La relación de Euler: una conexión entre la geometría y la topología

Andrés Bello y Cristian Peña
Universidad Pedagógica Nacional
kmylobello@gmail.com, cristianp987@hotmail.com

En este breve artículo, se presenta una visión general del proceso que lleva al planteamiento de la relación de Euler para poliedros convexos y su importancia para el surgimiento de la topología. Se procurará hacer énfasis en los elementos geométricos utilizados en la relación de Euler, y en mostrar cómo a partir de ellos nace, años más tarde, una nueva manera de observar los objetos geométricos, idea central para el estudio de la topología.

Planteamiento de la fórmula

En 1750, el matemático Leonhard Euler propone una relación que se cumple para todo poliedro convexo: el número de vértices más el número de caras menos el número de aristas es igual a 2 ($V + C - A = 2$), un resultado que surge al intentar clasificar los poliedros, dejando de lado su parte métrica y pensando en ellos como objetos compuestos de otros elementos geométricos. La importancia de este producto matemático no va ligada solo a su contenido, puesto que esta es una ecuación que a simple vista no tiene nada fuera de lo usual; su trascendencia dentro del desarrollo de la matemática (en particular, en el surgimiento de la topología) se debe a las ideas centrales que se tuvieron en cuenta para llegar a su descubrimiento, ya que antes de Euler, solo en Descartes se entrevé la intención de desligarse de la parte métrica de algunos de los problemas geométricos, pero por falta de ejemplos y resultados ligados a esta nueva manera de estudiar matemáticas no se le da mucha importancia. Sin embargo, cosas como esta no impiden que en el siglo XVII, el pensar de una manera diferente a la usual en la geometría diera las primeras herramientas para el surgimiento de una nueva rama de las matemáticas, la topología.

Validación de la fórmula

Demostrar la relación de Euler para poliedros convexos tomó alrededor de 40 años luego de que se la presentara en el documento *Elemental Doctrine*

Bello, A. y Peña, C. (2015). La relación de Euler: una conexión entre la geometría y la topología. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 93-94.

Solidorum; sin embargo, antes de que se hallara una demostración formal, Euler presentó al mundo matemático una justificación de su relación, pero no se aceptó debido a inexactitudes en el paso a paso de la demostración.

La idea central de la justificación presentada por Euler se basa en:

> A cualquier poliedro se le puede retirar un único vértice de manera algebraica y geométrica, haciendo un corte conveniente; de esta manera, si se quiere retirar un vértice A, se busca un plano tal que se elimine únicamente dicho vértice. Tomando como verdadera esta idea, si se repite el proceso de corte para cada uno de los poliedros resultantes, con una serie finita de cortes se puede llegar a tener como resultado una pirámide de base triangular, para la cual es fácil corroborar la relación para los poliedros convexos ya que se sabe que la relación de Euler se cumple para este tipo de poliedros.

Legendre logró demostrar la relación para poliedros convexos propuesta por Euler. Su demostración se basa en la transformación de cualquier poliedro convexo en la esfera, idea que se liga de alguna manera a la justificación de Euler.

La fórmula de Euler y el surgimiento de la topología

Tiempo después Lhuilier y Hessel se preguntan si esta fórmula funciona para toda clase de poliedros, y muestran algunas excepciones. Clasificando los poliedros en diferentes clases (alrededor del siglo XVII) nace la topología y se da el mérito del surgimiento de la misma a dos trabajos, en particular: el problema de los puentes de Könisberg y la relación para poliedros convexos, ambos realizados por Leonhard Euler. No en vano estos trabajos dan surgimiento a la topología: de ellos se desprenden ideas centrales de esta nueva rama de la matemática. Ideas como las propiedades que se mantienen invariantes al transformar figuras por medio de pliegues, dilataciones, contracciones o deformaciones y el trabajo alejado de las métricas de un objeto matemático parten inicialmente de la relación de Euler; es por eso que esta fórmula termina siendo el primer invariante topológico conocido, y uno de los trabajos que sirve como cimiento para el desarrollo de la topología.