El elipsógrafo de Van Schooten: consideraciones para la enseñanza de la elipse

Juan Beltrán
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
calicheud@yahoo.com.co

Este documento presenta consideraciones para la enseñanza de la cónica elipse, a partir de aspectos históricos, matemáticos y didácticos relativos a ella. Se centra la mirada en la importancia de las herramientas mecánicas para la enseñanza de las cónicas y su relación con argumentos demostrativos. Se proponen indicaciones generales de actividades para la enseñanza de la elipse.

Es necesario aclarar que este documento presenta algunas consideraciones expuestas en Beltrán (2014) y algunos avances en mi trabajo de grado para título de Magíster en Educación con énfasis en Educación Matemática. Este documento se divide en dos secciones: la primera presenta consideraciones a los aspectos teóricos, incluyendo lo epistemológico y didáctico de las cónicas; la segunda sección se centra en actividades que se pueden realizar para su enseñanza, basadas en los trabajos de Boytchev (2011) y Beltrán (2014).

Consideraciones relativas a los aspectos teóricos

Antes de proponer algunas indicaciones generales para las actividades de enseñanza de la cónica elipse es indispensable revisar algunos aspectos teóricos que pueden dar pautas para la enseñanza de este concepto matemático. En este documento se revisan tres aspectos teóricos importantes: matemáticos, históricos y didácticos.

Aspectos matemáticos

Diferentes libros de geometría analítica (e. g., Larson, Hostetler, Edwards y López, 1989; Lehmann, 1992/1974) muestran distintas formas de abordar el estudio de las cónicas. Larson et al. (1989) mencionan tres formas de introducir las cónicas. La primera se basa en la concepción griega de las cónicas como intersecciones de conos y planos, la segunda recurre a la ecuación general de segundo grado y la tercera forma (la que acogen estos autores) se basa en la

Beltrán, J. (2015). El elipsógrafo de Van Schooten: consideraciones para la enseñanza de la elipse. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 95-102.

concepción de lugar geométrico, presentando, así, las condiciones que cumple cualquier punto del lugar geométrico y la fórmula canónica de cada cónica.

En términos de Larson et al. (1989), una elipse es el conjunto de todos los puntos (x, y) cuya suma de distancias a dos puntos fijos distintos (focos) es constante (Cuadro 1). La recta que une los focos corta la elipse en dos puntos llamados vértices. La cuerda que une los vértices es el eje mayor, y su punto medio es el centro de la elipse. La cuerda perpendicular al eje mayor por el centro es el eje menor de la elipse. La forma canónica de la ecuación de una elipse con centro en (h, k) y ejes mayor y menor de longitudes $2a$ y $2b$, respectivamente, donde $a > b$ es:

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
Eje mayor horizontal	Eje mayor vertical

Cuadro 1. Expresión matemática actual de la elipse

Aspectos históricos

El porqué de la necesidad de considerar la historia tanto del proceso de evolución de las matemáticas como de la implementación de herramientas mecánicas para (re)construir y demostrar que la herramienta específica describe una determinada cónica, se evidencia a partir de lo que expone Bell (1985, p. 54): “Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas”. Además evidencia que “las herramientas son parte de la misma construcción de las matemáticas en muchos momentos”. Beltrán (2014) expresa entre sus conclusiones que es importante el uso de herramientas mecánicas en la construcción de las cónicas. Si se acepta que el uso de las herramientas (o artefactos mecánicos) puede ser provechoso para la enseñanza de las derivadas, es necesario pensar cómo incorporarlas en la actividad del aula para que los estudiantes lleguen a reconocer las propiedades de las cónicas y, así, mediante las adigualdades, aquellas se conviertan en recurso para la comprensión del saber relativo a la derivada sin involucrar la preconcepción del concepto de límite.

Ahora bien, considerando que es muy amplio aspirar a utilizar todo el espectro de herramientas mecánicas desarrolladas durante los siglos XVI y XVII (época donde se realiza la mayor creación de este tipo de herramientas), se enfatiza en el artefacto realizado por Frans Van Schooten, un elipsógrafo, que permite mostrar de manera “sencilla” algunas de las propiedades de la curva elipse. Influyen en Van Schooten, para la creación de su artefacto mecánico, los textos de Apolonio, Arquímedes y Pappus, todos relacionados con las cónicas. Otro hecho que lo influye es que durante su formación matemática, entre los años 1635 y 1640, Van Schooten conoce a René Descartes, quien le envía algunos de sus documentos. Ruiz (2003) muestra que la relación entre Descartes y Van Schooten llegó a tal punto que Descartes le da a conocer su texto *Géometrie* antes de ser publicado, con el fin de que Van Schooten expusiera sus apreciaciones y realizara la traducción del documento al latín.

A continuación se describe el elipsógrafo de Van Schooten y, a partir de la matemática de la época del inventor, se demuestra que la curva que traza es una elipse, con lo cual se evidencia cómo Van Schooten acepta que ese instrumento realiza la curva *elipse*. Dado que la herramienta material no permite trazar de manera continua toda la curva, en este artículo se alude a una versión digital que simula el elipsógrafo de Van Schooten (Figura 1). El elipsógrafo está formado por dos barras rígidas en forma de cruz (representadas en color azul en la Figura 1) y dos barras móviles (representadas una, en color morado y la otra, en rojo y verde en la Figura 1). En la versión física las barras fijas tiene la forma de T inversa.

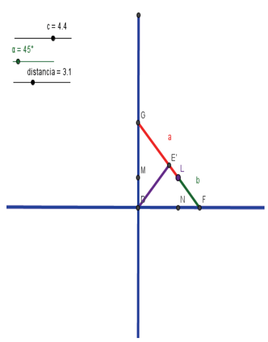

Figura 1. Representación de la versión digital que simula el elipsógrafo de Van Schooten

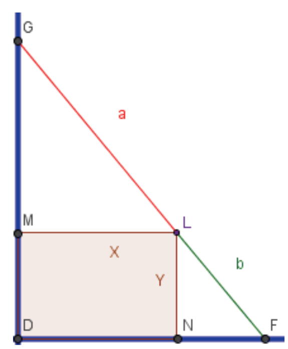

Figura 2. Acercamiento a los triángulos

Para dar una idea del funcionamiento del elipsógrafo, ha de saberse que el trazo de la curva depende del movimiento que se le imprima directamente al segmento de color morado, movimiento este del cual depende el movimiento del segmento de color rojo y verde; en ese proceso, el punto *L* que pertenece al segmento rojo y verde, describe la curva. A la curva descrita se le llama *curva mecánica*, ya que es a partir del movimiento simultáneo de dos líneas rectas como ella se genera. Para la época de Van Schooten, esta curva no se aceptaba como una curva matemática, pues su aceptación implicaba contravenir la geometría euclidiana que no permite realizar curvas a partir de rectas. Sin embargo, era necesario demostrar que la curva descrita era una *elipse* y la demostración sería aceptada si usaba únicamente la matemática euclidiana.

La demostración se basa en la proporción de áreas de los triángulos GML y LNF (Figura 2). A continuación se expresa la demostración a partir de los datos conocidos presentes en el instrumento.

Datos conocidos: $GL = a$, $LF = b$, $\angle GLM \cong \angle LFN$, $\angle MGL \cong \angle NLF$. A partir de esto se puede determinar que los triángulos GLM y LFN son semejantes; por tanto, se tiene una proporción entre las medidas de sus lados. De esto se puede afirmar que:

$$\frac{DN^2}{GL^2} : \frac{NF^2}{LF^2}$$

El Teorema de Pitágoras permite mostrar que $NF^2 = LF^2 - LN^2$. Así, la proporción anterior queda como:

$$\frac{DN^2}{GL^2} : \frac{LF^2 - LN^2}{LF^2} \qquad \frac{DN^2}{GL^2} : \frac{LF^2}{LF^2} - \frac{LN^2}{LF^2} \qquad \frac{DN^2}{GL^2} : 1 - \frac{LN^2}{LF^2}$$

Usando Noción Común 2 de Euclides (*Libro I*) se puede decir que:

$$\frac{DN^2}{GL^2} + \frac{LN^2}{LF^2} : 1 - \frac{LN^2}{LF^2} + \frac{LN^2}{LF^2} \qquad \frac{DN^2}{GL^2} + \frac{LN^2}{LF^2} : 1$$

Es decir, la suma entre dos razones da como resultado la unidad para todos los puntos L que describen la curva. Esto concuerda con la noción de elipse que se tenía en la época. Además, como Van Schooten tuvo acceso a los documentos de Descartes, se presenta la demostración analítica con el fin de mostrar que los mismos procedimientos usados llevan a la notación actual de la elipse.

$DN = x$	$DM = y$	$NF^2 = b^2 - y^2$	$GM^2 = a^2 - x^2$

Cuadro 2. Conversión de la notación a los términos actuales

Con los datos anteriores (Cuadro 2), se explica lo realizado, que coincide con la forma actual de hacer la demostración (Cuadro 3):

$\frac{x^2}{a^2}=\frac{b^2-y^2}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2}=\frac{b^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Cuadro 3. Conversiones aplicadas a la demostración anterior

Aspectos didácticos

Desde el punto de vista didáctico, trabajos como los de Cortés y Soto (2012) muestran que el uso de instrumentos de creación de cónicas como el *anti-paralelogramo articulado de Van Schooten y el elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards* permite un acercamiento al concepto de elipse a partir de su reconstrucción. Da también una visión de la evolución del concepto, ya que se implementan diferentes herramientas para reconstruir diferentes tipos de curvas.

El aprendizaje de las secciones cónicas en el aula escolar presenta varias dificultades, errores y obstáculos cognitivos y didácticos. Referente a lo cognitivo se presenta el conflicto con el uso de simbología adecuada. Godino y Font (2003) mencionan que este tipo de dificultad se puede presentar al realizar yuxtaposiciones y operaciones entre términos desconocidos (uso de las variables x, y) y términos conocidos (términos h, k). Rico (1995) presenta varios tipos de errores de significado que tienen los estudiantes; menciona, en particular, los errores presentes en el pensamiento humano, entre los cuales están los errores inducidos por el lenguaje o la notación. Además Rico señala que estos errores (de significado) se presentan cuando los estudiantes ignoran el significado de los símbolos o conceptos con los que están trabajando.

Como lo menciona Boytchev (2011), existe la necesidad de mostrar a los estudiantes las cónicas como algo más que los diferentes tipos de cortes de un plano a un cono. Sería significativo que los estudiantes llegaran a interactuar con las cónicas desde diferentes puntos de vista, ya que esto les permitiría vislumbrar algunas de sus propiedades.

Además, experimentos tales como generar una elipse con la luz de una lámpara, dibujar una hipérbola utilizando un hilo de longitud fija, o construir un mecanismo de rodadura que genera una elipse pueden representar aportes considerables para que el estudiante logre observar la forma de las cónicas y diferenciarlas; sin embargo, no permiten realmente, como lo muestra

Boytchev (2011) ofrecer explicaciones claras sobre las diferencias entre estas figuras, o la manera de calcular los focos de la elipse.

Boytchev (2011), con relación al uso de artefactos mecánicos sostiene que existe un interés latente por usar este tipo de artefactos para la enseñanza de conceptos matemáticos. Existe una gran variedad de herramientas para la realización de representaciones de las cónicas. La Universidad de Módena y Reggio Emilia presenta en uno de sus sitios web[1] una gran variedad de estas herramientas, cada una con un simulador interactivo que permite ver su funcionamiento así como las medidas variables.

CONSIDERACIONES PARA LA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS

Para la enseñanza de las cónicas (y, en este caso, la elipse), pero no exclusivamente para dicho tema, se puede señalar que existen varias metodologías (e. g., ingeniería didáctica e investigación-acción) y estrategias. En este documento se presentan actividades generales para enseñar la elipse a través de la resolución de problemas matemáticos, considerando las posturas de Bohórquez y Sanjuán (2009).

Si bien no se presentan actividades puntuales, se toman y retoman algunas indicaciones para actividades de enseñanza de las cónicas. Para esto es necesario considerar lo que presenta Beltrán (2014) para la enseñanza del concepto de derivada con el uso de las cónicas. Esta idea está en consonancia con la de varios autores que proporcionan indicaciones generales para actividades con este fin. Entre estos autores se destaca Boytchev (2011), quien propone actividades generales en las que el uso de herramientas, sean cotidianas o mecánicas, aportaría a la enseñanza de las cónicas, y el uso de alguna de estas permitiría a los estudiantes el pensar no solo en las cónicas como contenido matemático sino como un concepto vivo presente en aspectos de la vida tan sencillos como jugar con la luz y observar un vaso con agua.

Para la enseñanza de la derivada, Beltrán (2014) manifiesta la necesidad del trabajo con curvas cónicas, desde la construcción y el análisis de sus propiedades. Si bien el interés no está en la enseñanza de las cónicas, sino de la derivada desde una conceptualización de la recta tangente, se destaca la necesidad de conocer, realizar y analizar las curvas cónicas. Para ello, se usan

[1] http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=76&Itemid=153

ciertas herramientas mecánicas como el parabológrafo de Cavalieri y el elipsógrafo de Van Schooten. Crean también los artefactos, estudian las curvas y demuestran que cada curva obtenida efectivamente es la cónica que se pretendía obtener. A continuación, con base en Beltrán (2014) quien aporta una organización secuencial de las posibles actividades según las principales acciones para el uso de las cónicas, y en Boytchev (2011) quien sugiere actividades potenciales que tienen en cuenta las herramientas presentadas para la enseñanza de las cónicas, se propone la siguiente secuencia de actividades:

1	Introducción	Presentar a los estudiantes unas primeras aproximaciones a la forma de graficar funciones de diferentes tipos (lineales y cuadráticas). Presentar los objetos con los que se va a trabajar. Se espera que estos objetos sean de la vida cotidiana (e. g., vasos con agua, luces y sombras). Esto con la intención de que los estudiantes puedan determinar algunas relaciones entre los sucesos y las cónicas.
2	Trabajo con objetos cotidianos	Trabajar las herramientas de la vida cotidiana desde aspectos más centrados: se pueden incluir las características de las sombras según la posición de una fuente de luz o según la inclinación del vaso con agua. Se espera que puedan realizar caracterizaciones tanto en lenguaje informal como en lenguaje semiformal.
3	Construcción herramientas mecánicas	Una vez realizado el trabajo con herramientas cotidianas, se espera que los estudiantes hayan logrado unas primeras concepciones de las cónicas al haber construido las herramientas mecánicas que las producen (o simulaciones, según la población misma). También que los estudiantes puedan identificar similitudes entre lo observado con las herramientas mecánicas y los objetos cotidianos.
4	Trabajo con herramientas mecánicas	El construir las herramientas y observar las características tanto de las construcciones como de las curvas que se generan, se espera que le permita a los estudiantes observar las características de las cónicas vistas tanto en los objetos cotidianos como con las herramientas. Se espera que los estudiantes logren profundizar en el lenguaje para describir la elipse y hacer uso de este para determinar algunas propiedades que se observen de esta cónica.

Conclusiones

Es de mencionar que la implementación de una herramienta específica de cualquier tipo afecta la interacción del estudiante con el saber específico que se pretende enseñar mediante su uso. Esto debido a que la interacción privilegia algunas perspectivas mientras que invisibiliza otras. Boyer (1986) muestra que en ciertos momentos históricos, las interacciones con herramientas para solucionar un problema específico de las cónicas (y otros conceptos matemáticos) privilegiaron algunas interpretaciones de tales saberes. En este sentido, la implementación de las herramientas que quieren poner en juego, efectivamente pueden invisibilizar algunas características de la elipse o restringir la aplicación de estas características en contextos reales (e. g., la astronomía).

REFERENCIAS

Bell, E. (1985). *Historia de la matemática* (M. Martínez Pérez, Tr.). México D.F., México: Fondo de Cultura Económica.

Beltrán, J. (2014). *La noción de tangente que presenta Fermat, aportes a la enseñanza de la derivada* (tesis de pregrado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Bohórquez, A. y Sanjuán, A. (2009). *Consideraciones de la resolución de problemas en la actualidad*. En G. García (Comp.), Memorias Noveno Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (pp. 35-43). Valledupar, Colombia: Asocolme.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Universidad Textos.

Boytchev, P. (2011). Virtual model of conic section. En A. Jimoyiannis (Ed.), *Research on e-Learning and ICT in Education* (pp. 267-281). New York, EUA: Springer.

Cortés, J. y Soto, H. (2012). Uso de artefactos concretos en actividades de geometría analítica: una experiencia con la elipse. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *1*(2), 159-193.

Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada, España: Universidad de Granada.

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. y López, J. (1989). *Cálculo y geometría analítica*. México D.F., México: McGraw-Hill.

Lehmann, Ch. (1992/1974). *Geometría analítica* (2ª ed.). La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Ruiz, Á. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.