

## CAPÍTULO 8

### PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

CAROLINA ÁVILA, HÉCTOR BARRETO, CARLOS OLARTE,  
YULI PACHÓN Y ÓSCAR BECERRA

#### 1. Introducción y formulación inicial del problema

En este documento, presentamos el informe final de nuestro trabajo en la Maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Exponemos el diseño, implementación y evaluación de nuestra unidad didáctica como una alternativa para solucionar problemas contextualizados que involucren el principio de multiplicación. Este tema forma parte de la enseñanza del análisis combinatorio en las matemáticas escolares.

Implementamos la unidad didáctica en el Colegio Nacional Nicolás Esguerra en la jornada de la tarde. La institución es de carácter oficial. Es el único colegio masculino en Bogotá y está ubicado en la localidad de Kennedy. La institución cuenta con tres jornadas, con modalidad académica y ofrece educación básica secundaria y media, organizada por ciclos.

El Proyecto Educativo Institucional (PEI) de la institución se titula “Edificamos futuro”. El plan de área de matemáticas tuvo su última reforma en el año 2008. En esa reforma se incluyeron los ejes conceptuales, el enfoque evaluativo y el formato de los anexos por grado con los contenidos, temas, desempeños, competencias y conocimientos que los estudiantes deben alcanzar y adquirir al finalizar cada uno de los periodos del año escolar.

El tema principio de multiplicación se contempla en los *Estándares básicos de competencias en matemáticas*, específicamente en el pensamiento numérico y sistemas numéricos (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006). El estándar relacionado con el tema es “reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones de conteo” y se encuentra

ubicado en el conjunto de grados de sexto a séptimo (p. 84). De igual manera, el principio de multiplicación está contemplado en el marco conceptual de PISA 2012, en la categoría de contenido relacionado con cantidad, ya que incorporamos la cuantificación de situaciones, en las que los estudiantes interpretan distintas representaciones y utilizan argumentos basados en la cantidad. Además, las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica se enmarcan en los contextos profesionales, personales, científicos y sociales, que fortalecen una estructura significativa que permite desarrollar los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar.

El colegio tiene 116 estudiantes en grado séptimo. El rango de edad está entre 10 y 15 años, con un promedio de 12 años. El porcentaje de deserción es del 16 %, debido a situaciones convivenciales y al cambio de residencia. El 41 % de la población es repitente, de la que el 24 % proviene de otras instituciones.

Implementamos la unidad didáctica en el curso 701. Este curso estaba compuesto por 34 estudiantes entre los 11 y 15 años de edad. El curso tenía doce estudiantes nuevos en la institución, nueve repitentes de séptimo y nueve que cursaron dos veces el grado sexto. Los estudiantes del curso seleccionado se caracterizaban por ser indisciplinados y desinteresados al desarrollar las actividades en clase y las tareas. Además, presentaban dificultades en la solución de operaciones básicas con números naturales.

En la jornada de la tarde, convergen estudiantes de diversas partes de la ciudad cuyos estratos oscilan entre 1 y 3. La modalidad académica ha permitido mantener el nivel superior en las pruebas Saber. Sin embargo, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se basa en la transmisión de conocimientos. Lo anterior nos motivó a escoger este colegio como un ambiente propicio y enriquecedor para nuestra experiencia pedagógica.

Encontramos que los resultados en el área de matemáticas son bajos y que los conceptos de ordenaciones no se incluyen dentro del tema de conteo para el grado séptimo. Además, observamos que los estudiantes no comprenden el concepto de conteo y orden, no distinguen las características relevantes de los problemas y tienen serias dificultades para resolver situaciones que involucran el principio de multiplicación. Ellos poseen la idea de orden y repetición. Esto implica que el conteo de los posibles arreglos de los elementos de un conjunto o entre varios conjuntos se convierte en un problema didáctico. Por lo tanto, detectamos la necesidad de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica que aborde estos problemas. Buscamos propiciar las acciones necesarias para comprender y encontrar todos los casos posibles para contar los arreglos de los elementos de los conjuntos. Además, buscamos el afianzamiento del

aprendizaje del principio de multiplicación, porque contar es una necesidad en la cotidianidad de cualquier persona y es base fundamental para abordar el estudio de cálculo de las probabilidades.

Este documento está dividido en seis apartados que describen el diseño, la implementación y la evaluación de la unidad didáctica. En el segundo apartado, presentamos el análisis didáctico que fundamenta el diseño previo de la unidad didáctica. En el tercer apartado, describimos los instrumentos y procedimientos utilizados para recoger y analizar la información. En el cuarto apartado, realizamos una descripción general de la implementación de la unidad didáctica. En el quinto apartado, presentamos de forma sistemática los resultados y la evaluación de la implementación. En el sexto apartado, describimos el nuevo diseño con motivo de los ajustes de mejora propuestos en la evaluación del diseño y la implementación. Por último, presentamos las conclusiones que surgen de la reflexión de los resultados obtenidos, de los alcances logrados y de las limitaciones encontradas.

## **2. Diseño previo: descripción, fundamentación y justificación**

Presentamos el diseño previo de nuestra unidad didáctica. Basamos este diseño en el modelo del análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 20). En este apartado, presentamos el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción de nuestro tema.

### **1. Análisis de contenido**

A continuación, abordamos el análisis de contenido de acuerdo con la propuesta de Cañadas, Gómez y Pinzón (2018). Realizamos el análisis a partir de la estructura conceptual, los sistemas de representación y las subestructuras y contextos fenomenológicos encontrados para nuestro tema.

#### ***1.1. Estructura conceptual***

La combinatoria se asocia con la teoría de conjuntos: relaciona los elementos de los conjuntos numerables finitos en los que determinamos su cardinal. Las relaciones que se establecen entre los elementos de un conjunto pueden generar un nuevo conjunto conformado por las parejas establecidas por la relación. A partir de las características de los conjuntos que se relacionan,

identificamos las propiedades de sus cardinales. Por ejemplo, cuando los conjuntos tienen el mismo número de elementos, sus cardinales son iguales y se definen como conjuntos equipotentes. Cuando un conjunto tiene menor número de elementos que otro se llama minuspotente. Las técnicas de conteo son herramientas de la combinatoria que permiten contar los diferentes arreglos que se pueden establecer entre los elementos de los conjuntos. La técnica del principio de multiplicación se refiere a la cantidad de arreglos asociados al producto cartesiano de los conjuntos.

El principio de multiplicación en las matemáticas discretas parte del concepto de cardinalidad de conjuntos numerables. La cardinalidad se define como “si  $A$  es un conjunto finito no vacío, designaremos por cardinal de  $A$  al número de elementos que tiene  $A$ , lo notaremos  $n(A)$ ”. A continuación, definimos el principio de multiplicación de la siguiente manera: si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  es una colección de conjuntos numerables, entonces

$$n(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m) = n(A_1) \times n(A_2) \times \dots \times n(A_m)$$

En la figura 1, describimos la estructura conceptual del principio de multiplicación. Los conceptos relevantes están encerrados en óvalos (cardinal, conjuntos y números naturales). Los subtemas están delimitados en rectángulos y los conceptos que se relacionan con cada uno de los subtemas se identifican con rectángulos de doble margen. Describimos esta estructura conceptual en lo que sigue.

#### *Subestructuras del tema*

Identificamos cuatro subestructuras para el principio de multiplicación. Estas subestructuras se relacionan con los cardinales de los conjuntos, diferentes o iguales, o el tipo de ordenaciones que se desea realizar con o sin repetición de elementos. En la figura 1, se pueden observar las subestructuras del principio de multiplicación.

Para determinar el cardinal de un conjunto de arreglos por medio del principio de multiplicación, se requiere identificar los elementos propios de la estructura multiplicativa como son el producto de números naturales cuando los conjuntos tienen cardinal diferente:  $n(B_1) \times n(B_2) \times n(B_3) \times \dots \times n(B_n)$ . Esta subestructura se presenta en el mapa conceptual como  $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$ . Si los conjuntos tienen el mismo cardinal, se emplea la potenciación de números naturales  $n(C_1) = n(C_2) = n(C_3) = n(C_m)$  entonces  $(n(C_1))^m$ .

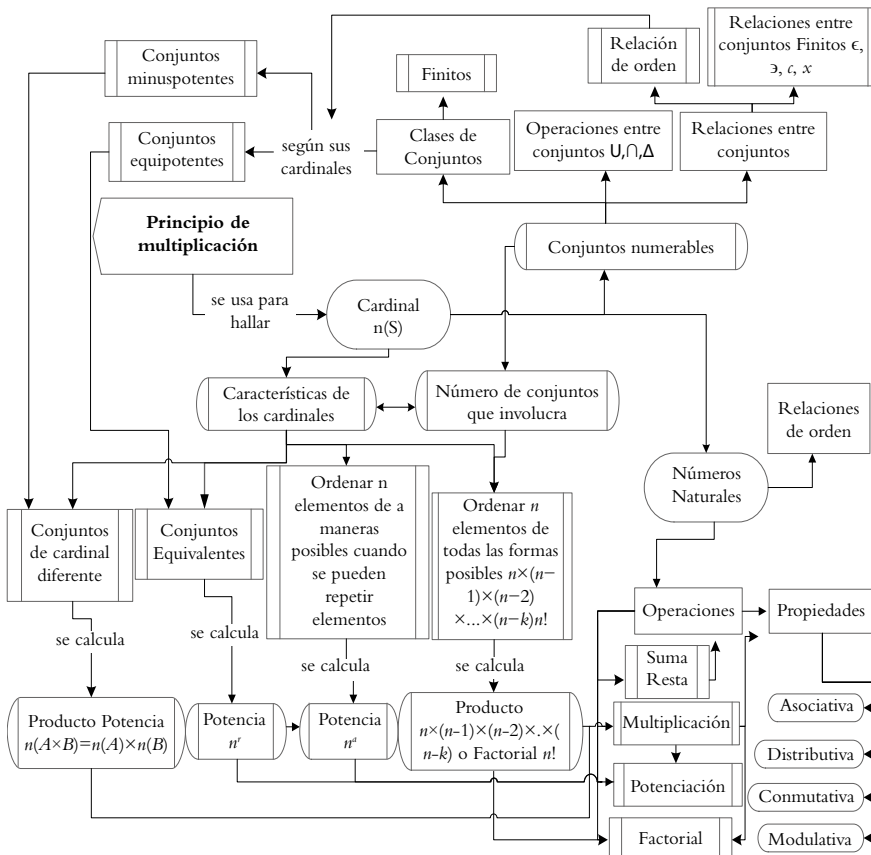


Figura 1. Mapa conceptual de la estructura del principio de multiplicación

En la figura 1, esta característica se presenta como  $n^r$ . Ahora, si los cardinales de los conjuntos son decrecientes y consecutivos, empleamos el concepto de factorial de números naturales  $n(A) \times [n(A) - 1] \times [n(A) - 2] \times \dots [n(A) - m] = n(A)!$ , en el que  $[n(A) - m] = 1$ . Presentamos en la figura 1 esta subestructura como  $n!$ . Si los cardinales de los conjuntos son consecutivos pero no llegan hasta uno, la ubicamos en la subestructura de los conjuntos minuspotentes.

### 1.2. Sistemas de representación

Identificamos cuatro sistemas de representación para nuestro tema. El sistema de representación numérico nos permite expresar los fenómenos por medio de números naturales usando sus propiedades y operaciones. El sistema de representación pictórico nos permite identificar los posibles arreglos presentes

en la situación propuesta por medio de dibujos. El sistema de representación tabular permite mostrar en la tabla de doble entrada todos los posibles arreglos entre los elementos de los conjuntos, identificados en las intersecciones de las filas y las columnas. Finalmente, el sistema de representación gráfico está conformado por el diagrama de árbol, el diagrama sagital y el plano cartesiano. El siguiente ejemplo (figura 2) nos permite ilustrar los sistemas de representación: Rosa posee tres blusas y dos faldas diferentes, ¿de cuántas maneras distintas puede vestirse utilizando las prendas mencionadas?

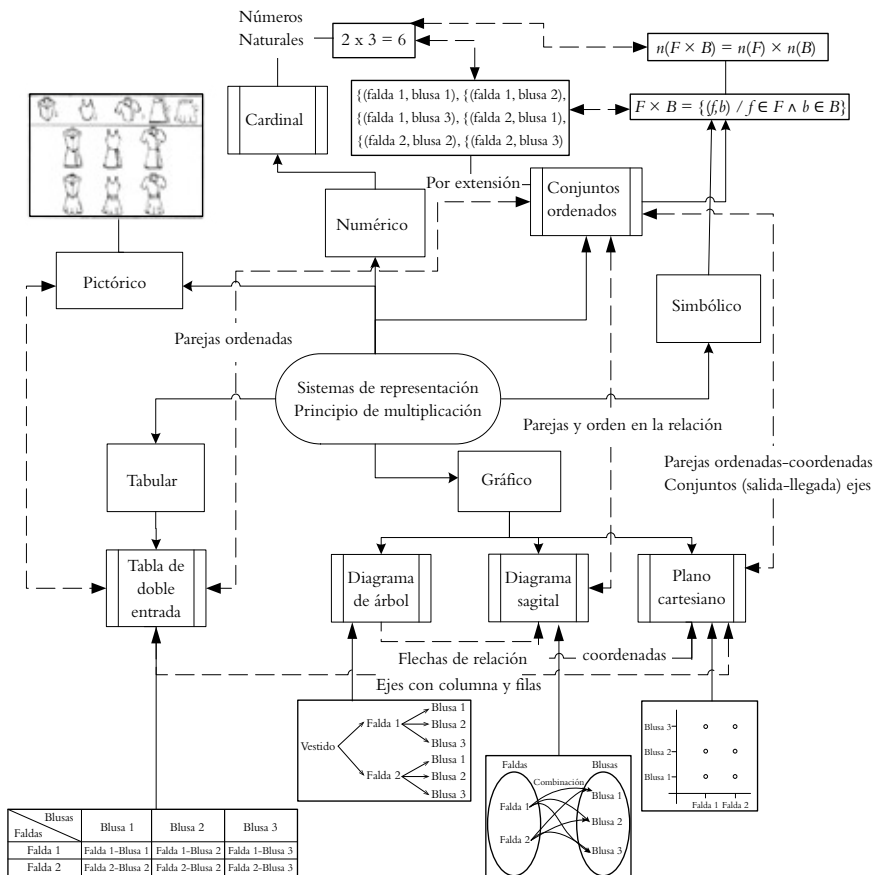


Figura 2. Mapa conceptual de los sistemas de representación

En la figura 2, presentamos el mapa conceptual de los sistemas de representación asociados al principio de multiplicación. Mostramos en un óvalo el tema central; en rectángulos, los diferentes sistemas de representación; en

rectángulos con doble recuadro, las representaciones específicas para cada fenómeno, y las flechas punteadas indican las traducciones entre los sistemas de representación.

### 1.3. Contextos fenomenológicos

El análisis fenomenológico es un procedimiento que permite establecer la relación entre un concepto matemático y los fenómenos que este organiza, con base en las nociones de subestructuras y contextos fenomenológicos, como se describe en Cañadas, Gómez y Pinzón (2018, pp. 92-96). En la figura 3, mostramos las relaciones entre fenómenos, contextos fenomenológicos, los contextos PISA 2012 y las subestructuras, de acuerdo con las características de los cardinales y el número de conjuntos relacionados.

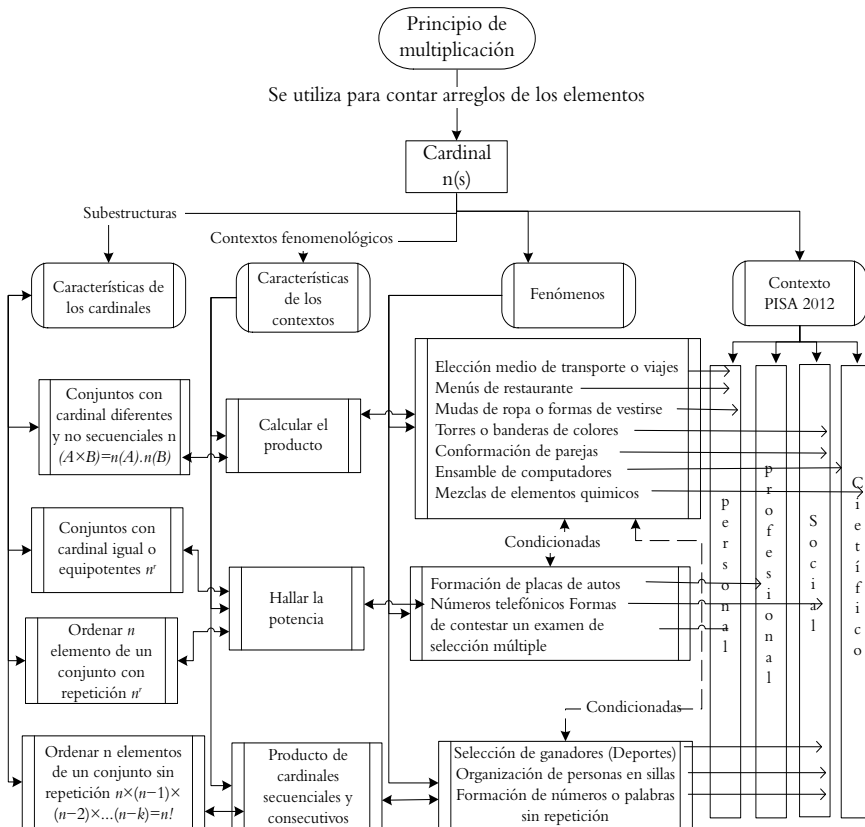


Figura 3. Mapa conceptual del análisis fenomenológico

Los fenómenos se pueden clasificar en los contextos propuestos en PISA 2012 y relacionarlos con una de las cuatro subestructuras del análisis fenomenológico. Si las características del fenómeno están asociadas a la relación entre conjuntos diferentes, se puede ubicar en una de las subestructuras de cardinales diferentes o cardinales iguales. A continuación, presentamos un ejemplo de estas posibles relaciones.

Juan ganó un premio al final del año, que consiste en unas vacaciones con todo pago a uno de tres destinos posibles. Si usa cualquiera de los dos medios de transporte disponibles y viaja acompañado de alguno de sus cinco familiares, ¿cuántas posibilidades diferentes se le presentan a Juan?

Esta situación pertenece al contexto personal, según PISA 2012. Está ubicada en la subestructura de relación entre conjuntos de cardinales diferentes y el número de arreglos se calcula con el producto de los cardinales.

En el análisis fenomenológico del principio de multiplicación, encontramos que los problemas tienen una característica de acuerdo con el cardinal y conforme a esto lo ubicamos en una subestructura. No obstante, si establecemos una condición a ese mismo problema, la característica del cardinal cambia y por ello cambia su ubicación en el contexto fenomenológico y en la subestructura.

## 2. Análisis cognitivo

Presentamos el análisis cognitivo de nuestra unidad didáctica. Para ello, describimos las expectativas de aprendizaje que previmos para la enseñanza del principio de multiplicación. Es decir, presentamos los aprendizajes que esperamos que el estudiante logre con el tema y las previsiones acerca del modo en que el estudiante va a desarrollar ese aprendizaje (González y Gómez, 2018, pp. 120-121).

### 2.1. Expectativas de aprendizaje

Plantemos las expectativas de aprendizaje en tres niveles: superior, medio e inferior. Las expectativas de nivel inferior o capacidades se refieren a las actuaciones de un estudiante con respecto a cierta tarea de tipo rutinario que está asociada a un tema matemático. Las expectativas de nivel medio corresponden a los objetivos de aprendizaje. Las expectativas de nivel superior se refieren a las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos.



*Expectativas de aprendizaje de nivel inferior*

Las expectativas de aprendizaje de nivel inferior hacen referencia a los conocimientos y procedimientos más básicos que el estudiante tiene que aprender a lo largo de nuestra unidad didáctica (Gómez y González, 2018, p. 133). En este apartado, describimos este tipo de expectativas por medio de las capacidades que los estudiantes activarían y los errores asociados a cada una de ellas. Determinamos el listado de capacidades a partir de las tareas prototípicas, definidas como las tareas matemáticas representativas del objetivo (p. 144). Dichas tareas nos permitieron prever diferentes actuaciones de los estudiantes.

A continuación, presentamos algunas capacidades, denotadas por  $C$  y el número correspondiente, que activaría un estudiante al desarrollar una tarea de la unidad didáctica, que involucre la ordenación de los elementos de un conjunto con repetición. El listado de capacidades completo, se puede consultar en el anexo 1<sup>1</sup>.

C37. Reconocer la información implícita en la situación.

C38. Reconocer las implicaciones de un condicionamiento en una situación.

C43. Reconocer la presencia de un solo conjunto en la situación específica.

C44. Identificar los elementos del conjunto que se va a ordenar.

C45. Reconocer las características de la situación para ordenar los elementos del conjunto, en agrupaciones sin repetición de elementos.

C51. Resolver situaciones que involucran el principio de multiplicación sin necesidad de representar los arreglos.

C47. Calcular el producto entre el número de las opciones de cada posición descritas en la situación.

C52. Validar la solución encontrada y la situación.

C53. Razonar sobre la validez de las estrategias y soluciones propuestas.

*Expectativas de aprendizaje de nivel medio*

A continuación, describimos las expectativas de nivel medio de la unidad en tres objetivos de aprendizaje (véase anexo 1).

---

1 Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8706/>.

*Objetivo 1.* Utilizar una o más representaciones (lista de arreglos, diagrama de árbol, diagrama sagital o tabla de doble entrada) y estrategias (enumeración, conteo uno a uno, estrategias aditivas o multiplicativas) que permitan resolver situaciones que involucre el principio de multiplicación.

*Objetivo 2.* Deducir las características generales del principio de multiplicación y plantear expresiones de tipo verbal, simbólica o numérica que las describa.

*Objetivo 3.* Resolver situaciones de conteo utilizando el principio de multiplicación; identificar las características de los conjuntos, los cardinales y las propiedades y relaciones de los números naturales presentes en cada situación; e interpretar y justificar los resultados obtenidos a partir del contexto del problema.

En el objetivo 1, pretendemos que los estudiantes usen los sistemas de representación identificados en el análisis de contenido: el pictórico, el tabular (tabla de doble entrada), gráfico (diagrama de árbol, diagrama sagital y plano cartesiano), los conjuntos ordenados (listado) y el numérico. En el objetivo 2, pretendemos que los estudiantes deduzcan el principio de multiplicación determinado por las características de los cardinales de los conjuntos, la cantidad de conjuntos que intervienen y las relaciones entre dichos cardinales. En el objetivo 3, buscamos que los estudiantes apliquen el principio de multiplicación, reconozcan la subestructura presente en la situación e identifiquen la relación de eventos independientes con cardinales iguales y cardinales diferentes, las ordenaciones de elementos con repetición y las ordenaciones de elementos sin repetición. Caracterizaremos detalladamente estos objetivos de aprendizaje más adelante.

#### *Expectativas de aprendizaje de nivel superior*

En la formulación de las expectativas de aprendizaje de nivel superior, buscamos contribuir a que el estudiante sea matemáticamente competente (MEN, 2006, pp. 48-50). Con el diseño y la implementación de la unidad didáctica, buscamos contribuir especialmente al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de representación, comunicación, y razonamiento y argumentación. También, buscamos contribuir a los procesos matemáticos de formular, emplear e interpretar.

#### *2.2. Caracterización de los objetivos*

A continuación, realizamos la caracterización de los objetivos 1 y 2 de manera general y presentamos la caracterización detallada del objetivo 3. Para ello,

tenemos en cuenta el grafo de criterios de logro, los caminos de aprendizaje que los estudiantes pueden activar para resolver una tarea de aprendizaje y los errores en que pueden incurrir. La descripción detallada de los objetivos 1 y 2 se puede consultar en el anexo 2.

Con la consecución del objetivo 1, pretendemos contribuir al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, comunicación y representación, así como a los procesos matemáticos de formular y emplear. Además, los estudiantes activarán capacidades como interpretar la situación, emplear las representaciones como estrategia de solución, razonar sobre los arreglos representados y su relación con los cuestionamientos de la tarea, comunicar sus argumentos, y llegar a acuerdos con sus pares frente a la interpretación, estrategia de solución y validez de los resultados de la tarea. En la figura 4, presentamos el grafo de los criterios de logro del objetivo 1. Este grafo incluye los errores en que pueden incurrir los estudiantes (denotados en la lista con la letra *E* y su respectivo número, véase anexo 1).

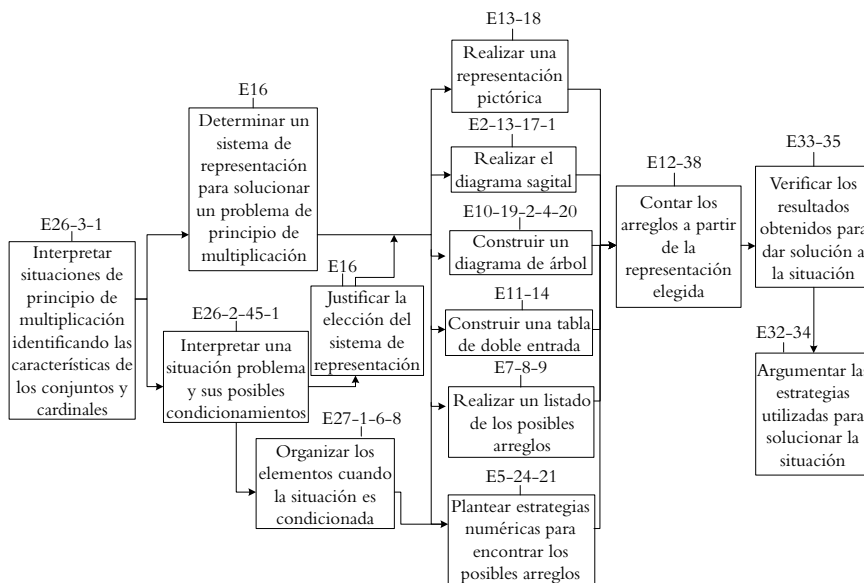


Figura 4. Grafo de los criterios de logro del objetivo 1

Con la consecución del objetivo 2, pretendemos contribuir al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, utilización de operaciones y representación,

así como a los procesos matemáticos de formular e interpretar. Además, esperamos que los estudiantes activen capacidades como interpretar y resolver las diferentes situaciones; emplear un sistema de representación o estrategia numérica para resolverlas; razonar sobre los diferentes arreglos identificados en las representaciones; identificar la relación entre los cardinales (al comprender las características de las subestructuras); expresar esas relaciones en términos numéricos, simbólicos o verbales; realizar operaciones; validar las soluciones; comunicar sus argumentos y llegar a acuerdos sobre la interpretación, y la estrategia de solución y la validez de los resultados de la situación. En la figura 5, presentamos los criterios de logro que pueden activar los estudiantes para resolver las tareas del objetivo 2 y los posibles errores en que pueden incurrir.

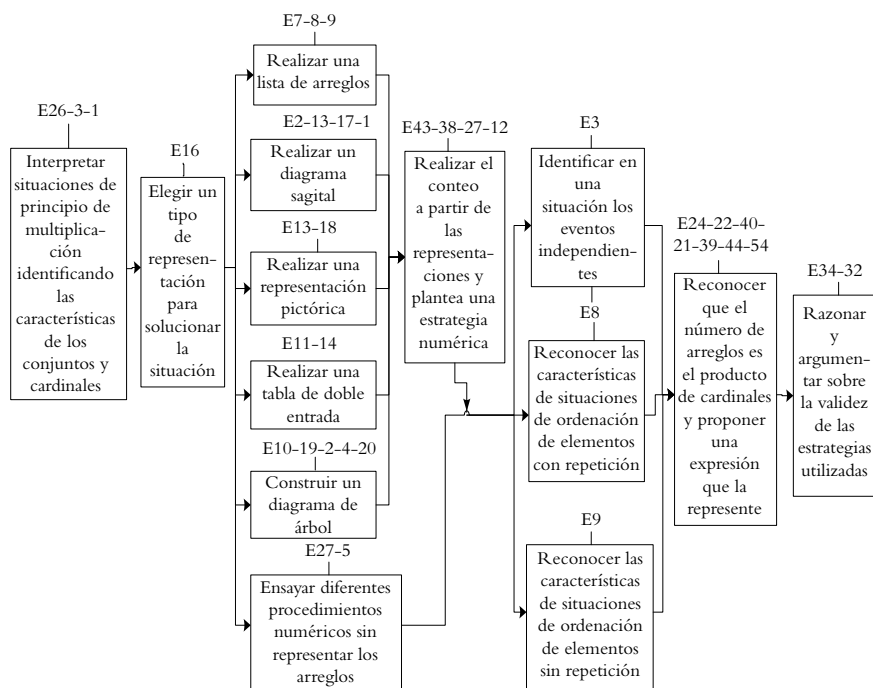


Figura 5. Grafo de los criterios de logro del objetivo 2

Con el objetivo 3, pretendemos contribuir al desarrollo de las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, razonamiento y argumentación, así como a los procesos matemáticos de formular y emplear. Además, esperamos que los estudiantes puedan identificar la relación entre los cardinales (diferenciar las subestructuras).

La situación problema puede involucrar eventos independientes o situaciones condicionadas. Si los eventos son independientes, los estudiantes podrán incurrir en el error de identificar de manera incorrecta los conjuntos propuestos (E3). Si la situación es condicionada, podrán incurrir en el error de interpretar de manera incorrecta los condicionamientos que se plantean en la situación o descartar los elementos que cumplen con las condiciones (E45-1-46). Luego, los estudiantes podrán tomar decisiones frente al reconocimiento de las implicaciones de las condiciones en una situación. Esto les permitirá reconocer las características de la situación para ordenar los elementos del conjunto en agrupaciones con repetición o sin repetición de elementos y podrán incurrir en los errores de ordenar los elementos sin contemplar las condiciones (E8-9). Después de caracterizar la situación, los estudiantes podrán aplicar el principio de multiplicación para hallar el total de arreglos al escoger estrategias (como realizar operaciones para calcular los arreglos por medio de sumas reiteradas) y podrán incurrir en el error de reconocer que el número de arreglos es el producto de los cardinales de los conjuntos y calcularlo (E44) o los errores E24, E22, E40, E21, E39 y E44. Después, pueden identificar la relación entre la multiplicación de números iguales con la potenciación y calcular la potencia. El estudiante podrá incurrir en el error de multiplicar la base por el exponente en la expresión obtenida

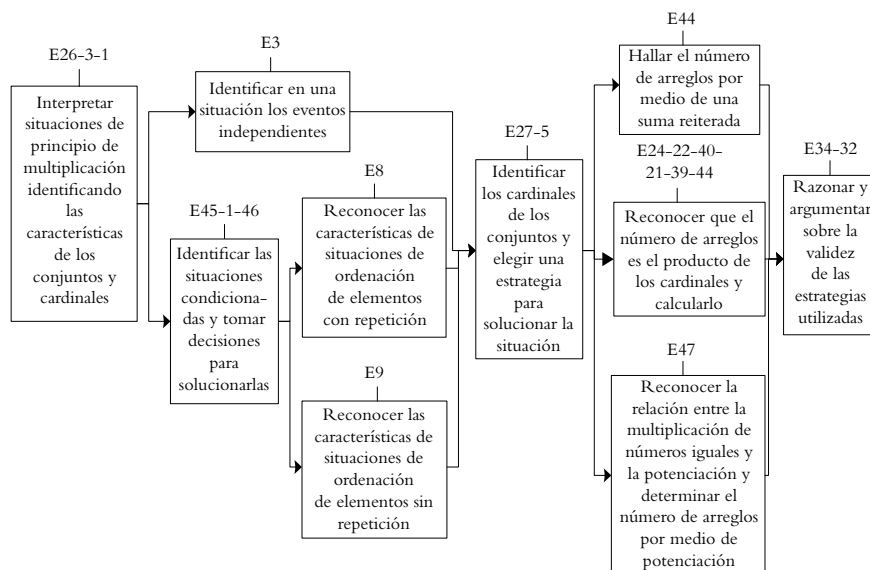


Figura 6. Grafo de los criterios de logro del objetivo 3

(E47). Finalmente, los estudiantes deberán razonar sobre la validez de las soluciones encontradas, comunicar sus argumentos y llegar a acuerdos sobre la interpretación, estrategia de solución y validez de los resultados.

### *2.3. Expectativas de tipo afectivo*

Para el logro de los objetivos propuestos, es necesario contemplar varios aspectos que intervienen en la formación integral de los estudiantes. Uno de estos aspectos está relacionado con las expectativas afectivas que se pueden evidenciar y potenciar en nuestra unidad didáctica. A continuación, enunciamos las expectativas de tipo afectivo propuestas a partir de los tres enfoques: expectativas sobre uno mismo, factores personales intrínsecos y extrínsecos, y el enfoque que entrelaza la motivación y el aprendizaje (González y Gómez, 2018, p. 169).

*EA1.* Adquirir hábitos de trabajo en la resolución de situaciones de conteo.

*EA2.* Manifestar rigurosidad y seguridad en el manejo de los sistemas de representación asociados al principio de multiplicación.

*EA3.* Desarrollar perseverancia en la búsqueda de estrategias para resolver tareas relacionadas con el principio de multiplicación.

*EA4.* Obtener confianza para usar o construir diagramas de árbol, tabla de doble entrada, diagrama sagital, para la solución de situaciones de conteo.

*EA5.* Despertar el interés en mejorar sus explicaciones y justificaciones de sus tareas ante sus compañeros.

*EA6.* Aumentar la curiosidad y el deseo de comunicar de forma sencilla y clara los argumentos de las soluciones efectuadas en los problemas asociados al principio de multiplicación.

En la tabla 1, presentamos las expectativas de tipo afectivo propuestas para nuestra unidad didáctica. Concebimos estas expectativas de tipo afectivo a partir de los tres enfoques teóricos, los enfoques generales y las capacidades matemáticas fundamentales.

Observamos en la tabla 1 que, por ejemplo, la expectativa EA4 está relacionada con el enfoque centrado en las expectativas sobre uno mismo, el enfoque general de desarrollo de autoestima y la capacidad matemática fundamental de representaciones.

Tabla 1  
*Relaciones expectativas de tipo afectivo*

EA	Enfoque			Generales			Capacidades matemáticas fundamentales						
	1	2	3	EG1	EG2	EG3	DRP	M	C	Ra	U	Re	H
1			✓				✓	✓					
2	✓				✓								✓
3			✓		✓		✓						
4	✓				✓								✓
5		✓		✓					✓				
6		✓			✓				✓				

Nota: EA = expectativa afectiva; EG = expectativa general; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas

### 3. Análisis de instrucción

En el análisis de instrucción, nos basamos en la información obtenida en el análisis de contenido y el análisis cognitivo para diseñar, describir, evaluar y modificar las tareas de aprendizaje que utilizaremos en nuestra unidad didáctica. El diseño de las tareas de aprendizaje fue un proceso que iniciamos con la selección de los contextos fenomenológicos y de acuerdo con la caracterización de los estudiantes. Después, nos basamos en la estructura conceptual para fijar las expectativas de aprendizaje. Luego, verificamos que las tareas de aprendizaje contribuyeran a la consecución de los objetivos propuestos. Con toda esta información, empezamos a elaborar versiones preliminares de las tareas. Realizamos modificaciones a las tareas a medida que encontrábamos más elementos que contribuyeran al logro de las expectativas de tipo cognitivo, afectivo y motivacional. A continuación, presentamos la estructura del diseño previo de las tareas de aprendizaje para la unidad didáctica, la organización de las tareas para su implementación y la ficha de la tarea 3.1 Eurocopa.

#### 3.1. Estructura del diseño previo

Para lograr los tres objetivos de aprendizaje propuestos para el tema, diseñamos seis tareas de aprendizaje que abordamos de forma secuencial para construir el concepto de principio de multiplicación. En el anexo 2, describimos detalladamente las tareas de aprendizaje con los siguientes elementos: (a) los

requisitos que debe tener el estudiante para abordar la tarea, (b) las metas que se pretenden alcanzar, (c) la formulación, (d) los materiales y recursos que se necesitan para la implementación, (e) la manera como se agrupan los estudiantes en los diferentes momentos de la implementación, (f) las diferentes interacciones que se presentan entre los estudiantes y el docente, (g) los tiempos de los diferentes momentos de la implementación, (h) un grafo que muestra las previsiones al desarrollar la tarea, e (i) la lista de ayudas para las dificultades que se presenten.

Para el objetivo 1, diseñamos las tareas Diseñar la bandera del curso y Refrigerio. Estas tareas se centran en establecer la cantidad de posibles arreglos utilizando como estrategia de solución un sistema de representación. Para el objetivo 2, planteamos las tareas Parque Mundo Aventura, Barco pirata y La clave del candado. Estas tareas buscan inducir al concepto de principio de multiplicación en situaciones que involucran un solo conjunto, varios conjuntos de diferentes cardinales y conjuntos equipotentes, al igual que la ordenación de elementos de un conjunto sin repetición y establecer la cantidad de arreglos posibles en un solo conjunto con repetición. Para el objetivo 3, diseñamos la tarea Eurocopa que pretende que el estudiante determine la cantidad de posibles arreglos a partir de los cardinales de los conjuntos presentes en la situación y que esté en la capacidad de asociar e implementar modelos matemáticos relacionados con el principio de multiplicación.

Realizamos la implementación de las tareas de aprendizaje en diez sesiones de 110 minutos. En las tres primeras sesiones, implementamos la tarea diagnóstica (anexo 3). En la sesión cuatro y cinco implementamos las tareas Diseñar la bandera del curso y Refrigerios. En las sesiones seis, siete y ocho aplicamos las tareas Parque Mundo Aventura, La clave del candado y Barco pirata. Continuamos, en la sesión nueve, con la tarea Eurocopa y finalizamos en la sesión diez con el examen final. En la tabla 2, describimos la secuencia de tareas.

#### *Contribuciones de las tareas a los objetivos*

Los tres objetivos de aprendizaje que formulamos en la unidad didáctica son secuenciales. En las tareas de aprendizaje del objetivo 1, utilizamos diferentes sistemas de representación como estrategia para encontrar la cantidad de arreglos posibles. En el objetivo 2, presentamos situaciones en las que cada tarea promueve la identificación de las diferentes subestructuras que planteamos para la unidad didáctica. Para el objetivo 3, presentamos situaciones de tipo multiplicativo, en las que el estudiante debe aplicar el principio de multiplicación a partir del análisis de las diferentes subestructuras.



Tabla 2  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
1 2 3		Diagnóstica	En la sesión uno, identificar por medio de animaplanos el manejo de operaciones básicas; en la sesión dos, indagar sobre conjuntos y representaciones; y en la sesión tres, realizar la realimentación y refuerzo de sistemas de representación.	110
4	1	1.1	Usar el sistema de representación pictórico y el listado de arreglos de una situación de conteo para relacionar los conjuntos que intervienen en la situación. También se espera abordar y superar los posibles errores en que pueden incurrir los estudiantes, en el momento de omitir o repetir los diseños de la bandera.	55
5	1	1.2	Interpretar y relacionar la cantidad de elementos de los conjuntos y los arreglos que se pueden determinar, al igual que utilizar los sistemas de representación (pictórico y el diagrama de árbol) para contar el total de arreglos en la situación.	55
6	2	2.1	Deducir las características del principio de multiplicación en conjuntos equipotentes.	60
7	2	2.3	Deducir las características del principio de multiplicación en situaciones que requieren ordenar elementos de un solo conjunto con repetición. Comunicar y validar las posibles soluciones de la situación.	60
9	3	3.1	Determinar la solución de las situaciones que involucran el principio de multiplicación sin utilizar una representación gráfica. Determinar las características de los cardinales que dan los condicionamientos de la situación, al identificar implícitamente las subestructuras que se trabajan y activar las expectativas de tipo afectivo en las que hubo mayor aporte. De igual forma, esperamos que con esta tarea se superen las dificultades asociadas a implementar modelos matemáticos relacionados con el principio de multiplicación.	120
10		Examen final	Indagar sobre el logro de los objetivos de aprendizaje.	110

Nota. T1.1 = Diseñar la bandera del curso; T1.2 = Refrigerio; T2.1 = Parque Mundo Aventura; T2.2 = Barco pirata; T2.3 = La clave del candado; T3.1 = Eurocopa

*Contribución a las expectativas de nivel superior*

En la tabla 3, presentamos la contribución de cada una de las tareas a las expectativas de nivel superior. Luego, realizamos una descripción detallada de la tarea Eurocopa.

Tabla 3

*Contribución de la secuencia de tareas a las expectativas de aprendizaje*

T	DRP			M			C			Ra			U			Re			H		
	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I	F	E	I
Objetivo 1																					
1.1	✓						✓			✓	✓	✓						✓	✓		
1.2	✓						✓	✓										✓	✓		
Objetivo 2																					
2.1		✓		✓			✓					✓			✓			✓		✓	
2.2	✓			✓			✓					✓			✓			✓	✓	✓	
2.3				✓			✓	✓				✓			✓	✓		✓			
Objetivo 3																					
3.1	✓			✓			✓					✓			✓						

Nota. F = formular; E = emplear; I = interpretar y evaluar; DRP = diseño de estrategias para resolver problemas; M = matematización; C = comunicación; Ra = razonamiento y argumentación; U = Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico; Re = representación; H = utilización de herramientas matemáticas; T = tarea; T1.1 = Diseñar la bandera del curso; T1.2= Refrigerio; T2.1 = Parque Mundo Aventura; T2.2 = Barco pirata; T2.3 = La clave del candado; T3.1 = Eurocopa

En la tabla 3, observamos que la tarea de aprendizaje del objetivo 3 contribuye a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, razonamiento y argumentación. De esta manera, fortalece los procesos de formulación y empleo. Con la tarea de aprendizaje Eurocopa, pretendemos que los estudiantes identifiquen las relaciones entre los elementos de los conjuntos, apliquen el principio de multiplicación para solucionarla, razonen las implicaciones de los condicionamientos en la situación, establezcan la validez de sus resultados, comuniquen sus argumentos y lleguen a acuerdos.

*Contribuciones a las expectativas de tipo afectivo*

Con la implementación de materiales, recursos y el aplicativo, buscamos que las tareas cuenten con suficientes herramientas para garantizar su contribución a todas las expectativas de tipo afectivo. Para tal fin, proponemos estrategias como la previsión de identificar y afianzar conocimientos previos, la interacción entre compañeros y docente, la comprobación de resultados entre pares, el empleo de las ayudas para superar las limitaciones y los diferentes agrupamientos entre los compañeros.

Nuestras tareas activan en mayor medida las expectativas de tipo afectivo como manifestar rigurosidad y seguridad en el manejo de los sistemas de representación, desarrollar perseverancia en la búsqueda de estrategias para resolver las tareas de conteo y obtener confianza para usar o construir diagramas de árbol y el listado de arreglos para solucionar situaciones. Por otra parte, presentamos en la tabla 4 el aporte de cada tarea a los aspectos que contribuyen a la motivación del estudiante.

Tabla 4  
*Contribución de las tareas a aspectos de motivación*

Tarea	Demandas cognitivas	Aspectos de motivación			
		Reto	Errores	Interacción	Contexto
1.1	✓	✓	✓	✓	✓
1.2	✓		✓	✓	✓
2.1	✓		✓	✓	✓
2.2	✓		✓	✓	✓
2.3	✓	✓	✓	✓	✓
3.1	✓	✓	✓	✓	✓

Nota. T1.1 = Diseñar la bandera del curso; T1.2 = Refrigerio; T2.1 = Parque Mundo Aventura; T2.2 = Barco pirata; T2.3 = La clave del candado; T3.1 = Eurocopa

Cada una de las tareas de aprendizaje está diseñada en contextos auténticos que permiten a los estudiantes aplicar conocimientos adquiridos con anterioridad y tres de ellas generan un reto o desafío para los estudiantes. Cada una de las tareas cuenta con ayudas para que sean superados los errores en que se pueden incurrir al abordarlas. Las diferentes modificaciones realizadas permiten una interacción continua entre estudiantes y profesor, lo que contribuye a las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos.

### 3.2. Organización de las tareas para la implementación

En la tabla 5, mostramos las relaciones entre los requisitos de cada tarea y las metas de las tareas que el estudiante desarrollaría.

Tabla 5  
Coherencia de las tareas

T	CP	Tareas					
		T1.1	T1.2	T2.1	T2.2	T2.3	T3.1
T1.1	✓						
T1.2	✓						
T2.1		✓	✓				
T2.2		✓	✓	✓			
T2.3		✓	✓	✓			
T3.1				✓	✓	✓	

Nota. CP = conocimientos previos; T1.1 = Diseñar la bandera del curso; T1.2= Refrigerio; T2.1 = Parque Mundo Aventura; T2.2 = Barco pirata; T2.3 = La clave del candado; T3.1 = Eurocopa.

En la tabla 5, podemos observar que, para el desarrollo de las tareas de aprendizaje Diseñar la bandera del curso y Refrigerio, el estudiante necesita de sus conocimientos previos. En las tareas de aprendizaje del objetivo 2, Parque Mundo Aventura, Barco pirata y La clave del candado, es necesario que el estudiante utilice los conceptos abordados en las tareas de aprendizaje del objetivo 1. Finalmente, para abordar la tarea Eurocopa del objetivo 3, es necesario que el estudiante reconozca y diferencie las subestructuras del principio de multiplicación que se trabajaron en las tareas del objetivo 2.

### 3.3. Tarea Eurocopa

A continuación, mostramos la tarea Eurocopa para ejemplificar los elementos utilizados en el diseño de cada una de las tareas de aprendizaje. La tarea Eurocopa se enmarca en una situación de tipo futbolístico. Por tal razón, para desarrollarla se requiere de un conocimiento informal y básico sobre fútbol. En cuanto a la parte matemática, para poder calcular el producto entre los cardinales se deben tener claras las condiciones que intervienen en la situación planteada. Los recursos empleados en la tarea son de fácil comprensión para los estudiantes. Utilizamos fichas en cartulina con representaciones y valores numéricos y computadores para trabajar en una hoja de Excel.

Con la tarea Eurocopa, esperamos que los estudiantes puedan desligar la representación gráfica como única estrategia para la solución de las situaciones que involucran el principio de multiplicación. Además, prevemos que los estudiantes interpreten información implícita de enunciados, identifiquen las características de los cardinales de la situación, reconozcan implícitamente las subestructuras que se plantean y desarrollen las expectativas de tipo afectivo.

### *Formulación de la tarea aprendizaje Eurocopa*

A continuación, presentamos la formulación de la tarea Eurocopa. Para entrar en el detalle de los elementos de la tarea, sugerimos ver el anexo 3.

#### *Tarea 3.1. La Eurocopa 2012*

La Eurocopa es un torneo que se juega entre las mejores selecciones de fútbol de Europa, su última edición fue en el 2012 y participaron los siguientes equipos



Equipos participantes			
Alemania	Francia	Italia	Rep Checa
Croacia	Grecia	Países Bajos	Rusia
Dinamarca	Inglaterra	Polonia	Suecia
España	Irlanda	Portugal	Ucrania

#### Trabajo individual

Responde en la guía las siguientes preguntas.

Cada equipo participante presenta una planilla con 20 jugadores de campo y tres arqueros. Cada selección debe dar a sus jugadores dos uniformes por partido: uno titular y uno alternativo. ¿Cuántos uniformes se entregaron para la primera ronda de la Eurocopa 2012? Justifica tu respuesta.

Cada equipo jugó tres partidos en la primera ronda y, en cada uno de ellos, puede ganar, empatar o perder. ¿Cuál es el total de opciones para los cuatro equipos cabeza de serie? Justifica tu respuesta.

España tiene tres arqueros. Cada uno puede utilizar una camiseta manga larga, manga corta o tres cuartos; puede tener pantalón, pantaloneta larga o pantaloneta corta; y puede elegir para su uniforme un único color: verde, rojo o amarillo. ¿Cuántas posibilidades se tienen para los uniformes de los arqueros de España? Justifica tu respuesta.

#### Puesta en común en gran grupo

Explica a tus compañeros cómo resolviste las preguntas anteriores y cuál fue la respuesta.

*Trabajo en parejas*

Presta atención a la explicación del profesor sobre la labor que tienen los hinchas de Italia. Los hinchas de la selección de Italia hicieron una pancarta con el nombre del país, en la que cada letra tiene la opción de llevar uno de los tres colores representativos de su bandera (verde, blanco, rojo).

Observa las fichas que aparecen en el tablero y según las indicaciones del profesor responde las siguientes preguntas.

¿Cuántas opciones se tienen para pintar las letras de la pancarta? Justifica tu respuesta.

Si no pueden ir dos letras seguidas del mismo color, ¿cuántas opciones se tienen? Justifica tu respuesta.

¿Cuántas opciones de colorear se tiene si en la primera y en la última letra se utiliza el mismo color? Justifica tu respuesta.

¿Cuántas opciones se tienen si las vocales deben ir siempre del mismo color? Justifica tu respuesta.

¿Cuántas opciones de colorear se tiene si solo se pueden utilizar dos colores y no pueden ir dos letras seguidas del mismo color? Justifica tu respuesta.

¿Cuántas opciones de colorear se tiene si la pintura verde solo alcanza para pintar tres letras y no pueden ir dos letras seguidas del mismo color? Justifica tu respuesta.

¿Cuántas opciones de colorear se tiene si también pueden utilizar pintura azul? Justifica tu respuesta.

¿Cuántas opciones de colorear se tienen si utilizamos cuatro colores y la primera letra siempre va de azul? Justifica tu respuesta.

*Trabajo de Excel en parejas*

Abre la hoja de cálculo Eurocopa. Luego, lee las instrucciones e interactúa con ella para responder las siguientes preguntas.

Los goleadores de la Eurocopa fueron Ballotelli, Ronaldo, Dzagoev, Gómez y Torres. ¿De cuántas formas se pueden organizar en fila para tomarles una fotografía para la página de la UEFA?

Si Ronaldo siempre va de primero, ¿cuántas opciones se tienen?

Si Ballotelli quiere ir de último, ¿cuántas opciones se tienen?

*Puesta en común en grupo*

Ahora nos organizamos en mesa redonda para compartir las respuestas a las preguntas de acuerdo con el orden que plantee el profesor.

### 3. Instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información

En la implementación de la unidad didáctica, es primordial observar, recoger y analizar información sobre el aprendizaje de los estudiantes y la enseñanza del profesor. Los instrumentos propuestos para la recolección de información y los procedimientos para analizarla nos permitieron realizar un trabajo dinámico que garantiza la participación de los estudiantes de forma continua y permanente. A continuación, presentamos los instrumentos y los procedimientos que diseñamos para la recolección y análisis de la información que surgió durante la implementación de la unidad didáctica.

#### 1. Instrumentos de recolección de información

Los instrumentos propuestos para recoger la información son el diario del profesor, el diario del estudiante, el registro de desarrollo de tareas, el examen final y el cuestionario final. A continuación, explicaremos con detalle cada uno de ellos.

##### 1.1. *Diario del profesor*

El diario del profesor es un instrumento fundamental para el registro de la información más relevante de los aspectos cognitivos y afectivos, y para la toma de decisiones a partir de esa información (anexo 7). Al finalizar cada sesión de clase, el profesor diligencia el diario de acuerdo con las percepciones que tuvo durante la implementación. El diario del profesor incluye aspectos cognitivos y afectivos.

##### *Aspectos cognitivos*

Respecto a los aspectos cognitivos, el diario del profesor presenta el objetivo al que pertenece la tarea de aprendizaje que se pretende desarrollar en la sesión y el grafo de los criterios de logro de la tarea. Para diligenciar este grafo, utilizamos el sistema de semáforo que consiste en colorear de verde si el criterio se considera logrado y podemos avanzar en el tema, amarillo si todavía existen dudas para alcanzar lo que requiere el criterio de logro y podemos avanzar, pero con precaución, y rojo si existen dificultades generalizadas que impiden avanzar en el tema. En caso de que algún criterio esté

en rojo, definimos cómo trabajarlo en la siguiente tarea y abordarlo con las ayudas correspondientes. Además de lo anterior, el diario del profesor contiene unos recuadros en los que podemos describir las observaciones cualitativas a las etiquetas de color asignadas en el grafo de criterios de logro.

Posteriormente, presentamos una tabla del nivel de consecución de los aspectos cognitivos de la tarea, en la que agrupamos a los estudiantes en tres niveles: total, parcial o nulo. Esta agrupación depende de los indicadores de activación y de los errores y dificultades en los que incurrieron los estudiantes al abordar la tarea. Las observaciones nos proporcionan indicios de la puesta en práctica de la tarea y de las decisiones que se pueden tomar para las próximas sesiones.

#### *Aspectos afectivos*

En el diario del profesor, incluimos una tabla en la que registramos las percepciones de expectativas afectivas a las que apunta la tarea. Esta tabla contiene un espacio para registrar el porcentaje del nivel percibido de consecución de cada expectativa a nivel general de clase y los indicadores de cada expectativa en los niveles Bajo, Medio y Alto. Posteriormente, encontramos el matematógrafo, en el cual registramos nuestras impresiones sobre los factores que influyen en la motivación a partir de la observación en el desarrollo de la tarea.

En el apartado final del diario del profesor, incluimos recuadros en los que registramos las acciones no previstas emprendidas durante la sesión y la toma de decisiones para sesiones posteriores. Realizamos estos registros sobre los aspectos cognitivos y afectivos que afectan las previsiones de la planificación de la tarea. Esto nos permitió realizar ajustes sobre la marcha o para sesiones posteriores.

### *1.2. Diario del estudiante*

Los estudiantes participaron activamente en el proceso de evaluación por medio del diario del estudiante (anexo 6). Con este instrumento, identificamos sus percepciones en los aspectos relacionados con el dominio cognitivo y el dominio afectivo. Al finalizar cada una de las tareas, los estudiantes diligenciaron el semáforo de los criterios de logro y el matematógrafo.

#### *Aspectos cognitivos*

En el diario del estudiante, incluimos el grafo de criterios de logro para cada una de las tareas de aprendizaje y mostramos, con un lenguaje claro, las posibles estrategias que los estudiantes pueden ejecutar para solucionar las situaciones



propuestas. Al igual que en el diario del profesor, en el diario del estudiante, incluimos el grafo de los criterios de logro adaptados para los estudiantes. En la figura 7, mostramos un ejemplo del trabajo realizado por un estudiante al diligenciar la parte cognitiva del diario de la tarea Eurocopa.

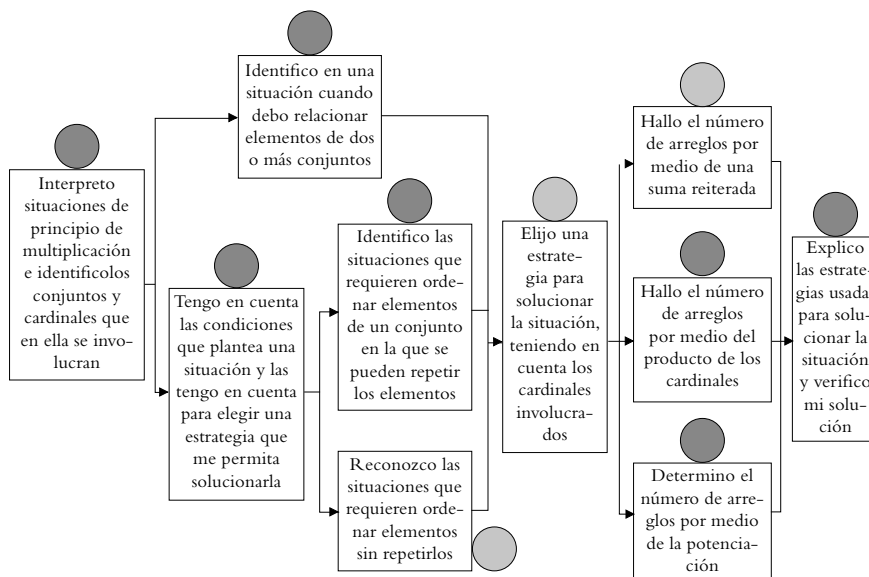


Figura 7. Criterios de logro diligenciado por un estudiante en la tarea Eurocopa

### Aspectos afectivos

En el diario del estudiante, también incluimos el matematógrafo como instrumento para indagar los aspectos que contribuyen a la motivación. Con este instrumento, caracterizamos la adecuación de las tareas a las demandas cognitivas, reto, reacción a los errores, contribución a la interacción, contexto y forma de compartir las metas.

Por su parte, al iniciar cada sesión, los estudiantes compartieron los resultados del matematógrafo diligenciado en la sesión anterior. En la figura 8, mostramos un ejemplo de un diario diligenciado por un estudiante en la parte afectiva para la tarea Eurocopa.

En el dominio afectivo, planteamos una pregunta que nos permitió tomar decisiones frente al diseño previo de las tareas de aprendizaje propuestas. En la figura 9, mostramos la pregunta diligenciada por un estudiante en la tarea Eurocopa.

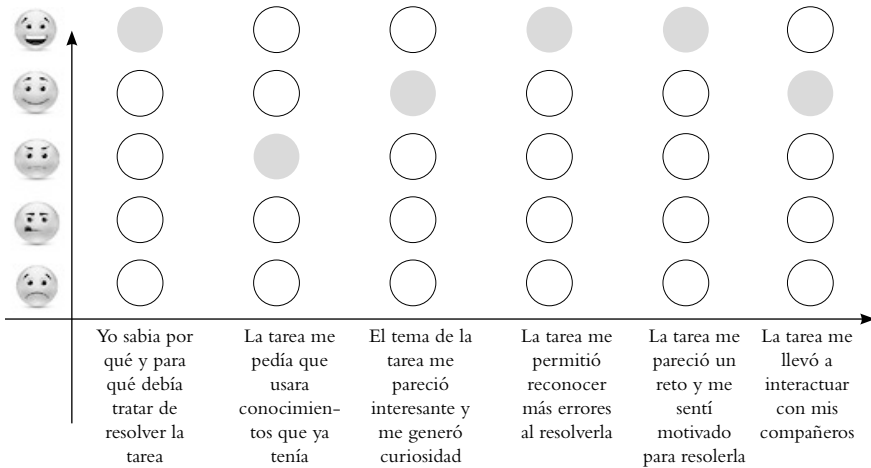


Figura 8. Matematógrafo diligenciado por un estudiante en la tarea Eurocopa

**¿Qué me pareció difícil de la tarea o qué preguntas se me dificultó resolver?**

Organizar los jugadores y uniformes.

Figura 9. Pregunta diligenciada por un estudiante en la tarea Eurocopa

### 1.3. Información y registro del desarrollo de tareas

La producción escrita de los estudiantes en la tarea diagnóstica nos permitió indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes sobre el principio de multiplicación. A partir de ello, propusimos las ayudas adecuadas para la superación de las dificultades (véase anexo 3).

El desarrollo de las tareas de aprendizaje constituye la principal fuente de información para que el profesor pueda analizar el logro de los objetivos de aprendizaje, la contribución de las tareas a las expectativas de aprendizaje, y las dificultades y limitaciones de los estudiantes.

Para valorar y analizar la consecución de logro de los objetivos de aprendizaje y la contribución a las expectativas de nivel superior, tuvimos en cuenta los caminos de aprendizaje utilizados por los estudiantes al resolverlas. Para esto, asignamos a cada criterio de logro activado en la solución de la tarea de aprendizaje un nivel de consecución con la valoración: total, parcial o nulo. Por ejemplo, para analizar la consecución de los criterios de logro del

objetivo 3, nos dimos cuenta de que los estudiantes incurrieron en el error de no identificar algunos datos que se pedía deducir, a partir de la interpretación de información implícita en el contexto de la tarea. Estos errores en que los estudiantes incurrieron nos permitieron valorar los criterios de logro desde el inicio del camino de aprendizaje.

#### *1.4. Examen final*

Para el diseño del examen final, involucramos situaciones en diferentes contextos e indujimos a los estudiantes a escribir los procedimientos y las estrategias de solución utilizadas (anexo 8). Además, les solicitamos realizar las justificaciones y argumentaciones de los resultados encontrados. También tuvimos en cuenta que las situaciones involucraran las subestructuras propuestas para el principio de multiplicación. Los ítems 1, 3, 4, 5 y 6 abordan eventos independientes. En los ítems 7 y 9 presentamos ordenaciones con repetición. Por último, los ítems 2, 8, y 10 abordan ordenaciones sin repetición con algún condicionamiento.

El examen está organizado de manera que se puedan identificar los alcances de los estudiantes en cada uno de los objetivos de aprendizaje de nuestra unidad didáctica. En el objetivo 1, buscamos que los estudiantes utilicen sistemas de representación para identificar el número de los arreglos. Para ello, propusimos los ítems 1, 4 y 6. En el objetivo 2, buscamos que los estudiantes identifiquen las características generales del principio de multiplicación y realicen el planteamiento de expresiones de tipo verbal, simbólica o numérica que las describa. Por tal razón, diseñamos el ítem 10. En el objetivo 3, buscamos que los estudiantes resolvieran situaciones de conteo al utilizar el principio de multiplicación, mediante la interpretación y justificación de los resultados obtenidos a partir del contexto del problema. Los ítems 2, 3, 5, 7, 8 y 9 están enfocados en las anteriores acciones. Para analizar los resultados y corregir el examen final aplicado a los estudiantes, elaboramos una rúbrica en la que establecimos cuatro niveles de logro: Superior, Alto, Básico y Bajo (anexo 7). Para cada uno de estos niveles planteamos unos indicadores que manifiestan en qué medida el estudiante ha avanzado en el logro de los objetivos.

#### *1.5. Cuestionario final*

Después de aplicar, recoger y corregir el examen final, planteamos un cuestionario (véase anexo 8). Esto nos permitió indagar sobre los aspectos cognitivos que se refieren a la consecución de los propósitos, diseño de las tareas,

implementación de las tareas, errores en que incurren los estudiantes y a las ayudas que permitan superar las dificultades. También, indagamos sobre los aspectos afectivos que tienen que ver con la motivación, las expectativas afectivas, y el uso de los materiales y recursos.

## **2. Procedimientos de recolección y análisis de la información**

A continuación, presentamos los procedimientos utilizados para analizar la información recogida en los instrumentos propuestos. El sistema ACE (Análisis y Consecución de Expectativas) y el sistema de evaluación nos permitieron evaluar el proceso de aprendizaje y de enseñanza.

### **2.1. Sistema de análisis ACE**

Para registrar y analizar la información, utilizamos el sistema de análisis ACE. Es un sistema en Excel compuesto por un conjunto de libros (archivos). En este sistema, registramos en un archivo, llamado ACETOS, la información de la corrección de las tareas de aprendizaje y del examen final para cada objetivo. También, registramos la información de los diarios del profesor y los estudiantes en el archivo llamado ACETAM. Por último, el archivo ACLE arroja los resultados de las comparaciones entre la corrección de las tareas y el examen final, junto con los resultados de las percepciones del profesor y de los estudiantes (Marín y Gómez, 2018, p. 312). Presentaremos la descripción detallada de los procedimientos utilizados para analizar la información en el apartado de evaluación del diseño y la implementación.

### **2.2. Sistema de evaluación**

El sistema de evaluación del Colegio Nacional Nicolás Esguerra establece tres competencias para valorar el proceso pedagógico de cada periodo. Cada una de las competencias tiene un porcentaje sobre la nota: 55 % para la competencia cognitiva, 25 % para la competencia procedimental y 20 % para la competencia actitudinal.

Integramos la valoración de la unidad didáctica al sistema de evaluación del colegio en el cuarto periodo académico. El examen final aportó el 15 % a la competencia cognitiva, el desarrollo de las tareas aportó el 10 % a la competencia procedimental y el diario del estudiante el 5 % a la competencia actitudinal.

Incluimos las seis tareas de aprendizaje en la valoración de la competencia procedimental. Las calificamos de 1 a 100 y el promedio de la nota

fue el 10% asignado a esta competencia. El examen final fue evaluado de 1 a 100 y su nota corresponde al 15% de la competencia cognitiva. Por último, evaluamos el diario del estudiante y su puesta en común en la competencia actitudinal. Utilizamos la tarea diagnóstica para indagar sobre los conocimientos previos de los estudiantes y los aspectos por reforzar. La calificación de esta tarea no formó parte de la evaluación de la unidad didáctica. En la tabla 6, presentamos la articulación de la evaluación de la unidad didáctica con los requerimientos de la institución.

Tabla 6  
*Ajuste del sistema de evaluación de la unidad didáctica a los requerimientos del Colegio Nacional Nicolás Esquerro*

Tarea	Nombre	Escala de calificación	Porcentaje	Competencia
	Diagnóstica	0-100	No aplica	
1.1	Diseñar la bandera	0-100		
1.2	Refrigerio	0-100		
2.1	Parque mundo aventura	0-100	10%	Procedimental
2.2	Barco pirata	0-100		
2.3	Candados	0-100		
3.1	Eurocopa	0-100		
	Examen final	0-100	15%	Cognitiva
	Diario del estudiante	0-10	5%	Actitudinal

## 4. Descripción de la implementación

A continuación, describimos brevemente la implementación de la unidad didáctica. El análisis de esta información nos permitió identificar las debilidades y fortalezas del diseño, que utilizamos para establecer mejoras en la versión final.

### 1. Descripción del diseño implementado

Nuestra unidad didáctica contó con una tarea diagnóstica, seis tareas de aprendizaje con sus respectivos diarios del profesor y del estudiante, un examen final y un cuestionario para evaluar la unidad didáctica. La tarea diagnóstica se

dividió en tres partes y se desarrolló en dos sesiones. Las tareas de aprendizaje de los tres objetivos se planearon para ser implementadas una por sesión de clase de 110 minutos (véase anexo 9). Para el objetivo 1, aplicamos dos tareas: Diseñar la bandera del curso y Refrigerio. Para el objetivo 2, aplicamos tres tareas: Parque Mundo Aventura, Barco pirata y La clave del candado. Para el objetivo 3, aplicamos la tarea Eurocopa. Por último, implementamos el examen final en una sesión (véase anexo 4).

## 2. Descripción de la implementación

Implementamos la unidad didáctica de acuerdo con las fechas previstas y la versión de las tareas que presentamos en el diseño previo. Sin embargo, realizamos algunos cambios en relación con los tiempos y las dinámicas de algunas sesiones de clase. A continuación, mencionaremos las mejoras realizadas a la unidad didáctica.

En la tarea diagnóstica, utilizamos dos y no tres sesiones para su aplicación y ajustamos el primer ítem de la segunda parte. También, incluimos ítems que indagaban sobre procedimientos de multiplicaciones con más de cuatro cifras. Ajustamos preguntas en la tarea La clave del candado. Finalmente, por cuestiones de tiempo no alcanzamos a realizar la sesión final ni aplicamos el cuestionario de evaluación de la unidad didáctica.

No realizamos cambios a los instrumentos de recolección de información y sistema de evaluación. Sin embargo, es importante mencionar que, en las primeras sesiones, los estudiantes tuvieron dificultad para diligenciar el diario del estudiante. Esta dificultad se superó con el transcurrir de las tareas. A continuación, realizaremos la descripción del trabajo en cada una de las sesiones de la implementación de la unidad didáctica.

### 2.1. Sesiones 1 y 2

En las sesiones 1 y 2, implementamos la tarea diagnóstica. En la sesión 1, propusimos la actividad de animaplanos. En esta actividad, no se presentaron dificultades y fue motivante para los estudiantes. En la segunda sesión, observamos que para los estudiantes no fue atractivo recortar las figuras y pegarlas, ya que para esta parte de la tarea ellos empleaban más tiempo de lo previsto. Algunos de los estudiantes decidieron escribir los conjuntos a partir de las imágenes que observaban y no utilizar los recortables. Por tal motivo, propusimos un ajuste en la indicación del primer ítem de la segunda parte de la tarea diagnóstica.

Consideramos que no era necesario el desarrollo de una tercera sesión para la nivelación de los conocimientos previos de los estudiantes, porque las dificultades encontradas eran más de tipo práctico que de tipo conceptual. Por lo tanto, pudimos superar estas dificultades durante la implementación de las tareas de aprendizaje.

## *2.2. Sesiones 3 y 4*

En las sesiones 3 y 4, implementamos las tareas del objetivo 1. En la sesión 3, realizamos la presentación del tema de principio de multiplicación, los objetivos de la unidad didáctica, los criterios de evaluación y el formato del diario del estudiante. Después, introducimos la tarea Diseñar la bandera del curso, que tuvo gran aceptación entre los estudiantes. Sin embargo, el aplicativo de colorear la bandera no fue muy atractivo y prefirieron realizar el listado de las banderas sin utilizar esta herramienta. Al finalizar la sesión, orientamos a los estudiantes para completar el diario del estudiante, pero presentaron dificultades para entender su diligenciamiento. Por tal motivo, no se alcanzó a realizar en esta sesión.

En la sesión 4, iniciamos con la realimentación, diligenciamiento y puesta en común del diario del estudiante de la tarea Diseñar la bandera del curso. Luego, los estudiantes desarrollaron la tarea Refrigerio, en la que demostraron mayor familiaridad con el listado y el diagrama de árbol.

## *2.3. Descripción de las sesiones 5, 6 y 7*

En las sesiones 5, 6 y 7, desarrollamos las tres tareas planteadas para el objetivo 2. Iniciamos la sesión 5 con la selección y puesta en común de cuatro diarios del estudiante, la realimentación de la tarea Refrigerio y la presentación del objetivo 2. Luego, desarrollamos la tarea Parque Mundo Aventura que pretendía analizar situaciones que relacionan eventos independientes. En el desarrollo de esta tarea, pudimos observar que el ejercicio de escribir el menú en las cartulinas y pegarlos en el tablero no fue tan motivante como esperábamos. Además, el tamaño de la letra y la caligrafía de los estudiantes no permitieron la lectura de los menús. El aplicativo del restaurante no despertó el suficiente interés en todos los estudiantes. Por tal razón, propusimos que la tarea Parque Mundo Aventura fuera modificada. Optamos por eliminar las indicaciones del enunciado que pedían realizar actividades manuales y poco prácticas como el aplicativo, ya que, por ser un colegio masculino, a ellos no les agradó este tipo de actividades. Es pertinente aclarar que no realizamos

este cambio en la ficha de la tarea porque consideramos que pueden ser de utilidad con estudiantes de otros contextos.

Iniciamos la sesión 6 con la puesta en común de cuatro diarios del estudiante. Luego, pasamos a la realimentación de la tarea Parque Mundo Aventura e implementamos la tarea Barco pirata. En esta tarea de aprendizaje, los estudiantes reconocieron las características de situaciones de orden de elementos sin repetición. En la dinámica de la clase, observamos que, al realizar agrupamientos en parejas, se presenta mayor participación de los estudiantes. Por el contrario, al conformar grupos de cuatro estudiantes, los roles no fueron asumidos a cabalidad y terminaron trabajando unos más que otros. Por lo tanto, decidimos que todos los estudiantes tomaran apuntes y al azar elegíamos un estudiante para presentar el trabajo del grupo.

Iniciamos la sesión 7 con la puesta en común del diario del estudiante. Luego pasamos a realizar el análisis del trabajo desarrollado en la tarea Barco pirata. Posteriormente, aplicamos la tarea de aprendizaje La clave del candado, en la que se trabajaron situaciones de ordenación de elementos con repetición. En esta tarea, el aplicativo fue de gran interés para los estudiantes, ya que involucró una situación cercana a ellos. En la tarea La clave del candado, evidenciamos un mayor aporte de las ayudas para la superación de los errores. Sin embargo, algunos estudiantes se quedaron en el juego y no se esforzaron por analizar el planteamiento matemático.

#### *2.4. Sesión 8*

En la sesión 8, realizamos la puesta en común de los diarios de cuatro estudiantes. Luego, realizamos la realimentación de la tarea de aprendizaje La clave del candado, en la que identificamos que los estudiantes generalizaron los condicionamientos requeridos para la utilización del principio de multiplicación. Después, implementamos la tarea Eurocopa, en la que identificamos enunciados con mucha información. Esto dificultó la interpretación por parte de los estudiantes. Al aplicar las ayudas 1, 51 y 53 (anexo 3), encontramos que se llevó a cabo una transición que dificultó comprender situaciones que requerían identificar condicionamientos. Otra de las dificultades detectadas en los estudiantes fue que, al multiplicar grandes cantidades, incurrieron en errores en el proceso multiplicativo. Por tal razón, planteamos dos ajustes a las tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. En estos ajustes incluimos un ítem en la tarea diagnóstica para indagar sobre multiplicaciones con números de varias cifras y ajustamos unas preguntas en la tarea La clave del candado



para aclarar confusiones de condicionamiento. Otra variante en el momento de la implementación de esta tarea fue la falta de tiempo para aplicar la actividad de las memofichas.

### *2.5. Sesiones 9 y 10*

Realizamos, en la sesión 9, la puesta en común de los diarios de los estudiantes que faltaban por participar en esta parte del proceso. Luego, pasamos a la realimentación de la tarea Eurocopa, en la que aclaramos las dudas que surgieron en la sesión anterior. Posteriormente, realizamos un pequeño repaso de los conceptos y procedimientos efectuados para la consecución de los tres objetivos. Finalizamos con la aplicación del examen final.

En la sesión 10, por cuestiones de tiempo, solo hicimos la entrega y corrección del examen final, y la puesta en común de las notas que obtuvo cada estudiante por el trabajo realizado en las sesiones de clase. En la corrección del examen final, observamos que los ítems con enunciados simples y cantidades pequeñas fueron resueltos por los estudiantes con mayor facilidad. Los estudiantes mejoraron en las situaciones planteadas en el examen que tienen condicionamientos en relación con su desempeño en la tarea Eurocopa.

## **5. Evaluación del diseño y la implementación**

En este apartado, presentamos la evaluación de las dimensiones cognitiva y afectiva del principio de multiplicación a partir de la información recolectada en la implementación. Primero, presentamos la evaluación del diseño y la implementación de la unidad didáctica, en cuanto al logro de expectativas de aprendizaje y al desarrollo de los aspectos afectivos. Luego, indicamos las debilidades y fortalezas en los diferentes aspectos que influyen en el proceso de aprendizaje. Posteriormente, establecemos los aspectos que deben ser potenciados en nuestra unidad didáctica y proponemos los respectivos ajustes de mejora.

### **1. Logro de expectativas de aprendizaje**

En este apartado, mostramos el análisis de cada uno de los aspectos cognitivos que tuvimos en cuenta en nuestra unidad didáctica, el logro de los objetivos de aprendizaje, el desarrollo de las expectativas de nivel superior, y la

contribución al desarrollo de las expectativas afectivas y factores que influyen en la motivación.

### 1.1. Logro de objetivos de aprendizaje

Establecemos el análisis del logro de los objetivos a partir de dos fuentes de información: la activación de los criterios de logro en el desarrollo de las tareas de aprendizaje y la evaluación del examen final. En la figura 10, presentamos la comparación de los resultados del sistema ACE en cuanto al logro de cada objetivo de aprendizaje. A partir de la figura, podemos concluir que el logro del objetivo 3 tiene los resultados más bajos, tanto en el desarrollo de las tareas de aprendizaje como en el examen final. La figura 10, también proporciona resultados globales sobre el logro de los objetivos en la unidad didáctica.

Descripción corta	Objetivo 1		Objetivo 2		Objetivo 3		Global	
	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final	Resultados corrección tareas diarias	Resultados corrección tareas examen final
Total estudiantes	30							
Promedios de contribución	64,5	76	72,6	68,3	63,6	50,7	66,2	64,3
Estud. Contr. Expect <50%	39,8	40,0	39,4	40,0	28,7	30,9	35,4	40,0

Figura 10. Cuadro comparativo entre los resultados de las tareas de cada objetivo y el examen final

Para la revisión y análisis de la activación de los criterios de logro alcanzados en cada tarea de aprendizaje, presentamos en la figura 11 los resultados arrojados por el sistema ACE. Es importante aclarar al lector que, para el registro de la información en el sistema ACE, dividimos la tarea Eurocopa en tres partes: T3.1 Eurocopa, relación de eventos independientes con cardinales iguales y cardinales diferentes, T3.2 Eurocopa, ordenaciones de elementos con repetición, y T3.3 Eurocopa, ordenaciones de elementos sin repetición. Cada una de las partes corresponde a la subestructura trabajada en la situación. A partir de los resultados mostrados en la figura 11, identificamos que el objetivo 3 tiene menor porcentaje de consecución de logro y la tarea T3.1 es la que contribuye en menor medida al objetivo (véase anexo 3).

Logro de objetivos												
Objetivo 1				Objetivo 2				Objetivo 3				
Tareas			Prom	Tareas			Prom	Tareas			Prom	
1	2	3		1	2	3		1	2	3		
62,0	67,0		64,5	84	76,9	57,0	72,6	61,4	64,9	64,3	63,6	

Figura 11. Contribución de las tareas en el logro de los objetivos

Para analizar la contribución de las tareas al logro de los objetivos, ponderamos en el sistema ACE cada uno de los criterios de logro según el propósito de cada tarea en sus respectivos objetivos. Por ejemplo, en la figura 12, presentamos la tabla de ponderaciones de criterios de logro para los caminos de aprendizaje previstos para las tareas del objetivo 3 (véase anexo 11). A partir de la figura 12, podemos establecer la consecución del objetivo teniendo en cuenta los criterios de logro de mayor ponderación 3.7, 3.8 y 3.9 en la tarea T3.1 (véase anexo 12). Aclaramos que estos criterios de logro son alternativos para solucionar la tarea.

Tarea	Caminos ap.	Criterios de Logro. Ponderación por cada tarea														Suma
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	1 2 6 7 10	20	20				15	30			15					100
1	1 2 6 8 10	20	20				15		30		15					100
1	1 2 6 9 10	20	20				15			30	15					100
2	1 3 4 6 7 10	20		10	20		10	25			15					100
2	1 3 4 6 8 10	20		10	20		10		25		15					100
2	1 3 4 6 9 10	20		10	20		10			25	15					100
3	1 3 5 6 7 10	20		10		20	10	25			15					100
3	1 3 5 6 8 10	20		10		20	10		25		15					100
3	1 3 5 6 9 10	20		10		20	10			25	15					100
Suma puntos según tareas en las que interviene el CL		60	20	20	20	20	35	80	80	80	45					460

Figura 12. Ponderación de criterios de logro en el objetivo 3

Para identificar las razones por las que la tarea T3.1 Eurocupa del objetivo 3 alcanzó un nivel menor de contribución al logro de los objetivos, determinamos cuál de los criterios de mayor contribución tuvo menor activación en la tarea y establecimos los errores en los que incurrieron los estudiantes. De allí, determinamos que el criterio de logro 3.8 afectó el desarrollo de la tarea T3.1 y, por tanto, la consecución del objetivo 3. Los errores en que incurrieron

en mayor medida los estudiantes en el criterio 3.8 están relacionados con la realización de procedimientos incorrectos al multiplicar los cardinales de los conjuntos (E21) y la aplicación de forma mecánica de procedimientos y algoritmos (E22).

A partir de las ponderaciones y el registro de la información en el sistema ACE, pudimos establecer el nivel de activación de los criterios de logro en cada una de las tareas de aprendizaje. En la figura 13, mostramos el resumen de la activación total, parcial, nula y el porcentaje de los estudiantes que no activaron los criterios de logro esperados por tarea. La tarea que presentó la mayor activación total fue la tarea Barco pirata. Los estudiantes realizaron activaciones parciales en mayor porcentaje en las tareas T3.1 y T3.3 Eurocopa. En las tareas del primer objetivo y en la tarea Clave del candado, los estudiantes presentaron una activación nula superior al 5 %.

Resumen de activación de CLs	Resumen de activación de los criterios de logro por tarea							
	Objetivo 1		Objetivo 2			Objetivo 3		
	D. la Bandera	Refrigerio	M. Aventura	B. Pirata	C. Candado	Eurocopa 3.1	Eurocopa 3.2	Eurocopa 3.3
AT	23,10%	31,06%	50,67%	53,45%	37,04%	37,50%	31,25%	33,85%
AP	34,83%	35,98%	14,33%	29,31%	19,91%	53,75%	43,30%	53,65%
AN	6%	6,06%	5%	4,74%	5,09%	3,13%	3,57%	3,13%
NA	36,55%	26,89%	30%	12,50%	37,96%	5,63%	21,88%	9,38%

Figura 13. Resumen de la activación de criterios de logro

En la tarea T3.3 Eurocopa, se presentaron los porcentajes más elevados de errores en que incurrieron los estudiantes. El 47 % de los estudiantes incurrió en errores relacionados con la interpretación de la información propuesta en la situación de conteo (E1), asignó elementos que no corresponden al conjunto (E3), identificó de manera incorrecta los conjuntos propuestos en el enunciado (E5) y usó un cardinal mayor o menor al propuesto en la situación (E47). También, el 75 % de los estudiantes incurrió en los errores relacionados con la argumentación (E32, E34 y E35).

Observamos que el objetivo 3, a partir de los resultados del examen final (figura 10), tiene un porcentaje de logro de 50,7 %. Revisamos la rúbrica (anexo7) de valoración del objetivo 3, en la que identificamos criterios de logro y errores que justifican una valoración básica en el objetivo. A partir de los resultados del examen final, analizamos el criterio de logro 3.8 que tiene una activación reducida en la tarea T3.1 y evidenciamos que los estudiantes

lograron determinar los cardinales que intervienen en la situación al activar el criterio de logro 3.6, pero no encontraron el total de arreglos porque multiplicaron de forma incorrecta los cardinales, al incurrir en el error E21, como se evidencia en la figura 14.

Los hinchas de la selección Italia realizaron una pancarta con el nombre del país, en la que cada letra tiene la opción de llevar uno de los tres colores representativos de su bandera (verde, blanco, rojo). Observa las fichas que aparecen en el tablero y según las indicaciones del profesor responde las siguientes preguntas.

¿Cuántas opciones se tienen para pintar las letras de la pancarta? Justifica tu respuesta.

Handwritten student work on grid paper:

$$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 1911$$

Porque  $3^6$  da 1911 opciones para pintar las letras de la pancarta 3 letras diferentes y con 6 letras.

Figura 14. Ejemplo del error E21 en el desarrollo de tarea Eurocopa

En el análisis de los resultados presentados en la figura 10, también identificamos que el objetivo 2 fue el que obtuvo mayor porcentaje de consecución en la implementación de las tareas de aprendizaje, mientras que el objetivo 1 alcanzó los resultados más altos en el examen final. A partir de lo anterior, analizamos el objetivo 2 e identificamos la ponderación de los criterios de logro para las tareas de dicho objetivo y los criterios de mayor ponderación. El criterio 2.13 es el de mayor ponderación. Este criterio de logro buscaba identificar la multiplicación como estrategia de solución a situaciones problema. Este criterio de logro era fundamental en nuestro objetivo y se trabajó desde el objetivo 1. En la activación del criterio 2.13, los estudiantes no incurrieron en errores, debido a que las dificultades que se presentaron se abordaron en las tareas anteriores. La activación alta en este criterio de logro es indicio de que los propósitos del objetivo 3 se cumplieron, ya que se aplicó el principio de multiplicación para solucionar las situaciones.

#### *Debilidades y fortalezas del logro de los objetivos de aprendizaje*

Al tener en cuenta el análisis realizado sobre el alcance de los objetivos, identificamos las siguientes fortalezas en la planeación de la unidad didáctica.

- El contexto de la tarea Eurocopa es significativo e interesante para los estudiantes y se evidenció en la búsqueda de estrategias para resolverla.

- Los recursos empleados son de fácil comprensión y apoyan los procesos de enseñanza-aprendizaje.
- Las tareas permiten el uso significativo de diferentes sistemas de representación.
- Las tareas del objetivo 1 potencian la utilización del diagrama de árbol en situaciones de tipo multiplicativo.

Identificamos las siguientes debilidades en el diseño de la unidad didáctica que pudieron incidir en el alcance de los objetivos.

- Los enunciados de la tarea T3.1 Eurocopa tienen una estructura compleja para la edad y pensamiento matemático de los estudiantes.
- Las preguntas de la tarea Eurocopa no llevaron un orden de acuerdo con las subestructuras.
- En la redacción del objetivo 3, se mencionan aspectos trabajados en el objetivo 2.
- La tarea diagnóstica no indagó acerca de los procesos multiplicativos con cantidades grandes.

Al tener en cuenta las debilidades mencionadas anteriormente, propusimos las siguientes mejoras.

- Cambiar la redacción de algunos ítems de la tarea Eurocopa, de tal manera que sea más comprensible para los estudiantes y así evitar que ellos deduzcan información implícita, ya que generaron problemas de interpretación de la situación que no permitieron evidenciar la activación de los criterios de logro.
- Ordenar las preguntas de la tarea Eurocopa según la subestructura abordada.
- Mejorar la redacción del objetivo 3, sin cambiar su propósito.
- En la parte 1 de la tarea diagnóstica, se incluyeron en el animaplano ítems que indagan sobre multiplicación de números de varias cifras.
- Consideramos revisar los requisitos de la tarea Eurocopa para asegurar que los estudiantes tengan conocimientos sobre algunos términos utilizados en torneos futbolísticos y de ordenaciones.
- Modificar la temporalidad de la tarea Eurocopa, al aumentar los tiempos de puesta en común para aclarar las condiciones y las subestructuras que pueden intervenir en una situación de conteo.

#### *Percepciones de los estudiantes y el profesor*

El análisis de la activación de los criterios de logro a partir de las percepciones de los estudiantes y el profesor puede observarse en la tabla 7. En esa

tabla, mostramos los resultados cualitativos, a partir de nuestras fuentes de información.

Tabla 7  
*Resumen y comparación de resultados*

Logros o desarrollo	Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3
Activación de criterios de logro	Media	Media	Media
Examen final	Alta	Alta	Media
Percepciones de los estudiantes (grafo de criterios de logro)	Alta	Alta	Alta
Percepciones del profesor (grafo de criterios de logro)	Alta	Alta	Media

De la tabla, podemos deducir que las percepciones del docente y los resultados del examen final son similares, mientras que la activación de los criterios de logro registrados en el sistema ACE muestra unos niveles más bajos de consecución. Si el lector desea ver con mayor detalle las percepciones del profesor y del estudiante por tarea, puede consultar el sistema ACE<sup>2</sup>.

### *1.2. Desarrollo de expectativas de aprendizaje de nivel superior*

En las previsiones, establecimos que cada objetivo contribuyera a ciertas capacidades matemáticas fundamentales y a los procesos matemáticos. En el objetivo 1, pretendíamos aportar a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, comunicación y representación, y a los procesos de formulación y empleo. En el objetivo 2, nuestro propósito era aportar a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, y utilización de operaciones y representación, y a los procesos matemáticos de formular e interpretar. En el objetivo 3, pretendíamos contribuir a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, y razonamiento y argumentación, y a los procesos de formulación y empleo. En síntesis, para la unidad didáctica previmos aportar principalmente a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, comunicación, representación y matematización, y al proceso matemático de

2 Se hará referencia al sistema ACE en diferentes momentos de este apartado. El lector puede consultar todo el contenido de ACE en: <https://goo.gl/OWiyAT>.

formular. En la tabla 8, presentamos los niveles de desarrollo de las expectativas de nivel superior según el nivel de activación de los criterios de logro para cada uno de los objetivos.

Tabla 8  
*Resumen y comparación de resultados*

Logros o desarrollo	Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3
Expectativas de aprendizaje de nivel superior (EANS): capacidades matemáticas fundamentales			
Desarrollo de EANS por capacidades	Media	Media	Media
Expectativas de aprendizaje de nivel superior: procesos matemáticos			
Formular	Media	Media	Media
Emplear	Media	Media	Media
Interpretar	Media	Alta	Media

Los resultados arrojados por el sistema ACE, registrados en la tabla anterior, muestran que la activación de los criterios de logro en las expectativas de aprendizaje de nivel superior, tanto en las capacidades matemáticas fundamentales como en los procesos matemáticos, se desarrolló en un nivel de medio.

#### *Consecución de las capacidades matemáticas fundamentales*

Para indicar los niveles de consecución de las capacidades matemáticas fundamentales, presentamos en la figura 15 la contribución de cada objetivo de aprendizaje de la unidad didáctica a las expectativas de aprendizaje de nivel superior.

Diseño est. RP %	Matemati- zación %	Comuni- cación %	Raz. y Arg. %	Uso leng. y op. %	Represen- tación %	Herramientas matem. %	Promedio global
Objetivo 1							
26,1	0,0	52,8	47,6	26,7	48,1	0,0	MEDIA
Objetivo 2							
36,4	69,4	66,4	49,4	59,9	55,9	74,5	MEDIA
Objetivo 3							
60,5	58,6	53,8	50,6	52,7	58,3	0,0	MEDIA
Unidad							
41,0	42,7	57,6	49,2	46,4	54,1	24,8	MEDIA

Figura 15. Contribución de la unidad didáctica a las capacidades matemáticas fundamentales



A partir del análisis de los resultados, podemos identificar que la contribución de la unidad didáctica a todas las capacidades matemáticas fundamentales se alcanzó de acuerdo con lo previsto, pero en un nivel medio. Además, según nuestros propósitos explícitos en las previsiones, la capacidad matemática fundamental de menor desarrollo fue matematización. Revisamos las ponderaciones atribuidas a los criterios de logro y sus resultados en la implementación. A partir de ellos, identificamos una menor contribución de las tareas de los objetivos 1 y 2 al desarrollo de la capacidad matemática fundamental de razonamiento y argumentación. En el objetivo 3, se desarrolló en menor medida el diseño de estrategias para resolver problemas.

Al realizar el análisis de cada objetivo, identificamos que la tarea Diseñar la bandera del curso presenta niveles bajos de contribución a la capacidad matemática fundamental de razonamiento y al proceso de emplear, porque se orientó al estudiante a usar un único sistema de representación. Además, la interpretación de los condicionamientos requeridos en el desarrollo de la tarea dificultó una contribución mayor a dicha capacidad en el objetivo 1. La tarea Barco pirata presentó menor nivel de contribución a la capacidad de razonamiento y argumentación, y al proceso matemático de formular, ya que involucraba la subestructura de ordenación de elementos sin repetición. La tarea T3.1 Eurocopa presentó un menor aporte al desarrollo de la capacidad matemática fundamental de diseño de estrategias para resolver problemas, específicamente en los ítems que pedían reconocer los condicionamientos y realizar ordenación de elementos con repetición y sin ella. Las tareas anteriores se podrían abordar con mayor éxito si el profesor hubiese finalizado cada sesión con la consolidación de los conceptos y procedimientos tratados en dichas tareas.

La capacidad matemática fundamental de comunicación se desarrolló en mayor medida en las tareas del objetivo 1 y 3, puesto que en ellas se permitió el intercambio de argumentos entre los estudiantes y la puesta en común frente al gran grupo. En el objetivo 2, la capacidad matemática que más se desarrolló fue matematización, gracias a que los estudiantes analizaron y aplicaron el principio de multiplicación.

#### *Contribución y consecución de las tareas a los procesos matemáticos*

El nivel de desarrollo de los procesos matemáticos se puede evidenciar en la figura 16. Al revisar los resultados y compararlos con las previsiones, concluimos que el objetivo 1 contribuyó en menor medida al proceso matemático de emplear, el objetivo 2 al proceso de formular y el objetivo 3 al proceso de interpretar.

Cont. CL a cada proceso		
Objetivo 1	Número	Etiqueta
Formular	50,2	MEDIA
Emplear	30,5	MEDIA
Interpretar	47,3	MEDIA
Objetivo 2	Número	Etiqueta
Formular	48,1	MEDIA
Emplear	62,4	MEDIA
Interpretar	63,4	MEDIA
Objetivo 3	Número	Etiqueta
Formular	60,8	MEDIA
Emplear	60,5	MEDIA
Interpretar	52,5	MEDIA
Unidad didáctica	Número	Etiqueta
Formular	53,0	MEDIA
Emplear	51,1	MEDIA
Interpretar	54,4	MEDIA

Figura 16. Contribución de las tareas de aprendizaje a los procesos matemáticos

Podemos concluir que, en las tareas de los objetivos 1 y 3, los estudiantes desarrollaron en mayor medida el proceso de formular, ya que era necesario representar la situación, dar explicaciones a partir de estas y deducir o aplicar el principio de multiplicación. En las tareas del objetivo 2, el proceso matemático que más se desarrolló fue interpretar, porque los estudiantes debían razonar sobre los resultados en el contexto de las situaciones.

#### *Debilidades y fortalezas de la contribución a las expectativas de nivel superior*

A partir del análisis de la implementación y los resultados del aprendizaje, identificamos las siguientes debilidades en el diseño de las tareas que incidieron en el desarrollo de las expectativas de nivel superior.

- En la tarea Diseñar la bandera del curso, la pregunta 1 condiciona el uso de un único sistema de representación.
- En la tarea Barco pirata, la formulación de las preguntas 8 y 9 implica respuestas ambiguas, lo que dificultó que los estudiantes activaran los criterios de logro 2.13 y 2.14 que se referían a la capacidad de razonamiento y argumentación, y al proceso matemático de formular.
- Al finalizar las tareas del objetivo 2, faltó la formalización de las temáticas abordadas en cada una de ellas. Por tal razón, los estudiantes presentaron algunas dificultades en el desarrollo de la tarea Eurocopa y en el diseño de estrategias para resolver problemas.

- En los ítems de la tarea T3.1 Eurocopa en los que se involucraban condicionamientos, algunas instrucciones no eran claras o algunos estudiantes presentaron dificultad para interpretarlas.

Las siguientes son las fortalezas de la unidad didáctica en la contribución a las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos.

- Los diferentes agrupamientos potenciaron la capacidad matemática de comunicación.
- La secuencia de tareas contribuyó a la capacidad matemática de diseño de estrategias para resolver problemas.
- Los procesos de formular y emplear se fortalecieron de manera significativa en las tareas del último objetivo.

A partir de las anteriores debilidades, proponemos los siguientes ajustes y mejoras.

- Cambiar el ítem 1 de la tarea Diseñar la bandera del curso, de manera que el estudiante emplee el sistema de representación que quiera.
- Cambiar los ítems 8 y 9 de manera que los estudiantes tengan que explicar claramente y por separado cada una de las condiciones que caracterizan las subestructuras.
- Incluir en la temporalidad de cada tarea del objetivo 2 el cierre de la sesión realizada por el docente para formalizar las temáticas abordadas en la tarea.
- Revisar la redacción de los ítems de la tarea Eurocopa que involucran los condicionamientos.

### *1.3. Expectativas de tipo afectivo y de los factores que influyen en la motivación*

Para realizar el análisis de la contribución de la unidad didáctica a las expectativas de tipo afectivo, consultamos los resultados registrados en el sistema ACE. En la figura 17, observamos que la contribución de los criterios de logro muestra unos niveles cuantitativos menores a la percepción del docente.

#### *Análisis del desarrollo de las expectativas de tipo afectivo*

En el sistema ACE, las expectativas EA5 y EA6 muestran niveles bajos de contribución según los criterios de logro, que tendremos en cuenta para

Todos los objetivos						
	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5	EA6
	66,2	69,5	57,5	61,8	48,3	49,7
Criterios de logro	MEDIA	MEDIA	MEDIA	MEDIA	MEDIA	MEDIA
Profesor	78,3	55	83,3	63,3	73,3	66,7
	ALTA	MEDIA	ALTA	MEDIA	MEDIA	MEDIA

Figura 17. Contribución de la unidad didáctica a las expectativas de tipo afectivo

determinar las debilidades de la unidad didáctica. Por otro lado, las expectativas con mayor contribución fueron EA1 y EA2.

En la figura 18, identificamos la contribución de los objetivos a las expectativas afectivas. A partir de estos resultados, determinamos que las expectativas EA5 y EA6 tuvieron un menor nivel de contribución en las tareas del objetivo 1. Además, identificamos que las expectativas con mayor nivel de consecución presentaron un alcance similar en los tres objetivos, siendo el objetivo 2 el que levemente aporta niveles mayores.

	Objetivo 1						Objetivo 2						Objetivo 3					
	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5	EA6	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5	EA6	EA1	EA2	EA3	EA4	EA5	EA6
Criterios de logro	66.5	64.6	56.9	61.0	42.2	42.2	67.0	76.1	58.8	64.9	52.1	56.3	65.1	67.7	56.8	59.5	50.8	50.8
Profesor	50	50	50	75	50	50	100	65	100	65	85	65	85	50	100	50	85	85

Figura 18. Contribución de cada objetivo a las expectativas de tipo afectivo

Al revisar la contribución de los criterios de logro, determinada en cada una de las tareas para el objetivo 1, identificamos que solo dos de los criterios apuntan a las expectativas afectivas EA5 y EA6. Decidimos revisar las tareas del objetivo 1 para observar si en las preguntas estaba clara la indicación de argumentar o expresar explicaciones de sus estrategias de solución. A partir de la revisión encontramos lo siguiente.

- En las preguntas de la tarea Diseñar la bandera del curso, no se encuentra ninguna en la que se les indicara a los estudiantes que de manera individual realizaran sus argumentos. Pero en la puesta en común algunos representantes de cada grupo sí lo hicieron oralmente.

- En la pregunta 2 de la tarea Refrigerio, se encuentra la indicación de justificar sus estrategias. Pero consideramos que, al encontrarse al final de la instrucción, pudo ser pasada por alto por los estudiantes. También se hicieron justificaciones orales en la puesta en común, pero solo se expresaron algunos estudiantes relatores.

Las tareas del objetivo 2 fueron la que más contribuyeron a las expectativas de tipo afectivo. Estas tareas se caracterizan por involucrar contextos cercanos al estudiante, incluir preguntas comprensibles y proponer indicaciones en las que se requería argumentar por escrito los procedimientos como ítem independiente. Las fortalezas de nuestra unidad didáctica en el desarrollo de las expectativas afectivas son las siguientes.

- Los diferentes tipos de agrupamientos permitieron a los estudiantes trabajar en equipo.
- Los estudiantes mostraron un avance en su interés de comunicar sus ideas y soluciones.
- Las tareas permitieron que los estudiantes persistieran en la búsqueda de estrategias para solucionarlas.
- Los contextos utilizados en las tareas fueron atractivos para los estudiantes.
- La unidad didáctica aportó un buen número de ayudas para la superación de errores de los estudiantes.

Encontramos una debilidad en la contribución de la unidad didáctica al desarrollo de las expectativas afectivas en la implementación: en la tarea Diseñar la bandera del curso, no se encontraba ningún ítem que permitiera con claridad la activación de los criterios de logro que aportaban a las expectativas EA5 y EA6. A partir de esta debilidad, proponemos incluir un ítem en la tarea Diseñar la bandera del curso que permita a los estudiantes expresar sus argumentaciones.

#### *Análisis del desarrollo de los aspectos que influyen en la motivación*

Para el análisis de los aspectos que influyen en la motivación, nos centraremos en los datos arrojados por el sistema ACE, relacionados con las percepciones del profesor y de los estudiantes. En esta información, encontramos que las percepciones de los estudiantes a lo largo de la implementación de la unidad didáctica son altas. En la figura 19, se evidencia la contribución de nuestra unidad didáctica a la motivación. Al observar los resultados arrojados por el sistema ACE, percibimos cierta coincidencia entre las percepciones del profesor

y de los estudiantes. A partir de esta información, concluimos que la unidad didáctica contribuyó en menor medida a la variable “detecté mis errores”.

	Objetivo 1					
	Var1	Var2	Var3	Var4	Var5	Var6
	Sabía por qué resolver la tarea	Sabía cómo hacerlo	Tema interesante	Detecté mis errores	Fue un reto motivante	Pude interactuar con los demás
Percepción de los estudiantes sobre las variables de motivación. Totalidad de las tareas del objetivo	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA
Percepción del profesorado sobre las variables de motivación. Totalidad de las tareas del objetivo	ALTA	MUY ALTA	MUY ALTA	MEDIA	ALTA	MUY ALTA
	Objetivo 2					
Percepción de los estudiantes sobre las variables de motivación. Totalidad de las tareas del objetivo	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA
Percepción del profesorado sobre las variables de motivación. Totalidad de las tareas del objetivo	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	MUY ALTA
	Objetivo 3					
Percepción de los estudiantes sobre las variables de motivación. Totalidad de las tareas del objetivo	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA
Percepción del profesorado sobre las variables de motivación. Totalidad de las tareas del objetivo	MEDIA	ALTA	ALTA	MEDIA	ALTA	ALTA

Figura 19. Promedio de las percepciones del profesor y los estudiantes

Para identificar qué objetivo de la unidad didáctica contribuyó en menor medida en la variable Var4, revisamos la información de la figura 20. Concluimos que la tarea del objetivo 3 aportó en menor proporción.

Percepción de los estudiantes sobre su motivación respecto a la totalidad de las tareas del objetivo

	Var1	Var2	Var3	Var4	Var5	Var6	Promedio por objetivo
	Sabía por qué resolver la tarea	Sabía cómo hacerlo	Tema interesante	Detecté mis errores	Fue un reto motivante	Pude interactuar con los demás	
Objetivo 1	2,81	3,26	3,01	3,17	2,98	2,83	3,01
	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA
Objetivo 2	3,13	3,10	2,78	3,01	2,78	3,29	3,01
	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA
Objetivo 3	3,28	3,00	3,00	2,56	2,91	3,13	2,98
	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA	ALTA

Figura 20. Percepción de los estudiantes por objetivo

En la tarea Eurocopa, el profesor percibió que a los estudiantes se les dificulta reconocer cuáles procedimientos y razonamientos empleados son válidos o erróneos. Estas dificultades están relacionadas con la capacidad de los estudiantes para identificar de manera eficiente la subestructura conceptual que pertenece a la situación propuesta. Al no reconocer las subestructuras inmersas en cada una de las situaciones de la tarea, el estudiante da soluciones con resultados erróneos, sin percibirlos o detectarlos. Las variables que presentaron una mayor contribución a las percepciones de la motivación en la implementación de la unidad didáctica fueron la interacción con los demás y que los estudiantes sabían cómo hacer las tareas propuestas.

En el análisis de las percepciones del profesor a la motivación, encontramos que los dos primeros objetivos contribuyen en mayor nivel. Al realizar un análisis de las tareas que más motivaron a los estudiantes, encontramos que la tarea Refrigerio fue la que sobresalió con un porcentaje de motivación del 83%. Los estudiantes sabían cómo resolver esta tarea, que les pareció interesante, y pudieron interactuar con sus compañeros.

Después de analizar la implementación de la unidad didáctica, encontramos las siguientes fortalezas relacionadas con los aspectos que contribuyen a la motivación.

- Las valoraciones de la motivación percibidas por los estudiantes y el profesor fueron altas.
- Las tareas de los objetivos 1 y 2 permitieron que los estudiantes interactuaran con diferentes materiales que aportaron de manera significativa a la motivación.
- El trabajo en grupo posibilitó la interacción entre los estudiantes, lo que favorece su motivación.

En la implementación de la unidad didáctica, encontramos las siguientes dificultades relacionadas con los aspectos que contribuyen a la motivación.

- Los estudiantes realizan procedimientos y presentan respuestas de manera mecánica sin reflexionar sobre su validez y pertinencia en el contexto de la situación. Por tal razón, no pueden detectar los errores en los que incurrieron al resolverla.
- Algunos estudiantes no lograron reconocer las subestructuras conceptuales presentes en las situaciones, lo que afectó su motivación.
- El hecho de que algunos recursos no hayan despertado el interés en este grupo específico de estudiantes no desvirtúa el aporte potencial para la unidad didáctica.

- La variable Var5, fue un reto motivante, también tuvo valores de menor nivel, percibidos por los estudiantes y profesor.

Tomando como referencia las dificultades relacionadas con los aspectos que contribuyen a la motivación, planteamos las siguientes acciones de mejoramiento en la dinámica de la clase.

- Ser más insistentes, desde el inicio del desarrollo de las tareas, para que los estudiantes validen sus procesos y resultados. También hacer un reconocimiento verbal de felicitaciones cuando se avance en la justificación de sus acciones.
- Solicitar a los estudiantes más adelantados que les colaboren a sus compañeros haciéndoles preguntas acerca de la manera como abordan y solucionan las situaciones problema.

## 6. Descripción y justificación del nuevo diseño

A partir de los resultados obtenidos en la evaluación del diseño y la implementación de la unidad didáctica, proponemos algunos ajustes a nuestra nueva versión de unidad didáctica. A continuación, presentamos el nuevo diseño que surge de los aspectos que pueden mejorarse o potenciarse en los objetivos, en la tarea diagnóstica y en las tareas de aprendizaje.

### 1. Presentación general del nuevo diseño

Presentamos la descripción del nuevo diseño de la unidad didáctica de acuerdo con (a) la concreción del tema, (b) la concreción de las expectativas de aprendizaje, (c) los ajustes de mejora de la tarea diagnóstica, de las tareas de aprendizaje y del examen final, y (d) la secuencia de tareas.

#### 1.1. Concreción del tema

Es importante abordar el análisis combinatorio en la enseñanza de las matemáticas escolares a partir de conceptos básicos de conteo para la aplicación del principio de la multiplicación en la solución de problemas contextualizados. En la unidad didáctica, planteamos diferentes sistemas de representación y contextos fenomenológicos que facilitan a los estudiantes la comprensión de situaciones problema que requieren la aplicación del principio de la multiplicación. Para ello, los estudiantes manipulan diferentes materiales en la



solución de problemas de conteo. En la implementación de la unidad didáctica, el tema desarrollado fue el principio de multiplicación a partir de cuatro subestructuras mencionadas en el apartado del diseño previo.

### *1.2. Expectativas de aprendizaje*

En el nuevo diseño de la unidad didáctica reformulamos el objetivo 3 (véase anexo 5). Después, detallamos cambios en las tareas de aprendizaje en su diseño y en la forma en que serán implementadas. A continuación, presentamos la nueva formulación del objetivo 3.

*Objetivo 3.* Resolver situaciones de conteo utilizando el principio de multiplicación e interpretar los resultados obtenidos a partir del contexto del problema.

Con la formulación de las expectativas de aprendizaje buscamos contribuir a que el estudiante sea matemáticamente competente. Para ello, identificamos algunos procesos matemáticos y capacidades matemáticas fundamentales que posibilitan el desarrollo de problemas de conteo. Describimos las expectativas de nivel medio secuencialmente en tres objetivos. Inicialmente, partimos del uso de los sistemas de representación. Luego, los estudiantes deducen las características de las subestructuras a partir de la representación de los arreglos. Finalmente, resuelven situaciones con el principio de multiplicación.

Las dos tareas de aprendizaje propuestas para el objetivo 1 contribuyen a fortalecer las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, comunicación y representación, y los procesos matemáticos de formular y emplear. Con las tareas, pretendemos que los estudiantes, por medio de la interpretación de la situación, empleen las representaciones como estrategia de solución y razonen sobre los diferentes arreglos representados. Además, esperamos que comuniquen sus argumentos y lleguen a acuerdos con sus pares frente a la interpretación, a la estrategia de solución y a la validez de los resultados de la tarea.

Las tres tareas de aprendizaje diseñadas para el objetivo 2 contribuyen principalmente a las capacidades matemáticas fundamentales de matematización, comunicación, razonamiento y argumentación, utilización de operaciones y representación. De igual manera, estas tareas fortalecen los procesos de formulación e interpretación. En las tareas de este objetivo, pretendemos que los estudiantes interpreten diferentes situaciones, empleen algún sistema de representación o una estrategia numérica para solucionarlas y razonen sobre los diferentes arreglos identificados en las representaciones. Además, buscamos que los estudiantes identifiquen la relación entre los cardinales, expresen

dichas relaciones en términos numéricos o simbólicos, realicen operaciones y validen las soluciones.

La tarea de aprendizaje diseñada para el objetivo 3 contribuye a las capacidades matemáticas fundamentales de diseño de estrategias para resolver problemas, matematización, razonamiento y argumentación. Esta tarea de aprendizaje fortalece los procesos matemáticos de formulación y empleo. Con la tarea Eurocopa, pretendemos que los estudiantes identifiquen las relaciones entre los elementos de los conjuntos, apliquen el principio de multiplicación, razonen sobre las implicaciones de los condicionamientos en la situación, establezcan la validez de sus resultados, comuniquen sus argumentos y lleguen a acuerdos.

En el nuevo diseño reformulamos las expectativas afectivas a partir de su contribución a los tres enfoques. A continuación, presentamos las expectativas afectivas.

*EA1.* Adquirir hábitos de trabajo en la resolución de situaciones de conteo.

*EA2.* Manifestar rigurosidad y seguridad en el manejo de los sistemas de representación asociados al principio de multiplicación.

*EA3.* Desarrollar perseverancia en la búsqueda de estrategias para resolver tareas relacionadas con el principio de multiplicación.

*EA4.* Despertar el interés y el deseo de comunicar de forma sencilla y clara los argumentos de las soluciones efectuadas en los problemas asociados al principio de multiplicación.

### *1.3 Ajustes al diseño previo*

Las tareas de aprendizaje que conforman el proceso de enseñanza del principio de multiplicación tienen el propósito de contribuir a las expectativas de aprendizaje y a superar sus limitaciones. A continuación, mencionamos los cambios que realizamos en las tareas a partir de los resultados de la evaluación de la implementación. Las modificaciones de la tarea diagnóstica, las tareas de aprendizaje y el examen final se pueden encontrar en el anexo 7.

#### *Tarea diagnóstica*

Evidenciamos en la implementación que los estudiantes presentaron dificultad en realizar operaciones con cantidades grandes. Por tal motivo, incluimos, en la primera parte, operaciones de tipo multiplicativo de varios cardinales en los que el producto sea un número de cinco cifras. En la segunda parte,

omitimos el ítem de recortar las fichas ya que, según nuestra experiencia, es un ejercicio que requiere de un tiempo significativo y no aporta en mayor medida a los propósitos de la unidad didáctica. En la actividad, solo se pedirá que observen la ficha y escriban los nombres.

### *Tareas de aprendizaje*

En las tareas del objetivo 1, consideramos incluir y especificar las instrucciones de argumentación para contribuir a las expectativas afectivas. Además, identificamos que la tarea Diseñar la bandera dirige al estudiante a usar un único sistema de representación en el ítem 5. Al cambiar esa instrucción, el estudiante podrá elegir el sistema de representación que desee, lo que nos permitirá potenciar la contribución a las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y diseño de estrategias para resolver problemas, y al proceso de emplear.

En las tareas del objetivo 2, incluiremos, al finalizar cada sesión, la intervención del profesor frente al gran grupo para la consolidación de conceptos y procedimientos tratados sobre la identificación de las subestructuras. Esto permitirá potenciar el alcance de los objetivos 2 y 3. Omitimos, en la tarea Parque Mundo Aventura, el ejercicio de escribir el menú en las cartulinas y pegar en el tablero porque no motivó lo suficiente a los estudiantes. La formulación de los ítems 8 y 9 de la tarea Barco pirata implica respuestas ambiguas. Al plantearlas de forma más clara, permitiremos profundizar en la comprensión de la subestructura y potenciaremos las capacidades matemáticas fundamentales de razonamiento y argumentación, y al proceso matemático de formular.

En la tarea del objetivo 3, realizamos modificaciones en la organización de las preguntas para que se evidencie el tipo de subestructura que se está abordando (eventos independientes con repetición y sin repetición). Redactamos los enunciados de tal forma que no haya información implícita, ya que esta situación dificultó bastante la identificación de los cardinales. Hicimos una intervención en el gran grupo antes de iniciar la tarea, para verificar la familiaridad con el contexto futbolístico, ya que en un colegio masculino no todos los estudiantes tienen la misma apropiación del tema. Con los anteriores cambios, esperamos que los estudiantes identifiquen de una manera más sencilla los cardinales y puedan analizar el procedimiento que se debe seguir según la subestructura que requiera para solucionar el problema. De esta forma, se contribuye a la capacidad matemática fundamental de diseño de estrategias y la variable motivacional que indica la detección de sus errores.

### 1.4. Ficha de la tarea Eurocopa

A continuación, presentamos la nueva ficha de la tarea Eurocopa (véase anexo 5), con los apartados en los que realizamos ajustes. Los otros apartados son iguales a los de la ficha de la tarea propuesta anteriormente (véase anexo 3).

#### Tarea Eurocopa

La Eurocopa es un torneo que se juega entre las mejores selecciones de fútbol de Europa, su última edición fue en el 2012 y participaron los siguientes equipos



Equipos participantes			
Alemania	Francia	Italia	Rep Checa
Croacia	Grecia	Países Bajos	Rusia
Dinamarca	Inglaterra	Polonia	Suecia
España	Irlanda	Portugal	Ucrania

#### Trabajo individual

Responde en la guía las siguientes preguntas.

- 1) Cada equipo participante lleva a la Eurocopa veinte jugadores de campo y tres arqueros. Cada una de las selecciones debe darles a sus jugadores dos uniformes por partido. Si en la primera ronda cada equipo juega tres partidos. ¿Cuántos uniformes entrega una selección a sus jugadores en la primera ronda? Justifica tu respuesta.

España tiene tres arqueros, cada uno puede utilizar una camiseta de manga larga, manga corta o tres cuartos; puede tener pantalón, pantaloneta larga o pantaloneta corta, y puede elegir para su uniforme un único color (verde, rojo o amarillo).

- 2) Escribe dos formas de plantear la operación que nos permita resolver este problema.
- 3) ¿Cuántas posibilidades se tienen para los uniformes de los tres arqueros de España? Justifica tu respuesta.

#### Puesta en común en gran grupo

- 4) Explica a tus compañeros cómo solucionaste las preguntas anteriores y cuál fue la respuesta.

#### Trabajo en parejas

Presta atención a la explicación del profesor sobre la labor que tienen los hinchas de Italia.

Los hinchas de la selección de Italia realizaron una pancarta con el nombre del país, en la que cada letra tiene la opción de llevar uno de los tres colores representativos de su bandera (verde, blanco, rojo).

Observa las fichas que aparecen en el tablero y según las indicaciones del profesor responde las siguientes preguntas.

- 5) ¿Cuántas opciones se tienen para pintar cada letra de la pancarta? Justifica tu respuesta.
- 6) ¿Cuántas opciones se tienen para pintar la pancarta si se pueden repetir colores? Justifica tu respuesta.
- 7) Si además de los tres colores que ya tengo para pintar, agrego el color amarillo, ¿cuántas opciones tengo para pintar la pancarta? Justifica tu respuesta.
- 8) Si de los tres colores ya terminé el color verde, ¿cuántas opciones tengo de pintar la pancarta?
- 9) Si la pancarta debe decir *gol* y cada letra la puedo pintar de cuatro colores, ¿cuántas opciones tengo de pintar la pancarta si se pueden repetir colores? Justifica tu respuesta.

#### *Trabajo de Excel en parejas*

Abre la hoja de cálculo llamada *Eurocopa*. Luego, lee las instrucciones e interactúa con ella para responder las siguientes preguntas.

Los goleadores de la Eurocopa fueron Ballotelli, Ronaldo, Dzagoev, Gómez y Torres.

- 10) ¿De cuántas formas se pueden organizar en fila para tomarles una fotografía para la página de la UEFA?
- 11) Si Ronaldo siempre va de primero, ¿cuántas opciones se tienen?
- 12) Si Ballotelli quiere ir de último, ¿cuántas opciones se tienen?

#### *Puesta en común grupal*

Ahora nos organizamos en mesa redonda para compartir las respuestas a las preguntas de acuerdo con el orden que planteó el profesor.

#### *Agrupamiento*

La tarea cuenta con cinco etapas de trabajo. En la primera etapa, los estudiantes abordan una parte de la tarea de forma individual. En la segunda, realizamos la puesta en común por parte de algunos estudiantes del trabajo realizado individualmente. La tercera etapa está destinada para el trabajo en parejas, en la que realizamos un concurso de cálculo y concentración. En la cuarta etapa, las mismas parejas utilizan una hoja de cálculo para encontrar los productos de cada uno de los arreglos. En la última etapa, hacemos la puesta en común

en plenaria del trabajo realizado en Excel en la que el profesor realiza una serie de preguntas orientadoras.

### *Previsiones de la tarea Eurocopa*

En una primera instancia, planteamos tres tareas para el objetivo 3. Después del análisis de los resultados, modificamos una sola tarea de aprendizaje que nos permitió abarcar de forma más completa las secuencias de capacidades del objetivo. De igual modo, realizamos aportes a las expectativas de tipo afectivo con la inclusión del concurso. En la figura 21, presentamos el grafo de los criterios de logro de la tarea Eurocopa.

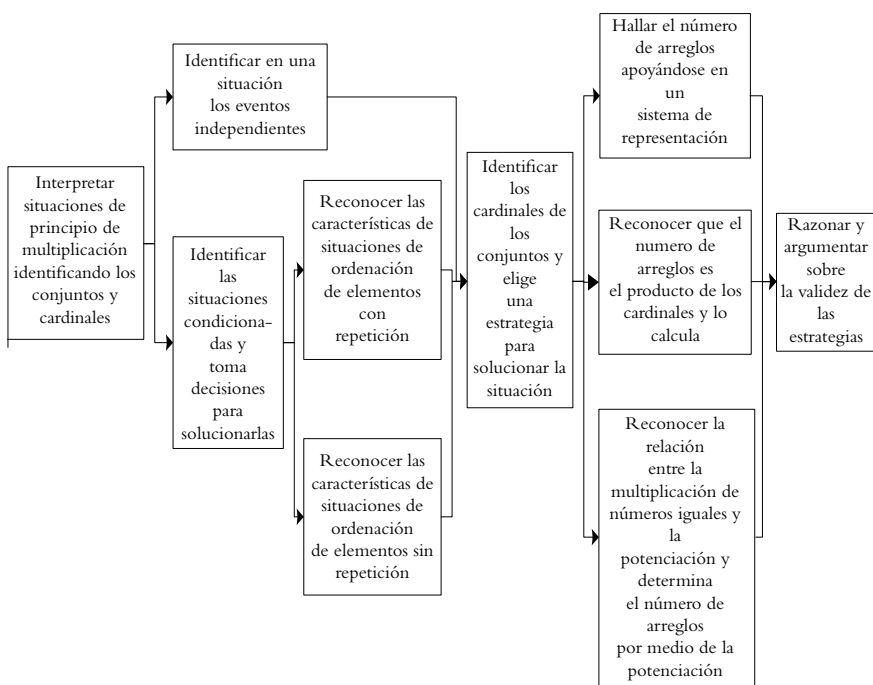


Figura 21. Grafo de criterios de logro del objetivo 3

### *1.5. Secuencia de tareas*

En la tabla 9, describimos la nueva versión de la secuencia de tareas propuestas para la unidad didáctica, las metas y el tiempo requerido para la implementación de cada tarea. La temporalidad de las tareas por sesiones se encuentra en el anexo 9.

Tabla 9  
*Descripción de la secuencia de tareas*

Sesión	Objetivo	Tarea	Metas	Tiempo
1		Diagnóstica Parte 1	Identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes en cuanto a las operaciones básicas, relaciones de orden y potenciación de los números naturales, conjuntos y relaciones	110
2		Diagnóstica Parte 2	Reconocer las habilidades conceptuales y procedimentales de los estudiantes en la construcción de diagramas de árbol, tablas de doble entrada, diagramas sagitales y representaciones pictóricas. Reforzar los conceptos, normas y reglas de los sistemas de representación	110
3	1	1.1	Usar los sistemas de representación e identificar los conjuntos que intervienen en la situación para resolver problemas de conteo	60
4	1	1.2	Interpretar y relacionar la cantidad de elementos de los conjuntos para encontrar la cantidad de arreglos mediante el uso de los sistemas de representación	70
5	2	2.1	Deducir las características del principio de multiplicación en conjuntos equipotentes a partir de los sistemas de representación utilizados	60
6	2	2.2	Deducir las características del principio de multiplicación en la ordenación de $n$ elementos de un conjunto sin repetición	70
7	2	2.3	Deducir las características del principio de multiplicación en situaciones que requieren ordenar elementos de un solo conjunto con repetición. Comunicar y validar las posibles soluciones de la situación	75
8	3	3.1	Solucionar situaciones que involucran el principio de multiplicación, a partir de las características de los cardinales y las subestructuras planteadas. De igual forma, superar las dificultades asociadas a la implementación de modelos matemáticos relacionados con el principio de multiplicación	85
9		Examen final	Establecer el nivel de alcance de los objetivos de nuestra unidad didáctica, por medio del desarrollo de las tareas de aprendizaje del principio de multiplicación	70

*Nota.* T1.1 = Diseñar la bandera del curso; T1.2 = Refrigerio; T2.1 = Parque Mundo Aventura; T2.2 = Barco pirata; T2.3 = Clave de los candados; T3.1 = Eurocopa

## 7. Conclusiones

Con la experiencia desarrollada en dos años, hemos constatado que es posible elaborar una propuesta pedagógica para un tema de las matemáticas escolares que contenga todo lo necesario para tener incidencia positiva en el aprendizaje de los estudiantes. En nuestro caso, lo hicimos para el principio de multiplicación. Para ello, fue necesario conocer y analizar la teoría curricular, la normativa colombiana, el marco conceptual de PISA 2012 y el plan de área de la institución educativa. También, fue importante profundizar en el contenido matemático para dominar la estructura conceptual y planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema. No podemos olvidar que la evaluación y el análisis de resultados nos ayudaron a mejorar las diferentes tareas de aprendizaje de la unidad didáctica. La implementación de la unidad didáctica nos permitió potenciar las capacidades matemáticas fundamentales y los procesos matemáticos de los estudiantes. Cuando diseñamos, implementamos y evaluamos la unidad didáctica, tuvimos que reflexionar sobre nuestra práctica docente. Esta reflexión nos permitió construir una nueva visión de los procesos de enseñanza.

Las dinámicas de interacción propuestas en las diferentes tareas de aprendizaje potenciaron el desarrollo de las habilidades afectivas de los estudiantes; en particular, mejoraron sus procesos de comunicación en el aula. Además, las tareas de aprendizaje ofrecieron a los estudiantes la posibilidad de diferentes caminos de solución que incluían procedimientos complejos (criterios de logro). De esta forma, apuntamos al desarrollo de las expectativas cognitivas y afectivas que nos habíamos propuesto.

En muchas ocasiones, centramos nuestra atención en la enseñanza de las matemáticas escolares y olvidamos realizar la reflexión sobre el aprendizaje. La experiencia en el programa nos llevó a considerar el aprendizaje de nuestros estudiantes como el centro de nuestra preocupación. Al hacerlo, hemos podido cambiar nuestra práctica docente con el propósito de mejorar y fortalecer los procesos matemáticos de interpretación y solución de situaciones que involucren las técnicas de conteo.

El análisis de los resultados obtenidos nos muestra que los procesos de enseñanza y aprendizaje no pueden predecirse en su totalidad. Las actuaciones de los estudiantes en el aula desbordan aspectos que creíamos cubiertos en la proyección del trabajo. No obstante, los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de información que conforman el esquema de evaluación



que pusimos en práctica nos permitieron constatar en qué medida los estudiantes actuaron como estábamos esperando y qué actuaciones no teníamos previstas. Con base en la información que produjo el sistema ACE, pudimos identificar aquellos aspectos del diseño previo que no contribuyeron como esperábamos al aprendizaje de los estudiantes y pudimos reformular algunas de las tareas de aprendizaje para mejorar nuestra unidad didáctica.

Finalmente, consideramos que MAD 3 incentivó una reflexión continua de nuestro quehacer pedagógico que permitió fortalecer nuestras competencias profesionales, a partir del progreso en conocimientos, habilidades y destrezas que se manifiestan por medio de los retos que asumimos actualmente en el aula. De esta manera, reconocemos que para ser mejores profesores debemos modificar y mejorar nuestra práctica docente. Hemos aprendido que la labor docente implica una dedicación y disposición para apropiarse de los procesos de enseñanza y aprendizaje para construir estrategias sensatas, sistemáticas, innovadoras y creativas, coherentes con los distintos contextos, y tomar decisiones que permitan transformar y lograr nuestros objetivos educativos.

## 8. Referencias

- Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>.
- González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Marín, A. y Gómez, P. (2018). Análisis de datos. En P. Gómez (Ed.), *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 303-369). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemática, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en <http://tinyurl.com/bljb3wd>.

## 9. Listado de anexos

A continuación, presentamos el listado de anexos. Los anexos se pueden consultar en <http://funes.uniandes.edu.co/8706/>.

### Anexo 1. Listado de análisis cognitivo

En este documento, presentamos el listado del análisis cognitivo, el cual contiene: los objetivos de aprendizaje, las tareas prototípicas, los conocimientos previos, las capacidades, las expectativas afectivas, las dificultades y errores, la secuencia de capacidades, grafos de la secuencia de capacidades de los objetivos, caminos de aprendizaje y criterios de logro.

### Anexo 2. Caracterización de los objetivos

Este anexo describe detalladamente la caracterización de los objetivos 1 y 2 del diseño previo de la unidad didáctica.

### Anexo 3. Ficha de tareas del diseño previo

Este archivo presenta las fichas de las tareas de la unidad didáctica, incluyendo la tarea diagnóstica. En cada una de las tareas de aprendizaje se abordan requisitos, metas, formulación de la tarea, materiales y recursos, agrupamientos, interacción y comunicación en clase, temporalidad, previsiones de la tarea y por último el listado de ayudas.

### Anexo 4. Ficha de tareas implementadas

Este archivo presenta las fichas de las tareas de la unidad didáctica, junto con la tarea diagnóstica. En cada una de las tareas de aprendizaje se abordan requisitos, metas, formulación de la tarea, materiales y recursos, agrupamientos, interacción y comunicación en clase, temporalidad, previsiones de la tarea y por último el listado de ayudas.

### Anexo 5. Ficha de tareas del nuevo diseño

En este documento presentamos la ficha de tareas del nuevo diseño en el que presentamos las fichas de las tareas de la unidad didáctica, junto con la tarea diagnóstica. En cada una de las tareas de aprendizaje se abordan requisitos, metas, formulación de la tarea, materiales y recursos, agrupamientos, interacción y comunicación en clase, temporalidad, previsiones de la tarea y por último el listado de ayudas.

### Anexo 6. Diario del estudiante

En este anexo presentamos el formato correspondiente al diario del estudiante para cada una de las tareas de aprendizaje.

#### Anexo 7. Diario del profesor

En este anexo presentamos el formato correspondiente al diario del profesor para cada una de las tareas de aprendizaje.

#### Anexo 8. Examen final y rúbrica

En este anexo se encuentra el examen final de la unidad didáctica, que presenta situaciones en diferentes contextos, en los que el estudiante pone en juego los saberes relacionados con el principio de multiplicación, y la rúbrica que contiene los criterios de evaluación del examen.

#### Anexo 9. Cuestionario final

El cuestionario final nos permitió indagar sobre los aspectos cognitivos que se refieren a la consecución de los propósitos, el diseño de las tareas, la implementación de las tareas, los errores en que incurren los estudiantes y las ayudas que permiten superar las dificultades.

#### Anexo 10. Temporalidad de tareas por sesión

En la temporalidad de tareas por sesión presentamos la fecha de implementación de cada tarea, la cantidad de sesiones, la duración de cada sesión y una breve descripción.

#### Anexo 11. Ponderación de los criterios de logro

Este anexo contiene la ponderación de logro para cada una de las tareas de la unidad didáctica. También, contemplamos los caminos de aprendizaje que puede seguir un estudiante para resolver cada una de las tareas de aprendizaje.

#### Anexo 12. Activación de los criterios de logro

Este documento describe la activación de los de los criterios de logro y los errores en que incurrieron los estudiantes en cada una de las tareas de aprendizaje.