El producto vectorial: esbozo histórico y aplicaciones

Yolima Álvarez y Asdrúbal Moreno
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
yalvarezp@udistrital.edu.co, asmorenomosquera@gmail.com

En este artículo se presenta un esbozo histórico de la operación producto vectorial, estudiando en particular su relación con los cuaternios de Hamilton. En este marco se comentan algunas de sus generalizaciones, en particular la evolución hacia su desarrollo en dimensiones superiores, propuesto por Grassmann y Clifford. Además, se pone en contexto la pugna entre las corrientes cuaternionista y vectorialista, y la resolución de la misma en favor de los vectores (cuaternios imaginarios). Por otro lado, se plantea la conveniencia de estudiar el producto vectorial con un enfoque algebraico dado el hecho de que este producto es un derivado algebraico de los cuaternios. Finalmente, se presentan algunas aplicaciones del producto vectorial en matemáticas y física.

Introducción

Uno de los principales objetivos de la matemática ha sido expresar las relaciones geométricas mediante ecuaciones algebraicas. Así, los griegos en la antigüedad pudieron construir leyes geométricas para describir las relaciones métricas del espacio tal cual sus sentidos las percibían. El descubrimiento de geometrías con propiedades algebraicas que diferían de las propiedades algebraicas de la geometría euclídea dio lugar a que los matemáticos del siglo XIX concentraran su atención en expresar estas nuevas geometrías en términos de una estructura algebraica unificada. Es bien sabido que el álgebra lineal se ha convertido en piedra angular para la realización de este programa, ya que ha permitido expresar de forma simple y elegante la estructura del espacio euclídeo tridimensional y del espacio-tiempo de Minkowski, entre otros. Una parte significativamente importante de este programa está relacionada con la invención, en 1843, de los números cuaternios, por parte de William Rowan Hamilton (1805-1865). Podemos decir que la evolución misma de la teoría de números está íntimamente ligada con la aparición del álgebra; como veremos más adelante, un caso paradigmático lo constituye justamente el producto vectorial.

Álvarez, Y. y Moreno, A. (2015). El producto vectorial: esbozo histórico y aplicaciones. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 2, 35-41.

ESBOZO HISTÓRICO

La aparición de los sistemas hipercomplejos está inspirada, como su nombre lo indica, en la búsqueda de la ampliación del campo de los números complejos. En este proceso, Hamilton optó por varias alternativas, una de ellas, quizá la más natural, fue considerar el caso tridimensional y tratar de construir una multiplicación de triplas de números reales que sirviera también en la representación aritmética de los puntos del espacio.

En la segunda parte del trabajo de Hamilton, titulado *Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time* (1837), se describen los puntos del plano aritméticamente y de forma rigurosa.

Años más tarde, el estudio del caso $n = 3$ lo condujo a formular un producto de cuádruplas, cuya multiplicación goza de las propiedades aritméticas de los números reales exceptuando la conmutatividad. Surge, así, el sistema de los números cuaternios, que es una extensión de los números complejos. Este avance da lugar a un gran número de publicaciones[1] de Hamilton entre 1844 y 1850, bajo el título *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra*.

Hamilton (1843, noviembre) escribe un cuaternio q, como la suma de una parte escalar $s(q)$ y una parte imaginaria o vectorial $v(q)$, en la forma:

$$q = s(q) + v(q) = w + xi + yj + zk \text{ donde } w,\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}.$$

Así pues el sistema de los números cuaternios Q está dado por:

$$Q = \{q | q = w + xi + yj + \mathrm{z}k;\ w, x, y, z \in \mathbb{R};\ \ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}$$

Ahora bien, dados $q_1 = w_1 + x_1 i + y_1 j + z_1 k$ y $q_2 = w_2 + x_2 i + y_2 j + z_2 k$ se define la suma y el producto como sigue:

$$q_1 + q_2 = (w_1 + w_2) + (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k,$$
$$q_1 q_2 = q_3 = w_3 + x_3 i + y_3 j + z_3 k,$$

donde

---

[1] 18 entregas en los volúmenes XXV-XXXVI de *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine.*

$$w_3 = w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2, \qquad x_3 = w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2,$$

$$y_3 = w_1y_2 - x_1z_2 + y_1w_2 + z_1x_2, \qquad z_3 = w_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + z_1w_2.$$

Para el caso de los números cuaternios imaginarios o “vectores” dados por $q_1 = x_1i + y_1j + z_1k$ y $q_2 = x_2i + y_2j + z_2k$, con parte real nula, se tiene que:

$$q_1q_2 = (-x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (y_1z_2 - z_1y_2)i + (z_1x_2 - x_1z_2)j + (x_1y_2 - y_1x_2)k.$$

Conviene resaltar que la parte imaginaria de los cuaternios se adapta perfectamente a la descripción matemática de las coordenadas de un punto en el espacio euclídeo de tres dimensiones. La última igualdad se escribe en notación moderna según la forma:

$$q_1q_2 = -x \cdot y + x \times y.$$

El primer término corresponde al producto escalar mientras que el segundo término corresponde al producto vectorial. Es pues importante enfatizar en que el producto vectorial o producto cruz aparece como un derivado de los cuaternios y toma identidad propia solo hasta cuando O. Heaviside (1850-1925) y J. W. Gibbs (1839-1903) desarrollan el cálculo vectorial a finales del siglo XIX.

Paralelo al trabajo de Hamilton, pero sin la misma acogida, H. G. Grassmann (1809-1877) desarrolla su obra y, en 1844, se publica su libro *Die lineale Ausdehnunglehre; ein neuer Zweig der Mathematik* (*Teoría de la extensión lineal, una nueva rama de la matemática*) en el que presenta un sistema de números complejos con varias unidades, denominados cantidades extensivas. El libro consta de dos secciones, precedidas de una introducción. La primera sección comprende cinco capítulos dedicados a la cantidad extensiva y la segunda consta de cuatro capítulos en los que trata la cantidad elemental. Cada capítulo está dividido en dos partes, la primera dedicada al desarrollo teórico y la segunda a las aplicaciones, esto es, la geometría, la estática, la mecánica, el magnetismo y la cristalografía, tal como lo anuncia en la contraportada del libro.

W. K. Clifford (1845-1879) en su artículo *Applications of Grassmann’s extensive algebra* (1878) reconoce que él ha conocido del tema por los trabajos de Grassmann publicados en el *Journal de Crelle* y por el documento *Theorie der complexen Zahlensysteme* (*Lecciones sobre números complejos*) de H. Hankel, publicado en 1867. Su trabajo consiste en generalizar los sistemas de cuaternios y bicuaternios a cualquier número de dimensiones. Clifford realiza la conexión entre los trabajos de Hamilton y Grassmann, publicados ambos en 1844, y logra además describir las propiedades geométricas de vectores, planos y en general objetos en dimensiones superiores.

La teoría de los cuaternios tuvo gran difusión inicialmente debido al esfuerzo del físico y matemático inglés P. G. Tait (1831-1901), quien impulsó vigorosamente a los físicos de la época a escribir sus trabajos en términos de cuaternios. A pesar de los decididos esfuerzos de Tait, la comunidad científica se inclinó finalmente hacia la corriente vectorialista, materializada en los trabajos de Heaviside y Gibbs quienes tuvieron éxito al conseguir incorporar en la física y la ingeniería una pequeña parte de las ideas de Hamilton, Grassmann y Clifford bajo el nombre de cálculo vectorial.

Una posible explicación de este hecho se sugiere en el debate acerca de la interpretación geométrica de los cuaternios, ya que permitirían sumar puntos y triplas, algo que pareció en aquella época como estrambótico. Fueron los trabajos de Clifford, los que permitieron establecer la profunda estructura lógica que implica la interpretación de los cuaternios. Lastimosamente la temprana muerte de Clifford condujo al anonimato de tal comprensión.

En relación a la maquinaria matemática del cálculo vectorial es importante anotar que históricamente el primero en utilizar el operador nabla fue Hamilton, quien al aplicarlo a una función vectorial F obtuvo el cuaternio:

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) k$$

Posteriormente, J. C. Maxwell en su célebre obra *A treatise on electricity and magnetism*, publicada en 1873, llama convergencia a la parte escalar y rotación o rotacional a la parte vectorial de este cuaternio.

Es precisamente en el trabajo de Maxwell donde se puede rastrear el germen de las ideas de Heaviside en relación con el análisis vectorial. Dada la sofisticación del aparato matemático utilizado por Maxwell en términos de cuaternios, Heaviside se propuso presentar la teoría en un lenguaje matemático más asequible a los ingenieros y físicos de la época. Para ello aisló las partes escalar e imaginaria de los cuaternios, presentándolas en forma independiente e incluyó las operaciones producto escalar y producto vectorial. Contribuyó al análisis realizando un estudio exhaustivo del gradiente, la divergencia, el rotacional y el laplaciano. Desde un punto de vista más teórico y riguroso Gibbs entre 1881 y 1884 hizo un trabajo paralelo, constituyéndose así el cuerpo de doctrina que hoy llamamos Análisis Vectorial.

APLICACIONES

Tanto en las matemáticas como fuera de ellas encontramos gran cantidad de aplicaciones del producto vectorial. En esta sección destacamos, en particular, la ventaja de su uso en la escritura de algunas expresiones en la matemática misma y en la física.

En las matemáticas, una de las aplicaciones más conocidas es el cálculo del área de un paralelogramo generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Esta área suele calcularse mediante $|\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$, donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Es fácil mostrar que $|\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$.

El rotacional de un campo vectorial también puede expresarse en términos de un producto vectorial:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}, \text{ donde } \vec{F} \text{ es una función vectorial y } \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}.$$

En consecuencia, aparece en la formulación del teorema de Stokes:

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde S es una superficie orientada suave a trozos y C es una curva simple cerrada que limita a S.

El producto vectorial tiene gran variedad de aplicaciones en mecánica clásica, electrodinámica clásica, mecánica cuántica, etc. En el marco de la electrodinámica clásica podemos citar la ley de Biot-Savart, las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz para dar algunos ejemplos.

La ley de Biot-Savart se emplea cuando se desea conocer el campo magnético $d\vec{B}$ en un punto P debido a un elemento de corriente $Id\vec{l}$ que conduce una intensidad de corriente I.

$$d\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{id\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}$$

donde r denota la distancia entre el punto y el elemento de corriente, y μ es la permeabilidad magnética del vacío.

En medios no dispersivos e isótropos las ecuaciones de Maxwell están dadas por:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

donde el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ y la intensidad magnética $\vec{H}$ están relacionadas con $\vec{E}$ y $\vec{B}$ mediante las ecuaciones $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ y $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Estas ecuaciones contienen en su totalidad toda la física del campo electromagnético clásico y predicen la existencia de ondas electromagnéticas cuya velocidad de propagación corresponde a la velocidad de la luz. Inicialmente fueron escritas por J. C. Maxwell en términos de cuaternios, y reescritas por O. Heaviside mediante el uso del análisis vectorial.

En el marco de la electrodinámica de Maxwell-Lorentz la fuerza que actúa sobre una partícula con carga eléctrica q moviéndose con velocidad $\vec{v}$ bajo la acción de un campo eléctrico $\vec{E}$ y una inducción magnética $\vec{B}$ se puede escribir en la forma:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

donde el primer término corresponde a la fuerza eléctrica y el segundo a la fuerza magnética. Es claro que la fuerza magnética solo actúa sobre una partícula con una velocidad no nula, y su línea de acción es perpendicular al plano formado por el vector de velocidad y el vector de inducción magnética.

REFERENCIAS

Clifford, W. K. (1878). Applications of Grassmann's extensive algebra. *American Journal of Mathematics*, *1*(4), 350-358.

Hamilton, W. R (1837). Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time. En *The Transactions of the Royal Irish Academy* (vol. XVII, pp. 293-422). Dublín, Irlanda: P. Dixon Hardy. Disponible en: http://www.biodiversitylibrary.org/item/47866#page/472/mode/1up; http://www.emis.de/elibm/classics/index.html

Hamilton, W. R. (1843, noviembre). On a new species of imaginary quantities, connected with a theory of quaternions. En *Proceedings of the Royal Irish Academy, for the year 1841-2* (vol. 2, parte VI, pp. 424-434). Dublín, Irlanda: M. H. Gill. Disponible en: http://www.biodiversitylibrary.org/item/108469#page/1/mode/1up; http://www.emis.de/elibm/classics/index.html