. El trabajo ha consistido en el diseño, implementación y evaluación de una unidad didáctica centrada en el tema de la probabilidad condicional, dirigida a estudiantes de undécimo grado. Nosotros somos cuatro profesores de matemáticas de secundaria del sector oficial y privado de la ciudad de Bogotá.

Implementamos la unidad didáctica en el colegio Robert F. Kennedy, institución que se encuentra ubicada en la localidad de Engativá de la ciudad de Bogotá y que cuenta con un carácter oficial y modalidad académica. El colegio basa sus actividades académicas en el modelo pedagógico social constructivista y su Proyecto Educativo Institucional (PEI) se titula: “comunicación, liderazgo y convivencia como factores de cambio” (Colegio Robert F. Kennedy, 2013). Estos pilares institucionales son el eje para la construcción y ejecución de los planes de área, proyectos pedagógicos, y, por ende, de todas las actividades realizadas en el colegio.

La estructura del plan del área de matemáticas se fundamenta en tres procesos matemáticos: comunicación, razonamiento y modelación. En este plan se contempla el tema de probabilidad condicional para estudiantes de

undécimo grado (véase anexo 1)¹. Las edades de los estudiantes con los que se realizó la implementación de la propuesta didáctica están entre los 14 y 19 años. No obstante, aun cuando, por el nivel escolar y la edad de los estudiantes, se esperaría contar con un nivel académico que permitiera el desarrollo óptimo del tema de la unidad didáctica, los estudiantes no tienen el dominio suficiente en temas relacionados con el pensamiento variacional y aleatorio, debido a que el tiempo destinado a la enseñanza de estos temas ha sido limitado en cursos anteriores.

El tema de probabilidad condicional se contempla en el documento de los estándares curriculares para matemáticas, específicamente en dos estándares que están establecidos para grados décimo y undécimo, enmarcados en el pensamiento aleatorio: “Interpreto conceptos de probabilidad condicional e independencia de eventos” y “Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo)” (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006, p. 89).

En la descripción de las expectativas propuestas en el documento de los estándares curriculares, evidenciamos la importancia de la probabilidad condicional como base para las aplicaciones en el campo de la estadística. Por otra parte, la literatura justifica el diseño e implementación de unidades didácticas en el campo de la probabilidad y situaciones aleatorias en el currículo escolar, porque esas situaciones son frecuentes en la vida cotidiana (Batanero y Godino, 2002). En términos específicos, la comprensión de la probabilidad condicional permite, por ejemplo, el entendimiento de la asociación de variables y la regla de Bayes. Además, el razonamiento condicional es la base para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre de la vida diaria (Roca, Batanero y de la Fuente, 2006).

Pese a la importancia que se le da al tema en documentos oficiales, el plan de área de esta institución no da prioridad al estudio de la probabilidad, a pesar de que se incluye en ese documento. Por lo tanto, el estudio puntual de probabilidad condicional tampoco reviste mayor importancia en el plan de estudios. Esto se evidencia en el número reducido de sesiones que se suelen dedicar a este tema. Incluso los estudiantes de undécimo grado cuentan con pocos conocimientos previos relacionados con el pensamiento aleatorio, debido a que el tiempo destinado al trabajo relacionado con este pensamiento ha

1 Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8705/>.

sido limitado en cursos anteriores. Este aspecto dificulta que los estudiantes reconozcan y diferencien aquellas situaciones a las que subyace el concepto de probabilidad condicional y que intenten resolverlas como si se tratara de situaciones de probabilidad simple, con las que se encuentran más familiarizados. En el mejor de los casos, cuando en la clase de matemáticas se alcanza a abordar el tema de la probabilidad condicional, los estudiantes hacen uso del modelo sin que realmente entiendan el porqué de las fórmulas aplicadas o la relación existente entre el modelo y las condiciones que originan la reducción del espacio muestral.

Diseñamos una unidad didáctica orientada a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional para abordar este problema. Con esta propuesta, esperamos que los estudiantes reconozcan las diferencias entre la probabilidad condicional y la probabilidad simple, comprendan los fundamentos del modelo de la probabilidad condicional y lo apliquen, e interpreten sus resultados en contexto. Para la consolidación de esta propuesta didáctica, consideramos cada uno de los elementos del análisis didáctico. Hicimos una delimitación del tema, planteamos una serie de expectativas para las que tuvimos en cuenta el marco conceptual de PISA 2012, diseñamos seis tareas de aprendizaje enmarcadas en contextos cercanos al estudiante, diseñamos instrumentos de recolección de información con los que evaluamos el impacto y efectividad del diseño inicial, al comparar la información de cada uno de los resultados obtenidos con las expectativas planteadas inicialmente. Finalmente, presentamos una propuesta que tiene en cuenta las debilidades y fortalezas encontradas en la etapa de diseño y en su posterior implementación y evaluación.

Dentro de los resultados más representativos de nuestra unidad didáctica, encontramos que, al abordar el tema de probabilidad condicional a partir del saber intuitivo y los sistemas de representación, se logra que los estudiantes deduzcan y entiendan el modelo. Sin embargo, encontramos que limitarnos a situaciones manejables desde lo concreto ocasiona que, en varios casos, los estudiantes lleguen a solucionar las situaciones planteadas sin necesidad de utilizar el modelo.

En este documento, presentamos el diseño, la implementación, los resultados de la implementación y el nuevo diseño de la unidad didáctica del tema de probabilidad condicional. Para esto, presentamos los siguientes apartados: (a) diseño previo, (b) instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información, (c) descripción de la implementación, (d) evaluación del diseño de la implementación, (e) nuevo diseño, y finalmente, (f) conclusiones.

2. Diseño previo: Fundamentación y justificación

En este apartado, describimos el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción que fundamentan nuestra unidad didáctica. Estos análisis fueron la base para el diseño de nuestras tareas de aprendizaje enfocadas a la comprensión de la probabilidad condicional.

1. Análisis de contenido

En este apartado, presentamos la delimitación del tema a partir del análisis de contenido, con base en sus tres conceptos pedagógicos: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.

1.1. Estructura conceptual

Identificamos dos conceptos previos relevantes para hablar de probabilidad condicional: la teoría de conjuntos y la probabilidad como tal. Esta última se relaciona con el estudio de las situaciones aleatorias y con las técnicas de conteo. En relación con la teoría de conjuntos, debemos tener en cuenta los conceptos de conjunto y subconjunto. También, debemos considerar las operaciones entre conjuntos que están relacionadas con los principios o reglas de la probabilidad. Por otra parte, debemos tener en cuenta que la probabilidad ha tenido diferentes concepciones a lo largo de la historia: una concepción subjetiva, una concepción frecuentista, una concepción clásica y una concepción axiomática. Podemos relacionar la probabilidad condicional con la independencia de eventos y la asignación de probabilidad simple. Como un caso particular, podemos hacer referencia al cálculo de la probabilidad de un evento A , al tener en cuenta la probabilidad de un evento B , y, por tanto, al cálculo de una probabilidad condicional. El teorema de Bayes, variables aleatorias, distribución de probabilidad y convergencia son contenidos que se relacionan con la probabilidad condicional.

Los conceptos que identificamos en la estructura conceptual y que son base para nuestra unidad didáctica son los siguientes: experimento aleatorio, probabilidad de eventos y eventos independientes. Los procedimientos se relacionan con distinguir entre situaciones deterministas y aleatorias, determinar el espacio muestral, escribir los eventos como conjuntos, identificar casos favorables de un evento e interpretar diagramas de Venn, diagramas de árbol y tablas de contingencia.

En la figura 1, presentamos la relación entre los conceptos y procedimientos del tema de probabilidad condicional.

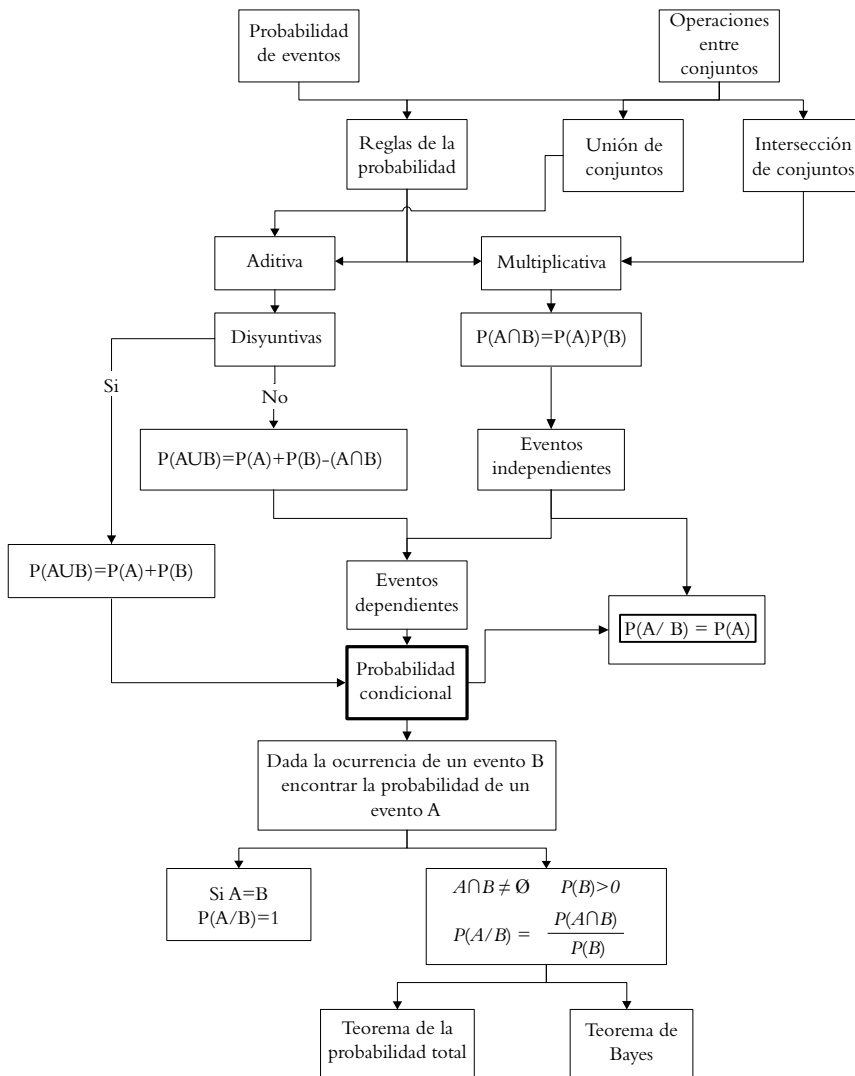


Figura 1. Mapa conceptual de probabilidad condicional

Para hablar de probabilidad condicional es necesario referirse a probabilidad simple y a las operaciones entre conjuntos. Estos dos conceptos permiten establecer la ley aditiva, que se basa en la unión de conjuntos, y la ley

multiplicativa de la probabilidad, que se basa en la intersección de conjuntos. Es importante considerar, además, algunos casos especiales que se convierten en resultados específicos dentro de la teoría. Por ejemplo, si los eventos A y B son independientes, la probabilidad condicional será igual a la probabilidad de A . De otra manera, si los eventos son disyuntos, entonces la probabilidad condicional será cero. Por último, si los eventos son iguales, entonces la probabilidad condicional será igual a uno.

1.2. Sistemas de representación

Para establecer los sistemas de representación asociados al tema de probabilidad condicional, consideramos el carácter sistémico de esta noción, destacado por Kaput (1992) y retomado por Cañadas, Gómez y Pinzón (2018):

Un sistema de representación está compuesto por signos que se ciñen a unas reglas. Estas reglas determinan cómo crear un signo que pertenezca al sistema, cómo reconocer si un signo dado pertenece a él, y cómo transformar unos signos en otros, estableciendo relaciones entre ellos (p. 72).

En la figura 2, presentamos los sistemas de representación numérico, simbólico, gráfico, pictórico, tabular y ejecutable que usamos en nuestra propuesta de la unidad didáctica.

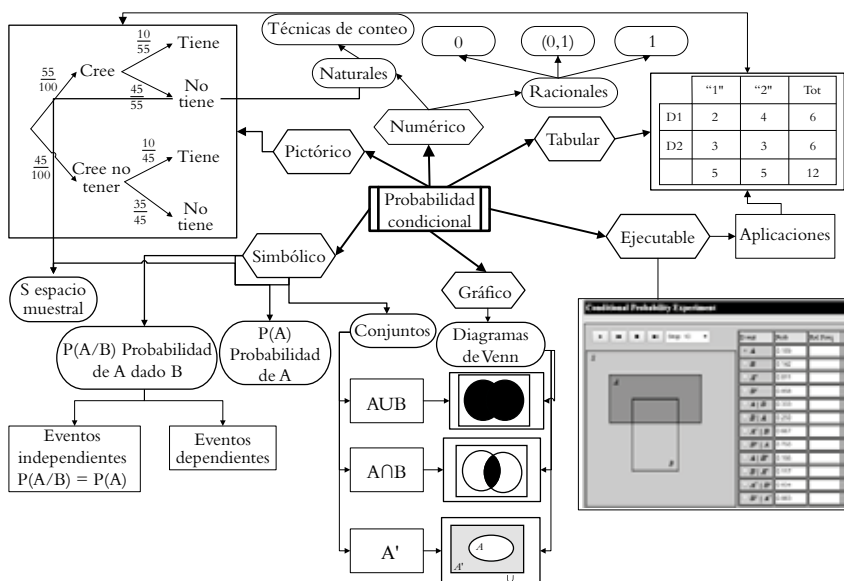


Figura 2. Mapa conceptual de los sistemas de representación de probabilidad condicional

El sistema de representación numérico está presente cuando se define la razón de probabilidad. Este cociente se encuentra en el conjunto de los números racionales en el intervalo unidad $[0, 1]$. El sistema de representación simbólico está compuesto por todos los símbolos de la teoría de conjuntos que se utilizan para la teoría de la probabilidad condicional, así como aquellos símbolos propios de la probabilidad simple y la probabilidad condicional. El sistema gráfico permite representar relaciones entre eventos en un experimento aleatorio, como la intersección, unión o el complemento. En los sistemas de representación tabular y pictórico, las tablas de contingencia y los diagramas de árbol permiten organizar la información, identificar intersecciones y determinar claramente el orden de ocurrencia de los eventos. En el sistema de representación ejecutable, encontramos algunos aplicativos relacionados con el uso de diagrama de Venn y con el diagrama de árbol. Este recurso afianza la representación pictórica y la relaciona con el sistema de representación numérico.

1.3. Fenomenología

La fenomenología es un “elemento constitutivo del significado de un concepto [que surge] de una visión funcional del currículo, en virtud de la cual los sentidos en los que se usa un término conceptual matemático también incluyen los fenómenos que sustentan el concepto” (Gómez, 2007, p. 50). La probabilidad y el cálculo de probabilidades son inherentes a las situaciones que involucran incertidumbre; aquellas relacionadas con los fenómenos aleatorios en los que hay condiciones que influyen en el espacio muestral. Las aplicaciones de la probabilidad condicional son múltiples: en diversas situaciones o experimentos asignamos probabilidad a un evento, relativo a la ocurrencia de otro evento. Por ejemplo, en campos como la agricultura y la zootecnia se emplean experimentos aleatorios para prever el efecto del uso de fertilizantes o pesticidas, evaluar el rendimiento de una cosecha o las consecuencias de la extensión de una epidemia o de una nube tóxica. En el ámbito de la psicofisiología, se puede observar el efecto del azar sobre el cociente intelectual o la intensidad de respuesta a un estímulo. En el campo de la medicina, se puede calcular la probabilidad de contagiar o no una enfermedad, la duración de un cierto síntoma, la posibilidad de heredar una cierta enfermedad o determinar el modo en que se determina el recuento de glóbulos rojos a partir de una muestra de sangre.

Los componentes del concepto pedagógico fenomenología son los contextos fenomenológicos y las subestructuras. Los fenómenos se agrupan de acuerdo con sus características estructurales, es decir, “aquellas características del fenómeno... que son relevantes desde el punto de vista matemático” (Gómez,

2007, p. 54). Las subestructuras surgen al considerar la estructura conceptual del tema y al identificar si algunas de esas subestructuras organizan grupos de fenómenos. En la figura 3, presentamos los componentes fenomenológicos que analizamos para el tema de probabilidad condicional: las subestructuras y los contextos fenomenológicos.

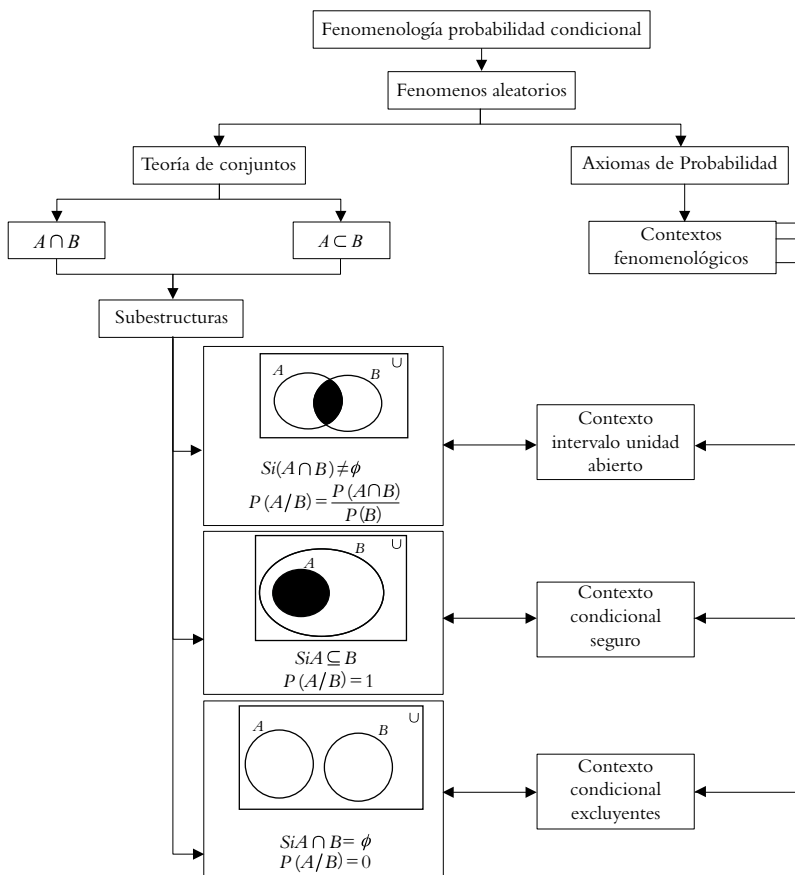


Figura 3. Fenomenología relación entre subestructuras y contextos fenomenológicos

Para determinar las subestructuras matemáticas, nos basamos en la estructura conceptual del tema. Las identificamos a partir de la teoría de conjuntos, específicamente a partir de las relaciones de la intersección y la contención de eventos, y las clasificamos en tres categorías. La primera se relaciona con la intersección de los conjuntos; en la segunda, un conjunto es subconjunto del otro; y, en la tercera, la intersección es vacía.

Establecimos tres contextos fenomenológicos. El contexto condicional excluyente es aquel en el que la probabilidad condicional es cero. Por ejemplo, la probabilidad de ganar la lotería sabiendo que nunca se compra. El contexto condicional seguro es aquel en el que se encuentran todos los fenómenos para los que la probabilidad condicional es 1. Es el caso, por ejemplo, de un juego de cartas (truco de magia) en el que el artista “vende” la idea de que existe una situación de incertidumbre; no obstante, el artista sabe que es un evento seguro. Finalmente, en el contexto intervalo unidad abierta se encuentran los fenómenos en los que la probabilidad condicional es un número entre cero y uno, sin incluirlos. Es el caso de fenómenos como el juego del baloto o juegos de casino.

Los contextos fenomenológicos mantienen una relación biunívoca con las tres subestructuras matemáticas identificadas. Hemos descrito tres subestructuras y establecido una relación directa con cada uno de los contextos fenomenológicos. Con el objetivo de ejemplificar algunos aspectos destacados de cada uno de los conceptos pedagógicos que hemos descrito, vamos a hacer referencia al ejemplo Gastritis. Identificamos este ejemplo con el contexto fenomenológico intervalo unidad abierta, debido a que la intersección entre los dos eventos es no vacía y un evento no es subconjunto del otro.

Gastritis

Con base en sus registros, un médico gastroenterólogo ha recaudado la siguiente información relativa a sus pacientes: 10% creen tener gastritis y la tienen; 45% creen tener gastritis y no la tienen; 10% no creen tener gastritis y sí la tienen; y 35% creen no tenerla y tienen razón. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga gastritis sabiendo que cree no tenerla? En la figura A, mostramos la representación pictórica y gráfica de la situación.

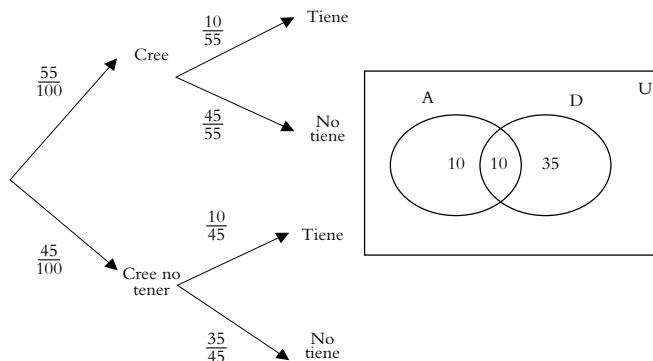


Figura A. Representación pictórica y representación gráfica del fenómeno gastritis

La pregunta se puede resolver con el modelo de la probabilidad condicional $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (representación simbólica), por medio de una tabla de contingencia (representación tabular), en un diagrama de árbol (representación pictórica) y mediante diagramas de Venn (representación gráfica). Los sistemas de representación tabular y pictórica permiten visualizar las intersecciones y establecer el orden de los eventos de este tipo de situaciones. A su vez, los sistemas de representación permiten generar procesos de inducción y deducción para comprender y establecer la probabilidad condicional. Es decir, los sistemas de representación sirven de puentes para traducir de lo numérico a simbólico y viceversa.

Para resolver este tipo de situaciones, se requiere determinar el espacio muestral, los eventos, la probabilidad de los eventos y de sus intersecciones. A partir de las intersecciones se puede identificar que pertenecen a la subestructura de intersección con elementos de los dos eventos y al contexto fenomenológico intervalo unidad abierto.

2. Análisis cognitivo

En este apartado, describimos las expectativas de aprendizaje (nivel superior, medio e inferior) y los errores y dificultades, como parte de la dimensión cognitiva. Después, detallamos las expectativas de tipo afectivo y describimos los aspectos que afectan la motivación, como parte de la dimensión afectiva.

2.1. Dimensión cognitiva

En la dimensión cognitiva, consideramos las expectativas de aprendizaje, las dificultades y errores, y la caracterización de nuestros objetivos. Las expectativas de aprendizaje se clasifican en tres niveles. Las expectativas de nivel superior comprenden las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013). Las expectativas de nivel medio comprenden los objetivos de aprendizaje de nuestra unidad didáctica. Y las expectativas de nivel inferior “están directamente relacionadas con las actuaciones de los estudiantes cuando ejecutan los procedimientos rutinarios básicos del tema matemático” (González y Gómez, 2015, p. 21). Dentro de este último grupo de expectativas, diferenciamos los conocimientos previos y las capacidades que pretendemos desarrollar con la unidad didáctica.

Expectativa de aprendizaje de nivel superior

Para la propuesta de nuestra unidad didáctica, consideramos las siete capacidades matemáticas fundamentales: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico, y utilización de herramientas matemáticas. Las capacidades matemáticas fundamentales de comunicación, matematización, representación, y razonamiento y argumentación se relacionan directamente con los tres procesos que fundamentan la planeación de matemáticas en el colegio Robert F. Kennedy (comunicación, razonamiento y modelación). Nos enfocamos en los tres procesos matemáticos: formulación matemática de las situaciones (formular); empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos (emplear); e interpretación, aplicación y valoración de resultados matemáticos (interpretar).

Expectativas de aprendizaje de nivel medio

A continuación, enumeramos los objetivos de aprendizaje de nuestra unidad didáctica. Estos objetivos se relacionan con los tres procesos matemáticos propuestos en PISA 2012.

1. Reconocer situaciones en las que es posible aplicar la noción de probabilidad condicional y expresar la situación matemáticamente.
2. Resolver situaciones que involucran la probabilidad condicional mediante el uso de sistemas de representación, diagramas de árbol, tablas de contingencia, gráfico y ejecutable para establecer relaciones entre sí, y determinar la intersección y dependencia de eventos.
3. Interpretar resultados obtenidos con el modelo de probabilidad condicional para darle sentido en contextos de la vida cotidiana.

Relacionamos el primer objetivo con el proceso de formular, el segundo con el proceso de emplear y el tercero con el proceso de interpretar.

Expectativas de nivel inferior

En las expectativas de aprendizaje de nivel inferior, describimos los conocimientos previos (véase listado completo en el anexo 2) y las capacidades relacionadas con nuestra unidad didáctica (véase listado completo en el anexo 3).

Organizamos los conocimientos previos en dos grupos. El primer grupo está relacionado con la teoría de conjuntos. Algunos ejemplos son los siguientes: halla la intersección de dos o más conjuntos, halla el complemento de un conjunto y realiza la operación de unión de conjuntos. El segundo grupo

está relacionado con probabilidad. Algunos ejemplos son los siguientes: emplea los axiomas de probabilidad, calcula la probabilidad simple e identifica espacios muestrales.

Clasificamos las capacidades en tres grupos: capacidades operacionales, capacidades relacionadas con los sistemas de representación y capacidades relacionadas con la probabilidad. Algunas de las capacidades operacionales son, por ejemplo, identifica espacios muestrales, organiza los datos del problema, e interpreta y analiza los resultados obtenidos. Dentro de las capacidades relacionadas con los sistemas de representación, se encuentran, por ejemplo, resuelve situaciones empleando diagramas de Venn, representa una situación haciendo uso de las reglas de procedimiento del diagrama de árbol, y representa y organiza los datos en una tabla de contingencia en filas y columnas. En el último grupo se encuentran capacidades como calcula probabilidad de eventos utilizando la razón de probabilidad, identifica situaciones que involucran probabilidad condicional, y reconoce espacios muestrales relativos a condiciones de situaciones específicas.

Dificultades y errores

En este apartado, describimos algunas dificultades y errores identificados en la literatura. Después, conformamos nuestro listado de dificultades y errores en torno al tema de probabilidad condicional.

Huertas y Lonjedo (2007) resaltan la influencia que tienen las expresiones lingüísticas en la solución de problemas de probabilidad condicional. Estos autores explican que la interpretación incorrecta de un enunciado puede generar algunos errores en los estudiantes. Por ejemplo, los estudiantes pueden confundir los eventos (evento condicionante y condicionado), interpretar que el problema se relaciona con probabilidad simple y no probabilidad condicional, o asignar probabilidad a la intersección de los eventos. Contreras (2011) describe que un error frecuente de los estudiantes consiste en asumir la conmutatividad de la probabilidad condicional ($P(A|B) = P(B|A)$). En cuanto al uso de sistemas de representación, los estudiantes pueden incurrir en errores al ingresar los datos en un diagrama de árbol o una tabla de doble entrada.

Nuestro listado de dificultades y errores (véase anexo 4) incluye los errores que identificamos en la literatura, junto con las dificultades y errores en los que los estudiantes pueden incurrir en el desarrollo de nuestra unidad didáctica. El listado se compone de ocho dificultades con sus errores asociados. En la tabla 1, describimos los errores asociados con la dificultad para particularizar la probabilidad condicional en diferentes contextos.

Tabla 1
Ejemplo de dificultad y errores

E	Descripción
D1.	Dificultad para particularizar la probabilidad condicional en diferentes contextos
1	Emplear probabilidad simple en situaciones de probabilidad condicional
2	Confundir el evento condicionante con el condicionado
3	Confundir las probabilidades $P(A B)$ con $P\left(\frac{A}{B}\right)$
4	Escoger el espacio muestral incorrecto, sin tener en cuenta el condicionante
5	Afirmar que si un suceso no ha ocurrido en un experimento, la probabilidad de ocurrencia de dicho suceso será mayor al realizar nuevamente el mismo experimento

Nota. E = error, D = dificultad

Los estudiantes pueden presentar dificultades al identificar que una situación de incertidumbre se relaciona con probabilidad condicional. Esto se debe a que los estudiantes no tienen claras las diferencias entre probabilidad simple y condicional. En la probabilidad condicional, los eventos condicionado y condicionante desempeñan un papel primordial para determinar el espacio muestral de manera correcta.

Caracterización de los objetivos

En este apartado, describimos y caracterizamos nuestros objetivos. Presentamos con detalle la caracterización del objetivo 1, en términos de su grafo de criterios de logro. Este grafo está compuesto por los distintos caminos de aprendizaje que un estudiante puede desarrollar para lograr el objetivo. Aunque presentamos los grafos de criterios de logro de los otros dos objetivos, describimos su caracterización detallada en el anexo 5.

Con el primer objetivo, buscamos contribuir al desarrollo del proceso matemático de formular en los estudiantes, de tal manera que identifiquen los elementos de la probabilidad condicional y que la diferencien de una probabilidad simple. Por ejemplo, los estudiantes deben identificar la importancia de las características dadas en una situación, para establecer la intersección de dos eventos o los cambios que se realizan a un espacio muestral inicial.

La caracterización del objetivo se basa en un procedimiento que parte del análisis de una tarea prototípica. Este análisis nos permite identificar las capacidades y errores que son propias del objetivo. Posteriormente, concretamos los criterios de logro para conformar los distintos caminos de aprendizaje que

generan el grafo de criterios de logro. En el caso particular de este objetivo, los criterios de logro son los siguientes: reconocer que una tarea se resuelve mediante probabilidad condicional (1.1), reconocer la información y los datos de una situación relacionada con probabilidad condicional (1.2), organizar datos mediante un diagrama de árbol (1.3), organizar datos mediante una tabla de contingencia (1.4), organizar datos mediante un diagrama de Venn (1.5), ajustar decisiones con base en información que no fue considerada inicialmente (1.6), reconocer los eventos para calcular la probabilidad de la intersección cuando sea necesaria (1.7), calcular la probabilidad condicional solicitada (1.8) y formular relaciones entre el resultado y la situación planteada (1.9).

Con base en lo anterior, presentamos un grafo de criterios de logro (figura 4). En este grafo, mostramos las diferentes sucesiones de criterios de logro que los estudiantes pueden llegar a activar al resolver una tarea prototípica para este objetivo. Para cada criterio de logro, contemplamos errores en los que los estudiantes pueden incurrir. Por ejemplo, un estudiante puede lograr parte de este objetivo si, al abordar una tarea, activa los criterios de

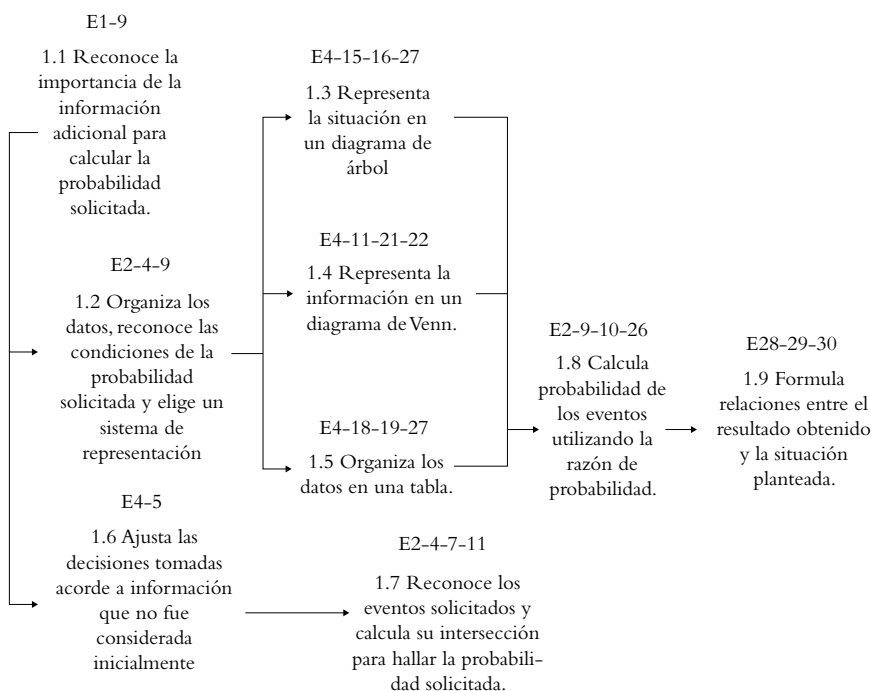


Figura 4. Grafo de criterios de logro del objetivo 1

logro 1.1, 1.2, 1.3, 1.8 y 1.9. Para esta sucesión particular, prevemos algunos errores. Entre estos se encuentran los siguientes: confundir probabilidad simple con probabilidad condicional (E1) en el criterio de logro 1.1, identificar de manera errónea eventos condicionado y condicionante (E2) en el criterio de logro 1.2, asignar valores en un diagrama de árbol sin tener en cuenta cambio de espacio muestral (E15, E16) en el criterio de logro 1.3, realizar operaciones aritméticas de forma incorrecta (E27) en el criterio de logro 1.8, y asumir la probabilidad de un evento fuera del intervalo $[0,1]$ (E26) en el criterio de logro 1.9.

Con el segundo objetivo, buscamos contribuir al desarrollo del proceso matemático de emplear, de tal manera que los estudiantes usen sistemas de representación para dar solución a situaciones que involucran probabilidad condicional. En la figura 5, presentamos los criterios de logro y caminos de aprendizaje relacionados con el objetivo 2. Los criterios de logro hacen énfasis en la identificación de la probabilidad condicional en una situación. Posteriormente, se organizan los datos del problema mediante sistemas de representación acorde con la situación. Y, finalmente, se usa el modelo de probabilidad condicional para determinar la solución. Por ejemplo, la sucesión

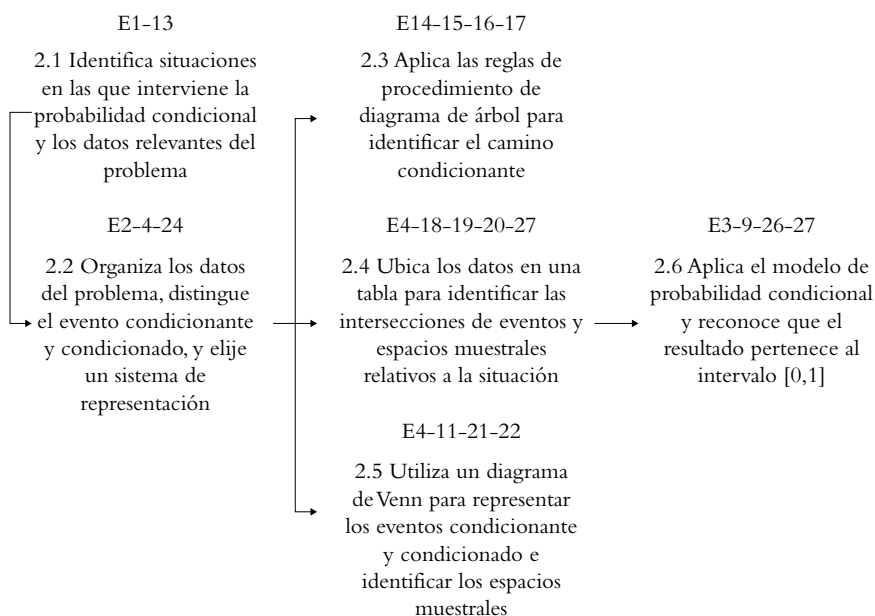


Figura 5. Grafo de criterios de logro del objetivo 2

2.1-2.2-2.4-2.6 corresponde a un camino de aprendizaje en el que el sistema de representación diagrama de Venn permite organizar los datos del problema, con el fin de identificar la intersección de eventos y el evento condicionante y condicionado. No obstante, prevemos que, en esta sucesión, el estudiante incurra en el error de escoger el espacio muestral incorrecto (E4) o asigne dos veces el valor de la intersección (E22).

Con el tercer objetivo, buscamos contribuir al desarrollo del proceso matemático de interpretar, de tal manera que los estudiantes interpreten información relacionada con probabilidad condicional para resolver situaciones de la vida diaria. En la figura 6, presentamos el grafo de criterios de logro del objetivo 3. El logro de este objetivo tiene dos enfoques. El primero está relacionado con la interpretación de información en sistemas de representación (diagrama de árbol, diagrama de Venn o tabla de contingencia), para identificar los eventos condicionante y condicionado. El segundo está relacionado con que el estudiante determine la probabilidad solicitada y establezca

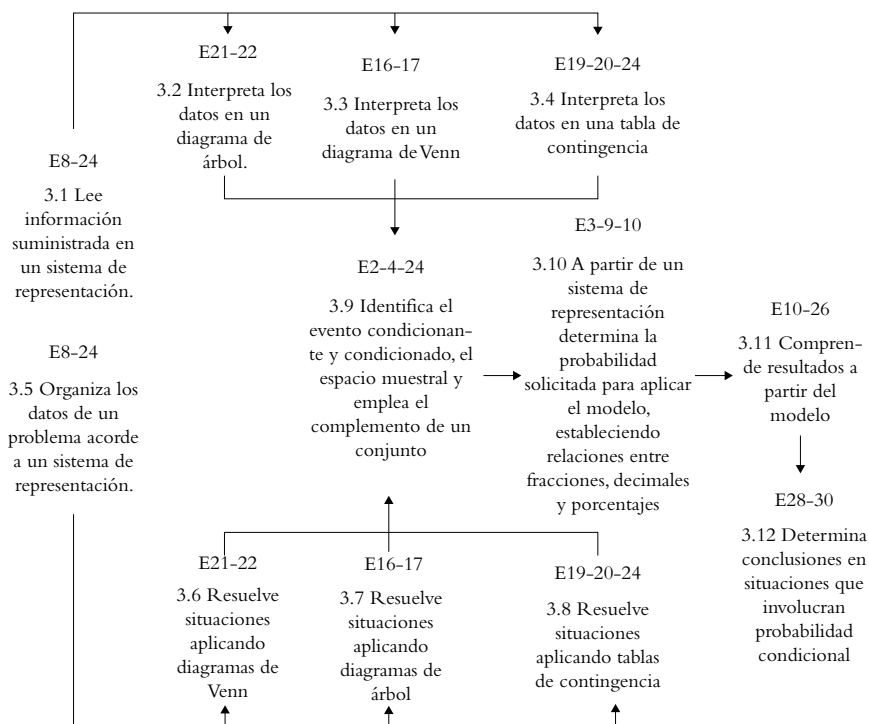


Figura 6. Grafo de criterios de logro del objetivo 3

conclusiones coherentes con la situación. Por ejemplo, el estudiante logra parte del objetivo desde este enfoque al activar la sucesión 3.1-3.4-3.9-.310-3.11-3.12. En esta sucesión, el estudiante debe hacer una correcta lectura de la información en una tabla de contingencia, para identificar el evento condicionante y condicionado. Esto le permite establecer la probabilidad solicitada y las conclusiones coherentes con el contexto. Sin embargo, identificamos la posibilidad de que el estudiante no reconozca el espacio muestral relativo a la condición dada en filas o columnas en una tabla de contingencia (E20); de igual manera, puede obtener soluciones incoherentes en relación con el contexto (E30). En el segundo enfoque, existe una relación con el objetivo 2, al organizar información mediante el uso de los sistemas de representación. Sin embargo, el estudiante debe interpretar y reflexionar sobre la importancia de su solución para establecer conclusiones y relaciones entre decimales, porcentajes y fracciones.

2.2. Dimensión afectiva

En cuanto a la dimensión afectiva, hemos planteado dos tipos de expectativas. A las primeras, les hemos llamado expectativas de tipo afectivo. Las segundas están relacionadas con aspectos que afectan la motivación de los estudiantes.

Expectativas de tipo afectivo

Planteamos cuatro expectativas de tipo afectivo basadas en dos enfoques: el enfoque centrado en factores personales intrínsecos y extrínsecos, y el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje (González y Gómez, 2018). En el mismo sentido, consideramos las capacidades matemáticas fundamentales descritas en PISA 2012. A continuación, presentamos nuestras expectativas afectivas.

1. Desarrollar interés por la argumentación de resultados en situaciones de la vida diaria que involucren la noción de la probabilidad condicional.
2. Generar curiosidad por razonar sobre relaciones entre conceptos de la teoría de conjuntos y el modelo de la probabilidad condicional.
3. Generar interés por el aprendizaje de la probabilidad condicional representando los resultados a un problema de distintas maneras.
4. Desarrollar curiosidad por el trabajo con nociones de la probabilidad condicional que permitan matematizar situaciones de la vida real.

En la tabla 2, mostramos la relación entre las expectativas de tipo afectivo, los enfoques y las capacidades matemáticas fundamentales.

Tabla 2
Relaciones expectativas de tipo afectivo

EA	Enfoque			Generales			Capacidades matemáticas fundamentales						
	1	2	3	EG1	EG2	EG3	DRP	M	C	Ra	U	Re	H
1			✓	✓							✓		
2		✓				✓					✓		
3			✓	✓									✓
4		✓				✓			✓				

Nota: EA = expectativa de aprendizaje; EG = expectativa general; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H: utilización de herramientas matemáticas

Ejemplificamos la tabla con la expectativa afectiva 1 (EA1). Esta expectativa de tipo afectivo se fundamenta en el enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje (enfoque 3) que se refiere a la actitud del estudiante hacia el aprendizaje (EG1). La expectativa está relacionada con la capacidad matemática fundamental de razonamiento y argumentación (RA). El concepto y procedimiento propio del tema es la identificación de situaciones en la vida diaria que involucran probabilidad condicional.

Aspectos que afectan la motivación

En el apartado anterior, describimos nuestras expectativas de tipo afectivo. Además, consideramos otras expectativas afectivas basadas en Romero y Gómez (2018). Estas expectativas dan un mayor sustento a nuestra dimensión afectiva, desde la perspectiva de su motivación. Pretendemos que los estudiantes:

- sepan por qué y para qué deben tratar de resolver la tarea;
- usen conocimientos que ya tienen;
- vean el tema de la tarea interesante y les genere curiosidad;
- reconozcan sus errores al resolverla;
- les parezca un reto y se sientan motivados para resolverla; y
- los lleve a interactuar con sus compañeros.

La percepción de profesor y estudiantes sobre el logro de estos aspectos que afectan la motivación es fundamental a la hora de evaluar la dimensión afectiva.

3. Análisis de instrucción

En este apartado, describimos las tareas diseñadas a partir del análisis de contenido y cognitivo. Para esto, presentamos la secuencia de tareas de manera general y la tarea Buses, en particular. Utilizaremos esta tarea como ejemplo a partir de este apartado. Por último, presentamos la justificación del diseño.

1. *Secuencia de tareas*

El trabajo realizado durante la etapa de diseño y el análisis de las expectativas de aprendizaje nos permitió modificar, clasificar y adecuar las tareas. Utilizamos como estrategia para la metodología dos maneras de solucionar las tareas (de manera individual y grupal) con el fin de obtener información para analizar nuestra primera versión de las tareas. Este análisis nos permitió contar con al menos tres soluciones para cada tarea. Específicamente, conseguimos para la tarea Buses seis alternativas de solución, entre las que estaban una por cada sistema de representación, una solución desde listados y varias soluciones que tenían en común una base lógica que partía de la intuición y el descarte de posibilidades.

Con esta información, clasificamos las tareas según su aporte a cada objetivo, teniendo en cuenta el proceso matemático y las capacidades matemáticas fundamentales que más se ponían en juego en el momento de resolverlas. Para ello, nos valimos de una rejilla en la que podíamos cruzar toda la información para establecer cuantitativamente el número de aportaciones que hacía cada tarea a cada objetivo, a cada proceso matemático y a cada capacidad matemática fundamental. Esta rejilla sufrió varias modificaciones posteriores, según los cambios que introducíamos a las tareas al buscar cubrir por igual cada uno de los objetivos. Esta rejilla nos permitió considerar una gran variedad de soluciones que podrían ser presentadas por los estudiantes, con el fin de ajustar cada tarea a un objetivo particular, de tal manera que las fortalezas de cada tarea aportaran a la consecución del objetivo. En el anexo 6, se puede consultar la versión final de la rejilla que mencionamos.

Una manera de introducir una nueva temática con un grupo de estudiantes es partir de sus conocimientos previos, de un procedimiento conocido o de un desarrollo intuitivo. Estos elementos permiten que el estudiante reconozca falencias en sus conceptos previos, el alcance limitado de los métodos que ya conoce o la falta de rigurosidad matemática de sus procesos intuitivos. En este sentido, la introducción y la formalización de una nueva temática aparecen como una oportunidad y necesidad para recurrir a un nuevo procedimiento

que sea más efectivo, práctico y oportuno. En el esquema presentado en la figura 7, describimos la ruta que hemos elegido como hilo conductor para las tareas de aprendizaje que incluimos en la propuesta didáctica para probabilidad condicional.

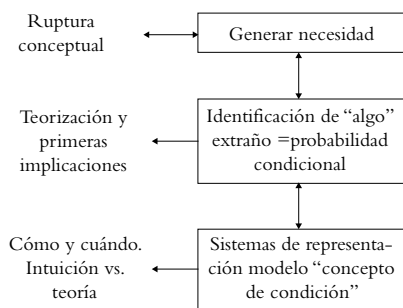


Figura 7. Hilo conductor de la secuencia de tareas de aprendizaje de probabilidad condicional

De esta manera y con toda la información producida, decidimos distribuir las tareas según sus aportes a cada objetivo: dos tareas para cada uno de los objetivos. En este proceso, procuramos que no quedaran aspectos sin atender o que por el contrario se dediquen esfuerzos, tiempo y recursos a atender una sola parte de la temática. Por ejemplo, las tareas no se deben enfocar en exceso al uso del modelo y poco a los sistemas de representación o a la matematización de situaciones. En la figura 8, relacionamos el hilo conductor de la figura 7 y la secuencia de tareas de aprendizaje de probabilidad condicional, con los objetivos y las expectativas de nivel superior. Hemos incluido los nombres con los que referenciamos cada tarea desde su formulación inicial para facilitar la lectura del grafo. A lo largo de este apartado, explicamos cada tarea, así como su aporte e importancia para cada objetivo.

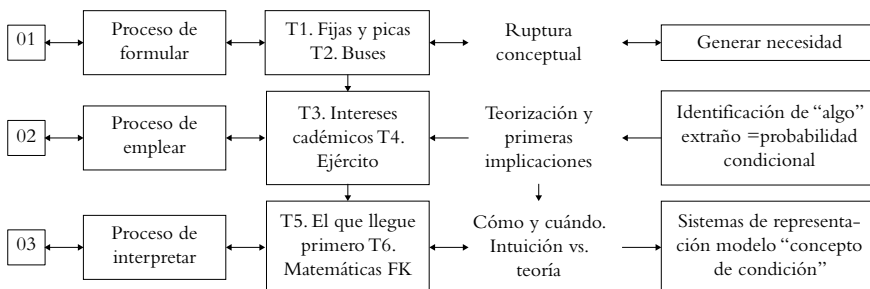


Figura 8. Relación del hilo conductor con tareas, procesos y objetivos

En la tabla 3, presentamos la estructura general de la secuencia de las tareas, el orden en el que dispusimos las tareas de aprendizaje, así como su relación con los objetivos, las capacidades matemáticas fundamentales, los procesos matemáticos y las expectativas de tipo afectivo a las que pretendemos contribuir. Aunque en la tabla se incluye la totalidad de las sesiones, las sesiones 1, 2, 3, 10, 11 serán descritas en el siguiente apartado.

Las tareas que aportan al primer objetivo son Picas y fijas, y Buses. Con la tarea Picas y fijas, pretendemos introducir de manera intuitiva la noción de probabilidad condicional. A partir del juego tradicional de fijas y picas, enfrentamos a los estudiantes a una serie de preguntas con las que pretendemos que identifiquen y relacionen la importancia de la información adicional y la reducción del espacio maestral. Con la tarea Buses, hacemos una formalización de la probabilidad condicional con base en la noción matemática.

Tabla 3
Tareas de la unidad didáctica del tema probabilidad condicional

Sesión	Objetivo	Tarea	Capacidades matemáticas fundamentales						Procesos matemáticos			Expectativas afectivas					
			DRP	M	C	Ra	U	Re	H	F	E	I	1	2	3	4	
1		TD															
2		A															
3		PPD															
4	1	T1	✓		✓			✓		✓			✓	✓			
5	1	T2	✓					✓		✓			✓	✓	✓	✓	✓
6	2	T3			✓			✓		✓					✓	✓	
7	2	T4	✓		✓	✓		✓		✓			✓	✓	✓	✓	
8	3	T5			✓	✓	✓		✓			✓		✓		✓	
9	3	T6	✓	✓								✓		✓		✓	
10	1, 2 y 3	EF															
11		Sesión final															

Nota. TD = tarea diagnóstica; A = ayudas; T1 = Picas y fijas; T2 = Buses; T3 = Intereses académicos; T4 = Ejército; T5 = Matemáticas RKF; T6 = El que llegue primero; EF = examen final; F = formular; E = emplear; I = Interpretar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; PPD = presentación del tema, objetivos y metodología

Por tal razón, esperamos que los estudiantes solucionen la situación planteada mediante el uso de algún sistema de representación que conlleve el modelo matemático de probabilidad condicional.

Con las tareas del objetivo 1, buscamos contribuir al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias, comunicación y representación, y al proceso matemático de formular. Estas tareas fueron diseñadas para contribuir al desarrollo de las dos primeras expectativas afectivas que fueron mencionadas en el apartado anterior.

Las tareas diseñadas para el segundo objetivo son Intereses académicos y Ejército. Estas tareas buscan que los estudiantes identifiquen la importancia de los sistemas de representación (diagrama de Venn, diagrama de árbol y tablas de contingencia) en la solución de situaciones de la vida diaria que involucran probabilidad condicional. La tarea Intereses académicos consiste en una encuesta que los estudiantes realizan a 18 compañeros en la que las opciones permiten elegir una, dos o tres preferencias académicas. Con esta tarea, pretendemos que los estudiantes determinen que el diagrama de Venn es un sistema de representación que les permite organizar la información de manera precisa para determinar la intersección de dos eventos y calcular la probabilidad condicional. La tarea Ejército es una adaptación del problema tradicional de extracción de balotas (dos blancas, dos negras y una blanca y una negra de tres cajas) al sorteo que los estudiantes de grado undécimo acceden para determinar la prestación o no del servicio militar. Con la tarea Ejército, esperamos que los estudiantes identifiquen que el diagrama de árbol es el sistema de representación más pertinente para visualizar todas las posibilidades de la situación planteada. Resaltamos que las tablas de contingencia pueden ser un camino alternativo para la solución de las dos tareas.

Con el diseño de estas dos tareas pretendemos contribuir al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias y representación. Son tareas que promueven en los estudiantes el establecimiento de conexiones entre la teoría de conjuntos, los sistemas de representación y el uso del modelo de la probabilidad condicional. Dado que estas tareas demandan por parte de los estudiantes el uso de conocimientos de sistemas de representación y teoría de conjuntos, el proceso matemático de emplear alcanza un mayor desarrollo. En este sentido, y debido a la cantidad y diversidad del trabajo que deben realizar los estudiantes durante el desarrollo de las tareas, las cuatro expectativas afectivas están estrechamente relacionadas con el desarrollo de estas.

Las tareas correspondientes al tercer objetivo son Matemáticas RFK y El que llegue primero. Con estas tareas, pretendemos que los estudiantes justifiquen matemáticamente los resultados y decisiones de situaciones reales, al aplicar el modelo de la probabilidad condicional. En la tarea Matemáticas RFK, los estudiantes deben seleccionar una de las cinco opciones presentadas (el problema de Monty Hall, un episodio de la serie Numbers, un problema sobre un congreso, aplicativo de diagrama de Venn o un aplicativo de diagrama de árbol) con el fin de presentarla el día de las matemáticas en la institución. Aspiramos a que los estudiantes apliquen lo aprendido en las tareas anteriores, al interpretar la información de las situaciones planteadas que involucran la probabilidad condicional. La tarea El que llegue primero se basa en un juego por parejas, en el que cada uno debe elegir cinco casillas del 2 al 12 y avanza en la medida en que la suma de los dados corresponda a una de las casillas seleccionadas. Con esta tarea, esperamos que los estudiantes reconozcan la importancia de interpretar la información sobre probabilidad condicional para tomar decisiones acertadas en el desarrollo del juego planteado.

Con las tareas de aprendizaje diseñadas para el cierre de la propuesta didáctica, pretendemos contribuir al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de matematizar, razonamiento y argumentación y representación. En este sentido, también pretendemos aportar al desarrollo y fortalecimiento de la expectativa afectiva que corresponde al establecimiento de relaciones entre la teoría de conjuntos y la probabilidad condicional (EA2) y la que resalta la importancia de matematizar situaciones de la vida real que involucran el concepto de probabilidad condicional (EA4), así como al proceso matemático de interpretar.

En la tabla 4, presentamos la propuesta de la secuencia de las tareas. Realizamos esta secuencia con base en la descripción y el análisis que acabamos de presentar.

Tabla 4
Coherencia de las tareas

		Tareas					
T	CP	T1	T2	T3	T4	T5	T6
T1	✓						
T2	✓	✓					
T3	✓	✓	✓				

		Tareas					
T	CP	T1	T2	T3	T4	T5	T6
T4	✓	✓	✓	✓			
T5	✓	✓	✓	✓	✓		
T6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	

Nota. CP = conocimientos previos; T1 = Picas y fijas; T2 = Buses; T3 = Intereses académicos; T4 = Ejército; T5 = Matemáticas RKF; T6 = El que llegue primero

Recordemos el esquema presentado en la figura 7 y analicemos brevemente el papel que desempeña cada una de las tareas en el proceso descrito. Las tareas 1 y 2 corresponden a la etapa que hemos denominado ruptura conceptual. Posteriormente, en la etapa de teorización y primeras aplicaciones, las tareas 3 y 4 presentan actividades en las que los estudiantes formalizan el concepto de probabilidad condicional y se enfrentan a situaciones condicionadas en un momento en el que ya conocen el modelo de la probabilidad condicional. Finalmente, los estudiantes abordan las tareas 5 y 6 cuando ya tienen experiencia en la solución de situaciones que involucran el concepto de probabilidad condicional y, por lo mismo, se espera que en estas actividades reconozcan cuál es el sistema de representación más adecuado según la información que necesite, e interpreten cómo y cuándo hacer uso del modelo para resolver satisfactoriamente las situaciones propuestas. En este orden de ideas, estas últimas dos tareas corresponden a la etapa que hemos denominado cómo y cuándo, intuición vs. teoría, en la que la tarea 6 representa una actividad de cierre y, por lo mismo, no es prerrequisito de ninguna tarea. A continuación, presentamos detalladamente la ficha de la tarea Buses.

2. Tarea buses

Para el diseño y el análisis de las tareas, consideramos siete elementos: los requisitos, las metas, los materiales y recursos, el agrupamiento de los estudiantes durante la implementación de la tarea, la interacción y forma de comunicación en clase que se esperaba en esta tarea, y la formulación completa con la que contaron los estudiantes durante la implementación.

Describir los elementos de cada tarea nos permite analizar la pertinencia y coherencia de la tarea en relación con las expectativas proyectadas antes de la implementación. Si bien hay multitud de variables que intervienen durante la

implementación de una unidad didáctica, este análisis nos da la posibilidad de reducirlas, controlarlas y proporcionar argumentos para tomar decisiones objetivas en los cambios y ajustes del diseño de las tareas. Como resultado del continuo proceso de revisión de estos elementos antes de la implementación, tanto para la visión de cada tarea como para la visión global de la unidad didáctica, realizamos una planeación rigurosa que nos da mayor certeza en la consecución de las expectativas esperadas y nos permite contemplar herramientas para abordar el mayor número de posibilidades en el diseño.

A continuación, presentamos la descripción completa de la tarea Buses. Presentamos la descripción detallada de las otras cinco tareas en el anexo 5. La tarea Buses ubica a los estudiantes en una situación cotidiana que consiste en abordar un bus para transportarse de un lugar a otro, pero les proporciona algunos condicionantes que deben analizar para llegar a la mejor solución dentro de las posibilidades que les permite el contexto.

Requisitos

Esta tarea es la segunda tarea de la unidad didáctica y, al igual que en la tarea Picas y fijas, se espera que los estudiantes apelen a su “sentido común” permeado por sus conocimientos previos en relación con la probabilidad. Esperamos que el estudiante conozca y utilice correctamente tablas de contingencia, diagramas de árbol, representaciones icónicas o demás métodos que les permitan simular la situación.

Metas

Esperamos que los estudiantes, al intentar resolver esta tarea, hagan uso de sus conocimientos de probabilidad simple, utilicen diagramas de árbol, listados de casos posibles o representaciones tabulares. Al finalizar la tarea Buses, esperamos que el estudiante identifique o comience a intuir que las ventajas que le proporciona la información adicional corresponde realmente a un cambio en el espacio muestral. Este cambio es el resultado de comparar la intersección de dos eventos con el espacio muestral que no ha sido sometido a condiciones, y de relacionar este hecho con el modelo de probabilidad condicional.

Formulación

Diez estudiantes de grado undécimo del colegio Robert. F Kennedy, que estaban en una salida pedagógica, se quedaron de los buses de los grados superiores y ahora deben abordar alguno de los buses que quedan. Como no encontraron

un bus con los diez cupos, viajaron repartidos entre tres buses: el que lleva a los niños de preescolar, el que lleva a los niños de primaria y el de los niños de sexto, que tenían tres, cuatro y cinco cupos respectivamente.

Teniendo en cuenta únicamente la información suministrada y sabiendo que el bus que lleva a los estudiantes de sexto no se llenó, ¿cuál es la probabilidad de que sí se llenara el bus de primaria?

Materiales y recursos

Esta tarea requiere de algún elemento que permita el registro de las estrategias de resolución empleadas por los estudiantes. Descartamos la inclusión de algún formato, tabla o similar, para no condicionar al estudiante al uso de alguna estrategia en particular. Por lo tanto, el uso de papel de notas, bolígrafo o lápiz es suficiente. Se pueden incluir colores para diferenciar los buses o los diez estudiantes del problema.

Agrupamiento

Los estudiantes realizarán la tarea en grupos de cuatro estudiantes. Este es un lineamiento establecido en el sistema integral de evaluación (SIE) del colegio Robert F. Kennedy.

Comunicación e interacción

La comunicación permanente entre los integrantes del grupo permite filtrar, organizar y puntualizar la información que cada estudiante desarrolla durante la resolución de la tarea. Durante la actividad se destina un espacio para compartir los hallazgos de cada grupo y poder consolidar en la plenaria de la clase la noción de probabilidad condicional.

Temporalidad

Se estima un tiempo de 15 minutos para el trabajo en grupos de cuatro personas. Después, la plenaria de todo el curso puede tomar otros 20 minutos, siendo mayor o menor el tiempo empleado, según la interacción del grupo. El tiempo restante se utilizará para presentar a los estudiantes los instrumentos de registro y recolección de la información. Teniendo en cuenta que en esta actividad se hará la inclusión del modelo de la probabilidad condicional, es importante tomarse el tiempo necesario para las explicaciones que justifiquen la aparición del modelo matemático.

Ayudas

Las ayudas se dividen en dos grandes grupos. Las primeras ayudas corresponden a la intervención del profesor en los grupos de cuatro estudiantes en procura de garantizar que los grupos consideren todas las opciones de viaje y no solo aquellas que cumplan la condición de que un bus se llene sabiendo que otro no se llenó. Si bien algún grupo puede apelar directamente al espacio muestral que le proporciona la condición, el docente debe mostrar que, al establecer el espacio muestral completo, tendrán un panorama más amplio, se aseguran de que ninguna opción se olvide o quede de lado, y podrán resolver interrogantes futuros que no dependan en exclusiva de la condición planteada.

Las otras ayudas se presentan durante la plenaria, cuando los estudiantes exponen los métodos utilizados. En este momento, el profesor debe resaltar las intersecciones, las contencencias y, en general, los conjuntos identificados por los estudiantes para asociarlos a eventos correspondientes al experimento. Esto se logra con preguntas como: ¿cuáles son los casos en que x bus se va lleno?, ¿cuáles son los casos en que y bus se va lleno?, ¿cuáles son los casos en que x bus no se va lleno?, ¿se pueden ir todos llenos?, ¿cuándo ocurre que x bus se va lleno mientras y bus no se llena? y ¿es lo mismo ir vacío que ir no lleno?

3. Justificación del diseño

Propusimos las tareas Picas y fijas y Buses para contribuir al desarrollo del proceso de formular. Las dificultades asociadas a estas tareas están relacionadas con la generación de distintas estrategias para su solución. Estas tareas permiten establecer características de las situaciones que involucran probabilidad condicional para que los estudiantes entiendan las diferencias con la probabilidad simple. Las tareas Intereses académicos y Ejército se relacionan con el proceso de emplear. Por lo tanto, las dificultades asociadas con estas tareas permiten identificar procesos en los que los estudiantes hacen uso de algún sistema de representación. Con las últimas tareas, Matemáticas RFK y El que llegue primero, pretendemos contribuir al proceso matemático de interpretar y evaluar. Por esto, en estas tareas incluimos preguntas que, para ser solucionadas, le implican al estudiante interpretar información y generar justificaciones relacionadas, por ejemplo, con la descripción de espacios muestrales, la generación de nuevas condiciones o la evaluación de la representación de una información específica.

En la tabla 5, observamos que las tareas activan proporcionalmente los tres procesos matemáticos y hacen énfasis en el proceso definido para cada objetivo. Hemos diseñado las tareas para que contribuyan al desarrollo de todas las capacidades matemáticas, pero principalmente al diseño de estrategias para resolver problemas, la matematización, la comunicación, el razonamiento y la argumentación, y la representación. Los números que aparecen en la tabla representan las activaciones de las secuencias de tareas.

Tabla 5
Contribución a expectativas de aprendizaje de nivel superior

CMF	Procesos matemáticos			Total
	Formular	Emplear	Interpretar	
DRP	9	15	12	36
M	14	4	9	27
C	6	17	9	32
Ra	3	8	9	20
U	0	3	2	5
Re	15	9	7	31
H	2	0	0	2
Total	49	56	48	153

Nota. CMF = capacidad matemática fundamental; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; S = secuencia de capacidades

En relación con la contribución de las tareas a las expectativas afectivas, la tarea Picas y fijas se caracteriza por fortalecer aspectos que desarrollen interés en los estudiantes al identificar situaciones en la vida diaria. En estas situaciones, el aprendizaje gira en torno a la probabilidad condicional (expectativas afectivas 1 y 2). La tarea Buses fortalece la activación de las expectativas de la tarea Picas y fijas y abarca el desarrollo de la curiosidad en los estudiantes por matematizar situaciones de incertidumbre de la vida real (expectativas afectivas 1, 2, 3 y 4). Las tareas Intereses académicos y Ejército presentan mayor relación con las expectativas que tienen inmerso el uso de sistemas

de representación o relaciones entre conceptos de la teoría de conjuntos y probabilidad (expectativas afectivas 2 y 3). La tarea Matemáticas RFK induce a los estudiantes a desarrollar interés por las argumentaciones que permiten observar situaciones que involucran probabilidad condicional y a representar situaciones de distintas maneras (expectativas afectivas 1 y 3). Por último, la tarea El que llegue primero será un complemento para la tarea Matemáticas RFK al generar curiosidad por el uso de la probabilidad condicional en los juegos que involucran la noción del azar (expectativas afectivas 2 y 4).

En los aspectos que afectan la motivación, consideramos que la totalidad de las tareas favorecen la interacción, pues, en cada una de ellas, se permite un trabajo individual, un trabajo grupal y un cierre en plenaria para puntualizar los aspectos relevantes de cada tarea y que son importantes para la consolidación del concepto de probabilidad condicional. Aspectos como el contexto y el reto se justifican desde el diseño mismo de la tarea, en el que se busca poner al estudiante en una situación práctica que pareciera una labor sencilla y que le exige hacer uso de cada uno de los aprendizajes generados en el desarrollo de las tareas.

4. Instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información

En este apartado, describimos los instrumentos de recolección de información de nuestra unidad didáctica. Presentamos, en primera instancia, la tarea diagnóstica y el examen final. Posteriormente, describimos las tareas de aprendizaje y su relación con las expectativas de nivel medio. Por último, exponemos el diario del profesor, el diario del estudiante y el sistema ACE (Análisis de Consecución de Expectativas).

1. Tarea diagnóstica y examen final

A continuación, presentamos los dos primeros instrumentos de recolección de información de nuestra unidad didáctica: la tarea diagnóstica y el examen final. Estos instrumentos nos permitieron obtener información del antes y el después de la intervención con la unidad didáctica para caracterizar la evolución del aprendizaje de los estudiantes.

1.1. Tarea diagnóstica

Diseñamos la tarea diagnóstica con el objetivo de evaluar los conocimientos previos que consideramos necesarios para el desarrollo de nuestra unidad didáctica (véase anexo 8). De igual manera, queríamos evaluar el nivel que cada estudiante tenía con respecto a cada conocimiento previo, con el fin de brindar una serie de ayudas y garantizar algunos mínimos necesarios para el buen desarrollo de la propuesta didáctica. En este sentido, propusimos cinco tareas cortas inmersas en tres temas. El primer tema se relaciona con los conceptos probabilísticos, dentro de los cuales consideramos la noción de razón de probabilidad, la noción de evento y de espacio muestral. El segundo tema se relaciona con los sistemas de representación, el diagrama de Venn, las tablas de contingencia y el diagrama de árbol, como herramientas pertinentes para la solución de situaciones de incertidumbre. Por último, propusimos tareas que se relacionan con conceptos aritméticos, en los cuales consideramos la equivalencia entre fracciones, decimales y porcentajes.

En la figura 9, presentamos un ejemplo de pregunta de nuestra tarea diagnóstica, con la cual pretendemos indagar sobre nociones de probabilidad simple. Consideramos los siguientes conocimientos previos: hallar el complemento de un conjunto, realizar la operación de unión de conjuntos, calcular la probabilidad simple, identificar espacios muestrales y emplear los axiomas de probabilidad. En cuanto a las capacidades, consideramos que un estudiante debe identificar espacios muestrales y eventos, organizar los datos del problema, interpretar y analizar los resultados obtenidos, y calcular probabilidad de eventos utilizando la razón de probabilidad en el momento de abordar este punto de la prueba de entrada.

PRUEBA DIAGNÓSTICA

1. En un evento aleatorio se definió el siguiente espacio muestral $S = \{A, B, C, D\}$ en el cual los eventos de S son mutuamente excluyentes dos a dos (intersección vacía entre ellos). Se sabe que $2 \cdot 1 \cdot P(C \cup D) = 3 \cdot 2 \cdot P(A \cup C) = 2 \cdot 1 \cdot P(A) = \dots$ ¿Cuál es la $P(B)$?

$$P(C) = \frac{1}{6}$$

$$P(D) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = 0$$

Figura 9. Ejemplo de pregunta de la tarea diagnóstica

1.2. Examen final

Realizamos un examen que consta de cuatro preguntas (véase anexo 9). La primera pregunta permite indagar si los estudiantes tienen claras ciertas diferencias entre probabilidad simple y probabilidad condicional. Las otras tres preguntas corresponden una a una con los objetivos de aprendizaje de la unidad didáctica. Enfocamos cada una de las preguntas a evaluar un proceso matemático. Con la pregunta 2, pretendimos evaluar el proceso de formular; con la pregunta 3, pretendimos evaluar el proceso de emplear; y con la pregunta 4, pretendimos evaluar el proceso de interpretar. Sin embargo, queremos resaltar que las preguntas propuestas pueden implicar más de un proceso. En la figura 10, tomamos como referencia la pregunta del objetivo 2, en la que es importante el uso de sistemas de representación (tabular, diagrama de árbol o diagrama de Venn).

En la tabla 6, presentamos cuatro niveles distintos con los que se pueden clasificar los resultados de los estudiantes en el examen final. En esta valoración, consideramos los niveles superior, alto, básico y bajo con su respectiva correspondencia numérica. Realizamos la descripción de los niveles con base en las capacidades que se activan y los errores en los que se puede incurrir al desarrollar cada punto del examen final, de manera que proporcione información sobre el proceso de cada estudiante. Así pues, al estandarizar los posibles desempeños de los estudiantes basándonos en los errores en los cuales podrían incurrir y en las capacidades que se pondrían en juego durante el desarrollo del examen, creamos una rúbrica con la cual obtuvimos información objetiva con respecto a las respuestas dadas por los estudiantes.

2. En una universidad de la ciudad de Bogotá el 18% de las mujeres y el 27% de los hombres estudian alguna carrera de ingeniería, el 10% de los hombres y el 15% de las mujeres estudian una carrera de la salud, el resto estudia una carrera humanística. Los hombres son el 55% del total de los estudiantes. Si se selecciona un estudiante al azar y se sabe que está estudiando alguna ingeniería, ¿Cuál es la probabilidad de que sea un hombre?

Mujeres $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ingeniería } 18\% \\ \text{Salud } 15\% \\ \text{Humanística } 12\% \end{array} \right.$

Hombres $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ingeniería } 27\% \\ \text{Salud } 10\% \\ \text{Humanística } 18\% \end{array} \right.$

$P = \frac{27\%}{45\%} \rightarrow$ Total estudiantes Ingeniería
 \downarrow
 Probabilidad de que sea hombre.

Figura 10. Ejemplo de pregunta del examen final

Tabla 6
Valoración general del examen

Intervalo numérico	Nivel de logro	Descripción
91-100	Superior	El estudiante identifica claramente situaciones de probabilidad condicional (C1), utiliza el modelo de probabilidad condicional (C18) e interpreta el resultado dependiendo del sistema de representación (C10)
80-90	Alto	El estudiante identifica situaciones de probabilidad condicional (C1) y utiliza el modelo de probabilidad condicional (C18), pero incurre en errores menores al hacer cálculos erróneos en operaciones aritméticas (E10)
65-79	Básico	El estudiante identifica algunas situaciones de probabilidad condicional (C1) y emplea el modelo (C18). Pero incurre en errores como escoger el espacio muestral incorrecto, sin tener en cuenta el condicionante (E4), confundir el evento condicionante con el condicionado (E2) que lo lleva a obtener soluciones incoherentes en relación con el contexto de la situación (E30)
Menos de 65	Bajo	El estudiante emplea probabilidad simple (E1), la probabilidad de la intersección (E6) o confunde las probabilidad de $P(A B)$ con $P\left(\frac{A}{B}\right)$ (E3), cuando se debe utilizar la probabilidad condicionada (E1)

1.3. Tareas de aprendizaje

La revisión de las respuestas dadas por los estudiantes en cada una de las tareas de aprendizaje nos permite determinar el nivel de activación de los criterios de logro. Esta activación se establece en los siguientes niveles: total, parcial o nula. Si el nivel de activación de los criterios de logro no es total en el desarrollo de las tareas, recibimos información sobre los errores en los cuales están incurriendo los estudiantes. Esta información nos permite identificar por qué, en algunos casos, no se llega a solucionar las preguntas planteadas o por qué, aunque se llegue a alguna solución, no se alcanzan algunas de las expectativas planteadas, por ejemplo, en aquellos casos en que los estudiantes llegan a una respuesta correcta valiéndose de algunas representaciones sin hacer uso del modelo de la probabilidad condicional.

Cada uno de los puntos de las tareas de aprendizaje están asociados a unos errores y unas capacidades específicas. Esto nos permite determinar la

idoneidad del diseño de la unidad didáctica, al establecer en qué medida el diseño contribuye a que los estudiantes activen los criterios de logro y superen los errores detectados. De esta forma, podemos comparar y establecer la coherencia entre las previsiones hechas y lo sucedido en la implementación.

2. Diario del profesor y del estudiante y el sistema ACE

Describimos el diario del profesor, el diario del estudiante y el sistema ACE, como instrumentos de recolección de información de nuestra unidad didáctica.

2.1. *Diario del profesor*

El diario del profesor es un instrumento que permite la recolección de información durante la implementación de una tarea de aprendizaje. La información registrada en este diario corresponde principalmente a tres aspectos: cognitivo, afectivo y logístico (acciones realizadas y por realizar). El diario está compuesto por un grafo de criterios de logro, un matematógrafo y un espacio para el registro de pequeñas notas de clase (véase anexo 10). En el grafo de los criterios de logro, el profesor registra sus apreciaciones correspondientes al aspecto cognitivo, al asignar una valoración según considere que existe una activación total, parcial o nula de cada uno de los criterios de logro. El grafo cuenta con un pequeño círculo en cada criterio de logro que el profesor colorea con verde, amarillo o rojo según sea la impresión general del grupo (total, parcial y nula, respectivamente).

El matematógrafo permite registrar las observaciones del profesor con respecto a los aspectos de la dimensión afectiva del grupo en general. Este instrumento está compuesto por seis ítems entre los que se encuentran por ejemplo “el tema de la tarea les pareció interesante y les generó curiosidad” o “la tarea los llevó a interactuar con sus compañeros”. Cada aspecto se relaciona en una columna conformada por cinco caras que muestran en su expresión un grado de satisfacción, siendo la primera el nivel más bajo y la última el más alto. El profesor registra las observaciones correspondientes a cada uno de los seis aspectos propuestos por el instrumento. Por ejemplo, si durante el desarrollo de la tarea se observa una buena interacción de los estudiantes, el profesor asignará una valoración alta en este aspecto, al marcar, en la columna que corresponde a este ítem, alguna de las caras dispuestas en la parte alta de la columna. Por último, el formato tiene un espacio en el cual el profesor escribe las acciones ejecutadas y acciones por ejecutar para

las siguientes sesiones. Cada uno de los registros que hace el profesor en su diario corresponde a la observación global del grupo. Según las interacciones surgidas durante la implementación, el docente valora el trabajo del grupo y no lo hace estudiante por estudiante.

2.2. Diario del estudiante

El diario del estudiante es un instrumento diseñado para la recolección de información de cada una de las tareas de aprendizaje (véase anexo 11). Al igual que el diario del profesor, este instrumento se enfoca en tres aspectos: cognitivo, afectivo y logístico. El formato es diligenciado por cada uno de los estudiantes. Esto permite obtener una información individual. En el diario del estudiante, también se considera el uso del semáforo (verde, amarillo, rojo) para el caso de los criterios de logro y el matematógrafo para los aspectos que afectan la motivación. Por último, el formato tiene un espacio para que cada estudiante escriba las dificultades que se le presentaron en el desarrollo de cada una de las tareas.

2.3. Sistema ACE

El sistema ACE está formado por un grupo de libros en Excel, para el registro y análisis de la información obtenida con los instrumentos que hemos descrito. El sistema ACE es muy útil para el docente, ya que permite resumir y obtener indicadores concretos a partir de la información que surge de las correcciones de las tareas, de los diarios del profesor y del estudiante. Registramos inicialmente en el sistema ACE la información y ponderación de las expectativas (cognitivas y afectivas) y de los errores para cada uno de los objetivos. Después, introducimos los datos que resultan de la revisión de los instrumentos de recolección. A partir de las tareas, el examen final y los diarios, determinamos el nivel de activación de los criterios de logro y los codificamos en tres valores 0,1 o 2, según sea una activación nula, parcial o total, respectivamente. Para codificar la información de los matematógrafos, utilizamos una escala de cero a cinco. A partir de esta información, el sistema ACE produce unos indicadores que nos permiten determinar el nivel de contribución de las tareas a las expectativas afectivas, a las capacidades matemáticas fundamentales y a los procesos matemáticos, ya que dependen de la activación de los criterios de logro. Para esto último, previamente habíamos relacionado los diferentes criterios de logro y cada una de las expectativas.

5. Implementación

Evaluamos los conocimientos previos con la tarea diagnóstica y, a partir de estos resultados, aplicamos las ayudas pertinentes para abordar los errores en los que más incurrieron los estudiantes. Luego, aplicamos las seis tareas de aprendizaje con sus respectivos diarios del estudiante y del profesor. Estos instrumentos nos permitieron obtener información sobre los resultados cognitivos y afectivos para la realimentación de cada sesión. Finalmente, evaluamos el logro de las expectativas de aprendizaje individualmente sobre el tema de probabilidad condicional con el examen final. No obstante, durante la implementación, realizamos algunas modificaciones puntuales a la secuencia de tareas que describimos en el apartado de diseño. A continuación, describimos las sesiones en las que hubo modificaciones.

En la sesión 1, implementamos la tarea diagnóstica y observamos que, por las características académicas de los estudiantes y los requisitos de la tarea, no era conveniente incluir las técnicas de conteo. Por esta razón, en el numeral 2 de la tarea diagnóstica, vimos la necesidad de explicar combinatoria para que los estudiantes terminaran la situación planteada. Esta situación indagaba sobre espacio muestral, probabilidad simple y el paso de porcentajes a decimales. A su vez, con la tarea diagnóstica, pretendíamos que cada numeral condujera al estudiante a utilizar un determinado sistema de representación. Sin embargo, muy pocos estudiantes los utilizaron y no obtuvimos información sobre las dificultades o los errores que presentaban al abordarlos.

En la sesión 2, implementamos las ayudas para que los estudiantes identificaran los sistemas de representación propuestos para el tema de probabilidad condicional. Sin embargo, percibimos que las ayudas proporcionadas hubieran sido más fructíferas si la tarea diagnóstica nos hubiera brindado información sobre errores puntuales de cada sistema de representación. A su vez, implementamos una ayuda para reforzar las nociones de probabilidad simple que no consideramos inicialmente. Esta ayuda se aplicó a grupos de tres estudiantes y consistió en retomar diez preguntas liberadas de las pruebas PISA 2012. Los estudiantes debían resolver cada pregunta, cambiarla cada cinco minutos hasta completar las diez y finalmente poner en común las respuestas.

En la sesión 4, la formulación de la tarea Buses no resultó lo suficientemente clara para los estudiantes. Esto se hizo evidente en las pocas estrategias en el trabajo individual. Por esta razón, incrementamos el tiempo en el trabajo grupal y en la puesta en común. Sin embargo, los estudiantes no utilizaron los sistemas de representación previstos sino que se limitaron a listados,

pictogramas y representaciones numéricas, que finalmente no contribuyeron a la utilización del modelo.

En la sesión 6, en la implementación de la tarea Intereses académicos, ajustamos la formulación de la primera pregunta: ¿cómo representarías de mejor manera la información recogida? Hicimos este ajuste porque los estudiantes consideraban que los listados o las tablas eran más convenientes por la facilidad en la elaboración. Intervenimos para que los estudiantes determinaran que un sistema de representación es más apropiado en la medida en que permite visualizar y analizar los datos con mayor eficacia y eficiencia.

En la sesión 8, realizamos un ajuste a la tarea Matemáticas RFK porque contenía cinco propuestas que activaban diferentes caminos de aprendizaje. Realizamos una presentación con todas las propuestas para que cada grupo eligiera solo una para hacer su respectivo análisis. No obstante, estas propuestas generaron discusiones relevantes que se extendieron, y, por tanto, el tiempo de la sesión no alcanzó. Por ejemplo, el problema de Monty Hall originó polémica en relación con el cambio de variable. Esto no permitió que se abordara completamente en la sesión correspondiente y que se tuviera que retomar en la siguiente clase. La consecuencia fue que el interés de los estudiantes y la participación se redujeron.

En todas las sesiones, incluyendo las que fueron descritas anteriormente, realizamos ajustes en la temporalidad, al destinar una sesión para cada tarea. También realizamos ajustes en la formulación de las tareas para la consolidación de la guía de trabajo que se les entregó a los estudiantes (véase anexo 12). Aunque no modificamos la esencia de las tareas, fue necesario separar algunas de las preguntas para hacer más específicos algunos interrogantes o generar preguntas cerradas y así poder facilitar el posterior proceso del análisis de los resultados.

Los formatos de recolección de la información fueron bien logrados desde el principio, pero, en el desarrollo de las primeras sesiones y debido a las interacciones normales de las situaciones del aula, requerimos un protocolo para recibir los formatos de los estudiantes. Es decir, establecimos que, antes de empezar a diligenciar los formatos, los estudiantes debían marcar las hojas y escribir en la esquina superior derecha el número de lista, numeración que se tenía en cuenta para la recolección y entrega de los formatos. Esta estrategia facilitó y optimizó el trabajo en las sesiones posteriores.

En relación con el sistema de evaluación, realizamos una sensibilización con los estudiantes porque inicialmente tendían a llenar los semáforos en verde, debido a que consideraban que su nota dependía directamente de la

evaluación que hacían en el formato. Los estudiantes no consideraban que el diligenciamiento del formato fuera útil para el control autónomo del proceso de cada uno.

6. Evaluación del diseño y la implementación

A continuación, presentamos el análisis e interpretación de los resultados obtenidos con el sistema ACE. Para la recolección de esta información, tuvimos en cuenta la corrección de las tareas, la corrección del examen final, y la información que proporcionaron los diarios del profesor y del estudiante. Presentamos la evaluación del desarrollo de la dimensión cognitiva, la evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva y el análisis de la enseñanza, y los ajustes y mejoras que realizamos a la unidad didáctica después del análisis de los resultados. Presentamos en el anexo 13 todos los resultados obtenidos como producto del análisis en el sistema ACE.

1. Dimensión cognitiva

En este apartado, presentamos los resultados obtenidos en relación con el desarrollo de las expectativas de nivel superior y el logro de los objetivos.

1.1. Desarrollo de las expectativas de nivel superior

En este apartado, describimos la contribución de la unidad didáctica a las capacidades matemáticas fundamentales y a los procesos matemáticos. Para ello, partimos de la activación de los criterios de logro y su relación con las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos.

Diseñamos cada uno de los objetivos para aportar en mayor medida a un proceso matemático sin dejar de lado los otros dos procesos. El objetivo 1 contribuye en mayor medida al proceso matemático de formular, el objetivo 2 al proceso matemático de emplear y el objetivo 3 al proceso matemático de interpretar. En la tabla 7, mostramos la contribución de las tareas de aprendizaje a los procesos matemáticos en términos de los porcentajes obtenidos según la activación de criterios en cada objetivo. En el objetivo 1, los criterios relacionados con reconocer y organizar la información tienen las más altas activaciones. Estos criterios de logro están relacionados con el proceso de formular. En el objetivo 2, el proceso matemático de emplear no obtuvo la mayor activación; sin embargo, observamos que los criterios de logro

relacionados con este proceso matemático tienen una activación más alta en comparación con la activación que se logró con las tareas del objetivo 1. Los criterios de logro que tuvieron una alta activación en las tareas de este objetivo están relacionados con organizar los datos del problema, distinguir el evento condicionante y condicionado, y elegir un sistema de representación. Con respecto a los sistemas de representación, se resaltan con una valoración alta los criterios que corresponden a ubicar los datos en una tabla para identificar las intersecciones de eventos y espacios muestrales relativos a la situación, y utilizar un diagrama de Venn para representar los eventos condicionante y condicionado e identificar los espacios muestrales. En el objetivo 3, el proceso que tuvo mayor activación fue el de interpretar.

Tabla 7

Contribución de las tareas de aprendizaje a los procesos matemáticos

Proceso matemático	Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3
Formular	76,8	69,8	68,7
Emplear	11,7	54,8	67,2
Interpretar	29,2	60,7	72,6

En la tabla 8, presentamos la contribución de las tareas a las capacidades matemáticas fundamentales. Observamos que las tareas de los objetivos 1 y 2 contribuyeron significativamente al desarrollo de la capacidad matemática fundamental de matematización. Las tareas del objetivo 3 contribuyeron a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, comunicación, diseño de estrategias para resolver problemas y utilización de herramientas matemáticas. Estos resultados son coherentes con las capacidades que se pretenden desarrollar en el colegio Robert F. Kennedy: comunicación, modelación y razonamiento. No obstante, los criterios de logro relacionados con interpretar los resultados en la situación dada, leer información suministrada en un sistema de representación y determinar conclusiones a partir de los resultados obtenidos en situaciones de probabilidad condicional tuvieron una activación baja. Los criterios de logro que presentaron una activación baja habían sido relacionados inicialmente con la capacidad matemática fundamental de razonamiento y argumentación. Concluimos que no se contribuyó a esta capacidad matemática fundamental tanto como se esperaba en el diseño inicial.

Tabla 8
Contribución de las tareas a las capacidades matemáticas fundamentales por objetivos

Capacidad matemática fundamental	Porcentaje de activación objetivo 1	Porcentaje de activación objetivo 2	Porcentaje de activación objetivo 3
Diseño de estrategias	40,0%	46,9%	73,5%
Matematización	81,2%	70,6%	54,1%
Comunicación	43,2%	35,9%	67,9%
Razonamiento y argumentación	34,4%	0%	75,1%
Utilización de operaciones y lenguaje simbólico	34,3%	0%	7,6%
Representación	45,5%	33,4%	44,2%
Utilización de herramientas matemáticas	34,4%	0%	74,2%

En la tarea Buses, ningún estudiante activó los criterios de logro “Representa la situación en un diagrama de árbol”, “Representa la situación en un diagrama de Venn”, “Organiza los datos en una tabla de contingencia”, “Calcula probabilidad de los eventos utilizando la razón de probabilidad” y “Formula relaciones entre el resultado obtenido y la situación planteada”. Estos criterios de logro tenían una ponderación del 70% del total. Por tal razón, la tarea Buses contribuyó en menor medida a la consecución de las capacidades matemáticas fundamentales.

1.2. Logro de los objetivos

En la figura 11, mostramos los resultados de la contribución de las tareas al logro de los objetivos. En esa figura, las tareas se identifican como O_i . T_j y la activación de los criterios de logro se representan con AT (total), AP (parcial) y AN (nula). Estos resultados nos muestran que la tarea Picas y fijas presentó la mayor activación total de los criterios de logro correspondientes al objetivo 1. Consideramos que esta alta activación se debió a que la formulación de la tarea, inmersa en un contexto auténtico, permitió a los estudiantes confrontar el saber intuitivo (sabiendo que) y el saber matemático (cambio del espacio muestral). La tarea Buses presentó mayor activación nula para los criterios de logro relacionados con el objetivo 1, ya que los estudiantes no utilizaron ningún sistema de representación para abordar la situación. Al analizar la

activación de los criterios de logro en las tareas del objetivo 2, observamos que la tarea Ejército fue la que tuvo mayor activación total de los criterios de logro. Aunque la tarea Ejército promueve el uso del diagrama de árbol, los estudiantes dedujeron la probabilidad condicional sin hacer uso del modelo. Con respecto al objetivo 3, la tarea El que llegue primero fue la que tuvo menor activación total de los criterios de logro. Esta baja activación se presentó para los criterios de logro relacionados con el uso del modelo de la probabilidad condicional, debido a que los estudiantes calcularon la probabilidad solicitada sin hacer uso del modelo.

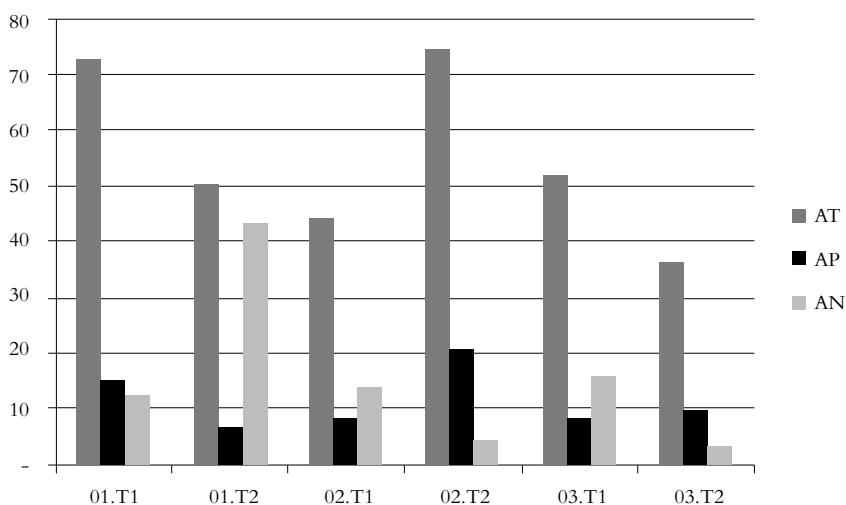


Figura 11. Promedios de activación de las tareas

En la figura 12, observamos con mayor detalle la activación de los criterios de logro correspondientes al objetivo 1. En esa figura, los criterios de logro se identifican con su número y su activación en las tareas con TiAT (total) y TjAN (nula). En las tareas Picas y fijas y Buses, se presentó una mayor activación total en los dos primeros criterios (1.1 y 1.2). Estos criterios están relacionados con identificar la probabilidad condicional y organizar los datos. La Tarea Buses (T2) tiene los mayores porcentajes de activación nula en los dos últimos criterios de logro (1.8 y 1.9) que están relacionados con el cálculo de la probabilidad y la relación entre el resultado y la situación propuesta.

A su vez, vemos que ninguna de las dos tareas activó los criterios de logro 1.3, 1.4 y 1.5 relacionados con los sistemas de representación. Esperábamos que la formulación de la tarea Buses permitiera que los estudiantes modelaran

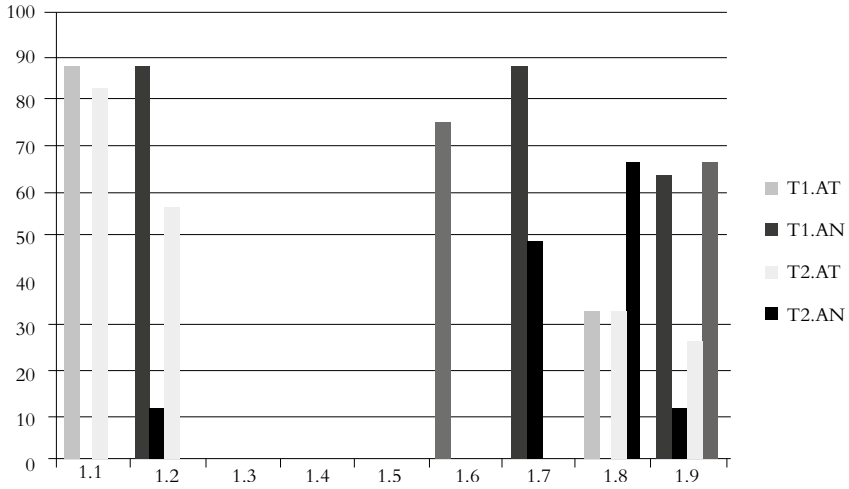


Figura 12. Activación de los criterios de logro del objetivo 1

la situación mediante el uso de diferentes sistemas de representación. Sin embargo, como vemos en la figura 13, la formulación de la tarea no contribuyó a este hecho, como se describió en el capítulo de implementación, pues las estrategias de solución empleadas por los estudiantes fueron muy limitadas, y en su mayoría se vieron restringidas al uso de listados.

Actividad 2: Buses

Diez estudiantes de grado undécimo del colegio Robert. F Kennedy que estaban en una salida pedagógica, se quedaron de los buses de los grados superiores y ahora deben abordar alguno de los buses que quedan. Como no encontraron un bus con los 10 cupos, viajaron repartidos entre 3 buses: el que lleva a los niños de preescolar, el que lleva a los niños de primaria y el de los niños de sexto que tenían 3, 4 y 5 cupos respectivamente.

Teniendo en cuenta únicamente la información suministrada y sabiendo que el bus que lleva a los estudiantes de sexto no se llenó, ¿Cuál es la probabilidad de que sí se llenara el bus de primaria?

Respuesta:

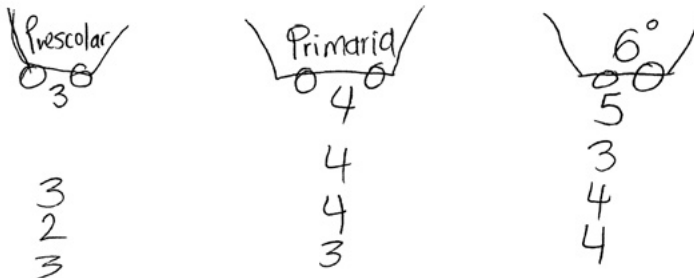


Figura 13. Ejemplo de solución a la tarea Buses

1.3. Limitaciones del aprendizaje

En la figura 14, observamos que E10 y E29 fueron los errores en los que más incurrieron los estudiantes. En esa figura, los errores se identifican como Ei y las tareas como OiTj. Estos errores están relacionados con cálculos mal hechos en operaciones aritméticas y con el cálculo de la probabilidad solicitada. La mayoría de estos errores se presentaron en la tarea Buses del objetivo 1, en los criterios de logro 1.8 y 1.9, correspondientes al cálculo de la probabilidad y relación entre el resultado y la situación planteada. Estos errores impidieron la activación de los caminos de aprendizaje esperados por el grupo, y reflejaron la falta de conexión entre los resultados del sistema de representación y el modelo.

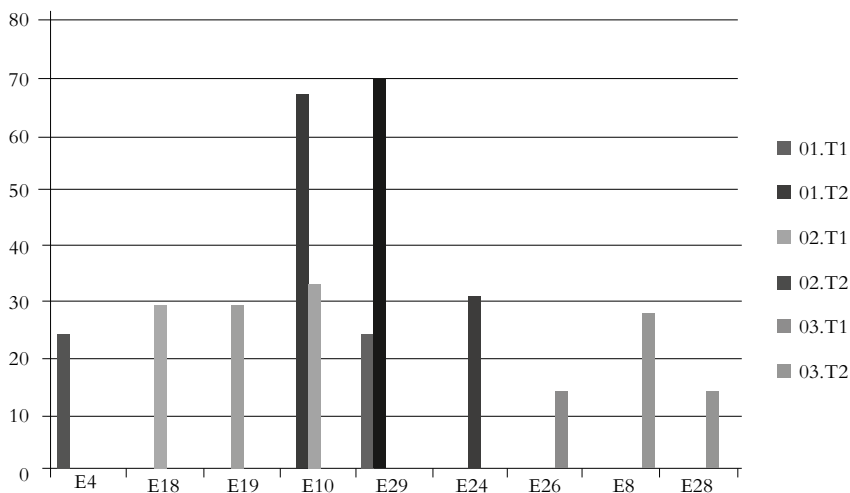


Figura 14. Activación de errores en todas las tareas

En la figura 15, vemos un ejemplo de una solución propuesta por un estudiante para la tarea Buses, en la que el estudiante incurre en varios de los errores previstos. Por ejemplo, incurre en el error E4 al escoger el espacio muestral incorrecto por no reconocer que el evento condicionante reduce las posibilidades que se han de considerar. También se presenta el error E10, al hacer un mal cálculo en operaciones aritméticas para encontrar la probabilidad condicional, pues el estudiante indica que $\frac{3}{4} = 0,5$, lo que evidentemente es un error de tipo aritmético. En consecuencia, tras incurrir en los errores mencionados, el estudiante determina erróneamente la probabilidad solicitada (E29) y obtiene soluciones incoherentes en relación con

el contexto de la situación (E30). Esta cadena de errores tiene origen en la identificación errada de los datos suministrados en la situación planteada, lo que corresponde al error E33.

Primaria = 4
Preescolar = 3

Sexto $5 - 3 = 2$ Puestos Libres

$\frac{3}{4} = 0,5 \rightarrow 50\%$

Figura 15. Ejemplo de solución de la tarea Buses

Análisis similares al descrito anteriormente nos permitieron identificar en las respuestas de los estudiantes los errores en que más se incurrió para cada uno de los objetivos. Para el objetivo 1, los estudiantes incurrieron en errores al hacer un mal cálculo en operaciones aritméticas para encontrar la probabilidad condicional (E10), al determinar erróneamente la probabilidad solicitada (E29), al obtener soluciones incoherentes en relación con el contexto de la situación (E30) y al identificar erróneamente los datos suministrados en la situación planteada (E33). En el objetivo 2, el criterio de logro que presentó una baja activación corresponde al cálculo de la probabilidad condicional haciendo uso del modelo. Esto se relaciona con realizar operaciones aritméticas incorrectamente (E10), confundir la terminología (evento independiente con evento condicionante y evento dependiente con evento condicionado, E24), y representar en diagramas de Venn eventos que no son el condicionante y el condicionado. En el objetivo 3, los estudiantes incurrieron en errores al interpretar incorrectamente los datos suministrados por un sistema de representación (E28) y al obtener soluciones incoherentes en relación con el contexto de la situación (E30). Es necesario resaltar que, al no activarse algunos criterios de logro que están relacionados con el modelo de probabilidad condicional, no se pudo determinar en qué errores incurrieron los estudiantes para estos criterios.

2. Evaluación del desarrollo de la dimensión afectiva

En este apartado, describimos las debilidades y fortalezas relacionadas con las expectativas de tipo afectivo y las debilidades y fortalezas de los aspectos que

afectan la motivación de nuestra unidad didáctica. Tendremos en cuenta el análisis hecho a partir de los datos introducidos e indicadores obtenidos en el sistema ACE, para identificar las mayores y menores activaciones de dichas expectativas.

2.1. Expectativas de tipo afectivo

En la figura 16, observamos que la expectativa que se desarrolló en mayor medida fue la expectativa 1 (“desarrollar interés por la argumentación de resultados en situaciones de la vida diaria que involucren la noción de la probabilidad condicional”). Esta expectativa se activó en mayor medida en el objetivo 1. La expectativa que tuvo menor porcentaje de activación fue la expectativa 2 (“Generar curiosidad por razonar sobre relaciones entre conceptos de la teoría de conjuntos y el modelo de la probabilidad condicional”), ya que, dentro de las previsiones, esta era una de las expectativas con menor número de activaciones dentro de las tareas de cada objetivo. Además, los estudiantes no activaron los criterios de logro relacionados con el uso del modelo.

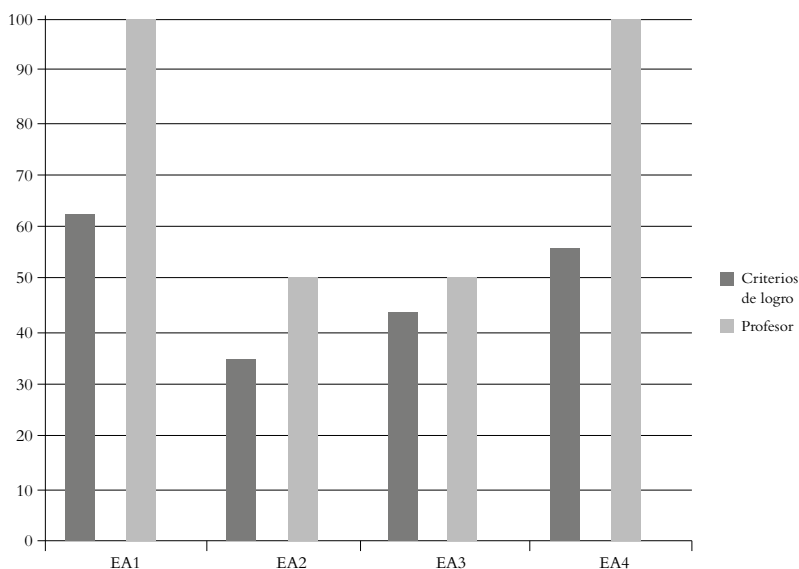


Figura 16. Percepciones de las expectativas afectivas

2.2. Aspectos que afectan la motivación

En la figura 17, mostramos los resultados obtenidos a partir del diario del profesor y del estudiante. Tanto la percepción del estudiante, como la del profesor

son muy similares en todos los ítems a excepción del ítem 4 (“detecté mis errores”). Esta variación depende en gran medida del significado que tiene el error para el profesor y para el estudiante. Los estudiantes entienden el error como la manifestación de un cálculo mal hecho, como una equivocación puntual en un número o un signo, mientras que la visión del docente no se limita al simple señalamiento de estos hechos puntuales sino que también lo entiende como un procedimiento incompleto o fallido. Es allí donde la valoración del docente es un poco más baja que la de los estudiantes. Aun con estas diferencias, tanto el docente como los estudiantes reconocen que los errores presentados por estos últimos desempeñaron un papel fundamental en la consolidación del conocimiento. Esta importancia que se le da al error en las sesiones de clase se refleja en la valoración alta que le ha sido asignada a este aspecto de la motivación.

	Promedio objetivos			Profesor	Estudiantes
Var1	Sabía por qué resolver la tarea	2,67	3,38	ALTA	ALTA
Var2	Sabía como hacerlo	3,40	3,48	ALTA	ALTA
Var3	Tema interesante	3,07	3,40	ALTA	ALTA
Var4	Detecté mis errores	3,23	3,75	ALTA	MUY ALTA
Var5	Fue un reto motivante	3,00	3,35	ALTA	ALTA
Var6	Pude interactuar con los demás	3,90	3,62	MUY ALTA	MUY ALTA

Figura 17. Factores que afectan la motivación

3. Análisis de la enseñanza

En este apartado, presentamos los ajustes y mejoras que realizamos a la propuesta didáctica como consecuencia del análisis realizado anteriormente. Para realizar estos ajustes, establecimos prioridades. Primero, hicimos aquellos cambios que tuvieran mayor repercusión en los demás elementos de la propuesta didáctica. Después, hicimos ajustes menores.

En este sentido, identificamos que es necesario intervenir en mayor medida en aquellos elementos que guardan una relación estrecha con el correcto uso del modelo de la probabilidad condicional y los sistemas de representación. Entendemos que, al potenciar y mejorar estos aspectos, desde sus primeras apariciones, se favorece la disminución de las debilidades relacionadas con las expectativas de tipo afectivo. Por lo tanto, determinamos que los mayores ajustes y cambios deberían hacerse en los aspectos relacionados con el desarrollo de las tareas del objetivo 1, particularmente en la tarea Buses que,

como ya se mostró en el análisis, presentó la mayor activación de errores y la menor activación de criterios de logro.

La tarea Buses no es solo la segunda tarea del objetivo 1; es también la segunda tarea de toda la unidad didáctica y está precedida únicamente por la tarea Picas y fijas, que es una tarea que apela mucho a la intuición de los estudiantes. Con el diseño inicial de la tarea Buses, esperábamos que los estudiantes empezaran a hacer la formalización de la teoría y dilucidaran el uso del modelo. Nuestra intención era buena, pero lamentablemente la formulación de la tarea no permitía que, en efecto, los estudiantes conocieran el modelo y lo relacionaran con una situación de probabilidad condicional (datos mostrados en el análisis de los indicadores de ACE). El principal inconveniente para este objetivo se presentó en la transición de la tarea Picas y fijas a la tarea Buses. Esperábamos que, de manera natural y prácticamente espontánea, los estudiantes dejaran de apelar a la intuición (lo que fue muy importante y un éxito durante la implementación de la tarea Picas y fijas) y establecieran y usaran un modelo matemático que reemplazara el desarrollo meramente intuitivo.

Así las cosas, los cambios en estas tareas están orientados a aprovechar las fortalezas detectadas en la tarea Picas y fijas y mejorar notablemente la tarea Buses para subsanar las debilidades observadas. Para ello, diseñamos algunas preguntas de cierre en la actividad Picas y fijas que permiten establecer una relación más directa entre lo que se ha intuido y lo que se establece en el modelo. Esto permite que los estudiantes no solo usen la fórmula, como ellos la llaman, sino que se haga evidente el porqué de dicha fórmula.

Si bien encontramos que la mayor cantidad de debilidades se relacionan con la formulación de la tarea Buses, vemos que los ajustes necesarios en la tarea previa contribuyen en gran medida a mejorar estas debilidades. En el mismo sentido, los ajustes que se requieren en las otras tareas son puntuales y no requieren modificaciones estructurales de la unidad didáctica. Por último, observamos que las debilidades encontradas en relación con las expectativas afectivas se abordan de manera indirecta al realizar los ajustes a las debilidades de las expectativas cognitivas. Al modificar la formulación de la tarea Buses, pretendemos que el contexto sea auténtico y se convierta en un verdadero reto para los estudiantes, y que se promueva el uso del modelo y de los diferentes sistemas de representación, con lo que esperamos mayores activaciones en los criterios de logro relacionados con la expectativa afectiva 2.

7. Nuevo diseño

En este capítulo, presentamos el nuevo diseño de nuestra unidad didáctica. Consideramos que en este punto hemos brindado información suficiente que permite establecer relaciones entre las tareas de aprendizaje, las expectativas de tipo cognitivo y afectivo, y los instrumentos de recolección de la información, entre otros aspectos que ya han sido tratados en este capítulo. Esto permite entender la naturaleza de los cambios propuestos a la luz de los resultados mencionados en el capítulo anterior.

Constatamos que aspectos como el tema de las matemáticas y los objetivos han sido bien delimitados desde la versión inicial y que, por lo mismo, los criterios de logro, las capacidades matemáticas y los errores que hemos asociado a las tareas están en concordancia con el trabajo propuesto. Por tal razón, las expectativas de aprendizaje, las expectativas de tipo afectivo y los aspectos que afectan la motivación no requieren cambios, al igual que el orden de las tareas y los tres objetivos propuestos en el segundo apartado. Así las cosas, presentamos de manera detallada los cambios efectuados en las tareas del objetivo 1 y explicamos por qué la realización de esos cambios repercute de manera favorable en el diseño de la propuesta didáctica.

Como primera medida, incluimos al final de la tarea Picas y fijas preguntas sobre situaciones del juego. Estas preguntas hacen evidente la reducción del espacio muestral y permiten mostrar de manera numérica el drástico cambio que supone una condición sobre el espacio muestral de un evento. Supongamos que eliminamos la restricción de que un número no puede empezar por cero y que alguien logra “adivinar” el número oculto en la primera oportunidad. ¿Cuál era la probabilidad de que esto ocurriera?

Como contamos con los diez dígitos y el número que se busca es de cuatro cifras, se trata de hacer la permutación $_{10}P_4$, y se puede verificar fácilmente con la calculadora que se trata de 5040 posibilidades. Evidentemente, el espacio muestral es bastante amplio para este primer caso. ¿Qué ocurre si, en alguna de las jugadas, un participante obtiene que ninguno de sus dígitos pertenece al número buscado, es decir que no existen ni Picas ni fijas? Esto nos permite eliminar cuatro dígitos, lo que nos deja ahora con seis elementos para permutar nuevamente en cuatro espacios (360 posibilidades, ${}_6P_4$). La diferencia en el número del espacio muestral no es solo evidente sino que es abismal, pues logramos una reducción de 4680 posibilidades, al establecer una condición sobre el espacio muestral inicial. Pensemos ahora el caso en el que se obtienen cuatro picas, es decir que conocemos con certeza cuatro

dígitos que en efecto están en el número buscado. En este caso, estaríamos hablando de la permutación de ${}_4P_4$, es decir 24 posibilidades, que, comparadas con las 5040 posibilidades al comienzo o las 360 mencionadas, representan una probabilidad más cercana a 1.

Las modificaciones descritas anteriormente pueden ser consultadas en la nueva ficha de tareas (véase anexo 14) en la que se encuentran las formulaciones de las tareas con el nuevo diseño. Veamos ahora la nueva ficha de la tarea Buses en la que explicamos los cambios efectuados.

La tarea Buses ubica al estudiante en una situación de un contexto real que le proporciona algunos condicionantes que debe intentar sortear para llegar a la mejor solución posible dentro de las posibilidades que le permite el contexto. En esta tarea, establecemos el modelo de la probabilidad condicional como consecuencia del desarrollo del trabajo llevado a cabo por los estudiantes. Los requisitos y las metas propuestas desde el diseño inicial permanecen sin mayores modificaciones. Al igual que en la Tarea Picas y fijas, esperamos que el estudiante apele a su sentido común, pero permeado por sus conocimientos previos en relación con la probabilidad simple. Es importante que el estudiante conozca y utilice correctamente tablas, diagramas de árbol, representaciones icónicas o demás métodos que le permitan simular la situación.

En el espacio de discusión, es importante que los estudiantes pongan en juego su capacidad de argumentación y conciliación. Al finalizar las tareas Picas y fijas y Buses, esperamos que los estudiantes identifiquen que la ventaja que les proporciona la información adicional corresponde realmente a un cambio en el espacio muestral. A su vez, esperamos que reconozcan que este cambio del espacio muestral resulta al comparar la intersección de dos eventos con el “nuevo espacio muestral” que proporciona el evento condicionante. Empezamos a perfilar esta situación con los cambios que realizamos al final de la tarea Picas y fijas.

Presentamos, a continuación, la nueva formulación de la tarea Buses, en la que se sigue manejando la situación inicial de diez estudiantes que necesitan abordar tres buses para regresar al colegio. La nueva formulación es la siguiente.

Diez estudiantes de grado undécimo del colegio Robert. F Kennedy, que estaban en una salida pedagógica, se quedaron de los buses de los grados superiores y ahora deben abordar alguno de los buses que quedan para regresar al colegio. Como no encontraron un bus con los diez cupos, viajaron repartidos entre tres buses: el que lleva a los niños de preescolar, el que lleva a los niños de primaria y el de los niños de sexto. Los buses tenían tres, cuatro y cinco cupos, respectivamente.

Inicialmente, pretendíamos que el estudiante resolviera una situación del tipo “sabiendo que ocurrió esto, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra esto otro?”. Sin embargo, decidimos proponerle algunas preguntas que le permitieran establecer que el espacio muestral realmente cambia. Para ello, primero le proponemos realizar un listado de todos los casos posibles en los que los estudiantes pueden abordar los buses. Con el listado, los estudiantes pueden responder a la pregunta ¿de cuántas formas podrían los estudiantes regresar al colegio en los buses disponibles? Pueden además establecer el espacio muestral inicial del problema en el que aún no hay condicionantes.

Posteriormente, introducimos la situación que condiciona el experimento, al plantear que uno de los buses llega al colegio y se verifica que ese bus no llega con el cupo completo. Proponemos al estudiante una situación en la que debe determinar cómo viene uno de los otros tres buses al conocer únicamente el dato del bus que ya llegó. Esta situación se traduce en la pregunta ¿cuál es la probabilidad de que el bus de primaria venga lleno, sabiendo que el bus de sexto no se llenó? Esta era la pregunta que se tenía desde el diseño inicial. En esta nueva versión, presentamos la pregunta central del problema después de preguntas orientadoras como ¿en cuántas de las posibilidades del listado ocurre que el bus de sexto salga sin llenar el cupo? o ¿en cuántas de las posibilidades en las que el bus de primaria sale con el cupo completo ocurrió que el bus de sexto no se llenó?

Después de la formulación de la tarea y de la sesión de preguntas, le presentamos al estudiante un texto en el que se menciona que, tanto en la tarea Picas y fijas, como en la tarea Buses, al contemplar inicialmente todas las posibilidades del listado o todas las posibilidades de elegir un número, se tenía un espacio muestral inicial, pero cuando sabíamos que algunos números se descartaban o que el bus de sexto no venía lleno (información adicional que condiciona el problema), el espacio muestral se reducía. Es decir, que una condición en un experimento aleatorio podría cambiar el espacio muestral. Esta es la idea fundamental para el estudio de la probabilidad condicional.

Con estas modificaciones, los materiales y recursos, el agrupamiento y la temporalidad propuestos en el diseño inicial no cambian. Sin embargo, resaltamos que la comunicación e interacción resulta importante pues el estudiante debe ser asertivo, disuasivo y conciliador en la participación de los grupos, pues nada garantiza que los cuatro estudiantes coincidan en sus respuestas o apreciaciones. De hecho, la argumentación debe tomar un papel preponderante en esta instancia, pues los empates académicos no pueden ser decididos por democracia, teniendo en cuenta que la idea que se debe comunicar al resto

del salón en el momento de la plenaria, debe ser el resultado de la discusión de grupo. En este orden de ideas, si el grupo encuentra igualmente válidas dos posturas y la argumentación en el interior del grupo no ha dirimido este empate académico, en la plenaria deben ser presentadas dichas posturas y comunicar también por qué consideran que las evidencias no son suficientes para tomar una única decisión. Esta dinámica se replicará en el curso y estará mediada por la intervención del docente para ayudar a concretar la conceptualización de la probabilidad condicional y la implementación del modelo.

Finalmente, después de analizar los cambios que hemos efectuado en las tareas, retomamos la tabla 3 de la secuencia global de la unidad didáctica que fue presentada y explicada en un apartado anterior, para comprobar que las relaciones establecidas anteriormente se conservan invariantes, pues los cambios que hemos realizado en las formulaciones de las tareas no implican cambios en la estructura de la unidad didáctica. Se entiende entonces que no hemos realizado modificaciones que afectan el orden en que se presentan las tareas o las relaciones que establecimos entre cada una de las tareas y cada uno de los objetivos. Para ampliar la información de cada una de las tareas o conocer la formulación final, puede consultarse la ficha de tareas final (véase anexo 14).

8. Conclusiones

Nuestra unidad didáctica es un aporte para los profesores que se interesan por el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Nuestra unidad didáctica es una herramienta que permite a nuestros colegas el desarrollo del tema probabilidad condicional con estudiantes de grado undécimo. Es una propuesta que considera contextos cercanos a los estudiantes, al recurrir, por ejemplo, a un juego cotidiano como Picas y fijas que permite que los estudiantes identifiquen de manera intuitiva la noción de probabilidad condicional. En el mismo sentido, contempla el uso de sistemas de representación para lograr un mejor aprendizaje, por medio de tareas que buscan contribuir a las capacidades matemáticas fundamentales y a los procesos matemáticos planteados en PISA 2012. El uso de recursos y materiales permite generar interés en los estudiantes hacia el contenido y contemplar la importancia del modelo matemático en el contenido probabilidad condicional. Nuestra unidad didáctica es un aporte para la problemática que presentan los estudiantes al confundir probabilidad simple con la probabilidad condicional.

La revisión y documentación en torno a la historia de la probabilidad, la fenomenología y los sistemas de representación nos permitió identificar información clave y establecer el análisis de contenido. Con esa información, establecimos que nuestra unidad didáctica se basaría en los conceptos relacionados con la teoría de conjuntos y la probabilidad en términos matemáticos. De igual manera, desarrollamos nuestras tareas de aprendizaje para el tema de probabilidad condicional con base en los fenómenos y sistemas de presentación identificados.

El nivel de detalle que tuvimos en el análisis cognitivo y análisis de instrucción para la elaboración de nuestra unidad didáctica se identifica en aspectos como (a) el diseño de los grafos con los distintos caminos de aprendizaje para la solución de una tarea, (b) el diseño de nuestra tarea diagnóstica y examen final, (b) el uso de materiales concretos para generar interés en nuestros estudiantes, (c) el diseño de las tareas de aprendizaje en contextos cercanos al estudiante (juegos y situaciones cotidianas), (d) la realimentación constante para la mejora de nuestra unidad didáctica en términos de las tareas de aprendizaje, (e) la propuesta de las expectativas de nivel superior y medio con base en los procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales descritas en PISA 2012, y (f) la identificación de las dificultades y errores para nuestra unidad didáctica propuestas desde la teoría de conjuntos, la probabilidad y los sistemas de representación.

Los instrumentos de información y de recolección de información (sistema ACE, tareas de aprendizaje, diario del profesor y diario del estudiante) fueron instrumentos pertinentes para evaluar de manera objetiva nuestra unidad didáctica, tanto desde la perspectiva del aprendizaje como de la enseñanza. Nos dieron argumentos para determinar cuáles fueron los ajustes requeridos y optimizar los resultados de la implementación. Los ajustes se enfocaron en el modelo de probabilidad condicional y en los sistemas de representación.

Observamos, por ejemplo, que el sistema ACE nos permitió identificar las debilidades de la unidad didáctica en relación con el objetivo 1. Inicialmente, pensamos que estas debilidades surgían de la formulación de la segunda tarea asociada a ese objetivo de aprendizaje (Buses). No obstante, al analizar los criterios de logro en los que esa tarea tiene una proporción importante de activaciones nulas y al identificar los errores asociados a esos criterios de logro, constatamos que debíamos abordar estas dificultades en la primera tarea de la unidad didáctica (Picas y fijas). Consideramos que los cambios que realizamos en esta tarea permitirán que los estudiantes activen adecuadamente los criterios de logro de la tarea Buses en los que manifestaron dificultades.

Este tipo de modificación del diseño de la unidad didáctica pone de manifiesto dos cuestiones. En primer lugar, muestra cómo el sistema ACE permite tener en cuenta la relación entre las tareas que contribuyen a un objetivo de aprendizaje para mejorar su diseño de manera coordinada. En segundo lugar, destaca la importancia de usar la evaluación (es decir, los instrumentos de recolección, registro y análisis de la información que surgió de la implementación) para mejorar la enseñanza y, de esa manera, contribuir al aprendizaje de los estudiantes.

Para terminar, consideramos que MAD es un programa en el que todas las actividades que desarrollamos van enfocadas al desarrollo de nuestra unidad didáctica. Consideramos que nuestros profesores nos guían durante todo el proceso para la mejora de nuestro aprendizaje. Haber estado en MAD nos dio una visión diferente de nuestra profesión. Hoy en día, sabemos que nuestra misión no se enfoca en la exclusividad de la enseñanza de las matemáticas. Podemos decir, que nosotros enseñamos, pero también formamos. Formamos individuos matemáticamente cultos para entender el mundo que nos rodea a partir de las matemáticas. MAD es un programa que nos enseñó a trabajar en equipo, a comprender las ideas de otro, a recibir sugerencias de colegas para mejorar nuestros escritos, y por supuesto, a reconocer que la vocación requiere compromisos como indagadores y como profesionales.

9. Referencias

- Batanero, C. y Godino, J. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada (España). Disponible en <https://goo.gl/5RRVpa>.
- Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Colegio Robert F. Kennedy. (2013). *PEI. Comunicación, liderazgo y convivencia, como factores de cambio*. Bogotá: documento de trabajo.
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada (España): Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>.

- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Kaput, J. J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). Nueva York: Macmillan.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*. Descargado el 30/1/2014, de <https://goo.gl/Xwmerl>.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Lonjedo, M. A. y Huerta, P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional: Su influencia en el proceso de resolución del problema. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 261-269). Alicante.
- Roca, A. E., Batanero, C. D. y de la Fuente, E. I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En *Investigación en Educación Matemática: Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Huesca, 6-9 de septiembre de 2006 (pp. 277-284): Instituto de Estudios Altoaragoneses.
- Romero, I. y Gómez, P. (2018). Análisis de actuación. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Bogotá: Universidad de los Andes.

10. Anexos

A continuación, presentamos el índice de los anexos que complementan la información del documento de la unidad didáctica del tema de probabilidad condicional. Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8705/>.

Anexo 1. Plan de Matemáticas

Contiene la descripción de la malla curricular del área de Matemáticas del colegio Robert F Kennedy.

Anexo 2. Conocimientos previos

Listado de los conocimientos previos previstos para la unidad didáctica.

Anexo 3. Listado de capacidades

Contiene el listado de las capacidades previstas para el tema de probabilidad condicional.

Anexo 4. Listado de dificultades y errores

Contiene el listado de dificultades y sus errores asociados para el tema de probabilidad condicional.

Anexo 5. Caracterización de los objetivos

Contiene la caracterización de los objetivos 2 y 3.

Anexo 6. Contribución a las tareas

Contiene la contribución de las tareas a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Anexo 7. Fichas de tarea del diseño previo

Contiene las fichas de tareas, versión inicial.

Anexo 8. Tarea diagnóstica

Diseño de la tarea diagnóstica.

Anexo 9. Examen final

Diseño del examen final.

Anexo 10. Diarios del profesor

Presenta los diarios del profesor para las seis tareas de aprendizaje.

Anexo 11. Diarios del estudiante

Presenta los diarios del estudiante para las seis tareas de aprendizaje.

Anexo 12. Fichas de tareas finales

Contiene la descripción detallada del nuevo diseño de las fichas de tareas.

Anexo 13. Sistema ACE

Este enlace contiene las hojas de cálculo con la codificación y datos de la implementación de la unidad didáctica.

Anexo 14. Tareas de aprendizaje

Contiene la descripción detallada del diseño previo de las de tareas de aprendizaje.