Tratamiento de los teoremas de existencia en un libro de geometría plana

Andrea Ortiz, Santiago Cardozo y Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional
dma_yortiz931@pedagogica.edu.co, dma_scardozo900@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

El grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* (*Æ · G*) hace una propuesta curricular para el nivel universitario que tiene como objetivo, entre otras cosas, que los estudiantes den sentido a cuestionarse sobre la existencia de los objetos geométricos en el marco de una teoría específica, y perciban que no tiene mucho significado hablar de objetos cuya existencia no se ha justificado. En este artículo se pretende exponer la clasificación de los teoremas de existencia incluidos en el libro *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*, desde dos perspectivas: en la primera, se mostrará la clasificación de los teoremas teniendo en cuenta su enunciado; en la segunda, la clasificación se describirá según su demostración. El libro mencionado sintetiza la propuesta del grupo *Æ · G*.

Planteamiento del problema

Cuando en un curso universitario se pretende cuestionar la existencia de los objetos que hacen parte de un sistema teórico específico, pensar en una justificación para garantizar tal existencia parece no tener sentido para los estudiantes. Claro, consideran que la existencia de los objetos es algo natural o sencillamente piensan que es suficiente la definición de los objetos para justificar su existencia. En relación con esto, de Guzmán (1998, citado en Selden, 2012) comenta que una de las dificultades más notorias que enfrentan los estudiantes, en su transición de la secundaria al nivel universitario, tiene que ver con las demostraciones de existencia de objetos, dado que no es fácil para ellos reconocer la necesidad de garantizar teóricamente tal existencia. En general, los objetos matemáticos se introducen en la escuela mediante una definición, se estudian a partir de la manipulación de diferentes tipos de representación, y la justificación de su existencia no es un tema que usualmente se trate; en este contexto, la existencia de los objetos geométricos no se cuestiona.

Ortiz, A., Cardozo, S. y Molina, Ó. (2015). Tratamiento de los teoremas de existencia en un curso de geometría plana. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 155-162.

En cuanto a lo anterior, el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) hace una propuesta curricular para el nivel universitario, uno de cuyos objetivos es que los estudiantes den sentido a cuestionarse sobre la existencia de los objetos geométricos en el marco de una teoría específica (para este caso, la geometría plana euclidiana), y perciban que no tiene mucho significado hablar de objetos (salvo unos pocos –punto, recta y plano) cuya existencia no se ha justificado. De manera concreta, el estudio reportado en este artículo, si bien no pretende concentrarse en una propuesta didáctica para tratar teoremas de existencia, sí pretende contribuir a abordar la problemática planteada con un análisis de los teoremas de existencia desde un punto de vista matemático. Consideramos que hacer un tal estudio contribuye a que asuntos como los que destacamos a lo largo de este documento, sean tenidos en cuenta por profesores cuando diseñen propuestas que aborden estos teoremas en la universidad (y por qué no, en el nivel secundario). Así nuestra intención no sea formular una propuesta didáctica, presentamos una clasificación de los tipos de tareas/problemas que el libro *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (Samper y Molina, 2013) incluye para abordar los teoremas de existencia que trata. Con ello, damos ciertas luces, un tanto específicas, para un potencial diseño didáctico sobre el asunto.

MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA

En primera instancia, se expone la idea de teorema en Mariotti (1997). En seguida, se hace referencia a la clasificación de las definiciones desde la perspectiva de dos autores, y se explica su pertinencia/utilidad en el trabajo[1] que se está desarrollando.

Teorema desde la perspectiva de Mariotti

Según Mariotti (1997), la característica principal de un teorema es estar enmarcado por una teoría conformada por un conjunto de principios y reglas que permitan validar el enunciado mediante el cual se le formula. Trabajando esto desde la perspectiva matemática, lo que se busca es demostrar la validez de enunciados que sean ciertos y que consigan validez en correspondencia con

[1] Este artículo constituye un informe parcial del trabajo de grado, que lleva su mismo título, para optar por el título de Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

determinada teoría. Partiendo de esto, la autora afirma que un teorema es un un sistema de tres elementos: afirmación o enunciado, demostración, y teoría.

El enunciado está conformado por una estructura lógica y un contenido geométrico. En la estructura lógica del enunciado se vinculan la hipótesis y la tesis de la proposición condicional con la que se expresa el enunciado del teorema; por otra parte, el contenido geométrico del enunciado del teorema está constituido por los objetos y propiedades de índole geométrica que están involucrados en el enunciado, y por la relación de dependencia que liga dichos objetos con algunas propiedades.

En cuanto a la demostración del teorema se consideran dos elementos importantes: la garantía y la necesidad de aceptación. Maturana (1988, citado en Mariotti, 2006) explica la importancia de estos dos elementos y la relación que existe entre ellos; dicha relación inicia cuando el sujeto valida un enunciado, y continúa cuando este enunciado se acepta como parte de la teoría en la que se está trabajando y, por tanto, se convierte en una potencial garantía; la importancia de este proceso radica en que el estudiante, con base en los enunciados que valida, construye un marco teórico sobre el que puede fundamentar las demostraciones que haga.

En otras palabras, se puede hablar de demostración cuando hay un enunciado que contiene elementos que pueden ser justificados y cuando existe un marco teórico en el que esos argumentos tienen validez (Mariotti, 2012). En relación con lo anterior, se considera importante el tercer elemento mencionado por Mariotti, la teoría. Disponer de una teoría implica tener un sistema de principios compartidos y reglas de deducción que están relacionadas entre sí, y los cuales soportan los argumentos para garantizar que un enunciado es verdadero. Una teoría matemática está compuesta por postulados, teoremas y definiciones. A propósito del marco teórico, es necesario realizar una descripción de la teoría de Birkhoff, modelo usado por el libro Samper y Molina (2013) para abordar el estudio de la geometría plana euclidiana.

Birkhoff y la geometría euclidiana

Algunos matemáticos que trabajaban con la geometría de Hilbert quisieron enfatizar en la enseñanza de la geometría en el ciclo de secundaria, para lo cual debieron adaptar los axiomas formulados por Hilbert. Respecto a esto, Birkhoff hizo una propuesta que se publicó en 1940 en el texto escolar *Basic*

Geometry. El sistema propuesto por Birkhoff incluye cuatro postulados de geometría euclidiana; se caracteriza por cumplir una serie de propiedades que se pueden confirmar con la elaboración de construcciones que se abordan con regla y transportador. A continuación se describen algunos de los elementos de la teoría de Birkhoff. Los postulados que caracterizan esta teoría son los siguientes:

> Los puntos $A, B, \ldots$ de cualquier recta se pueden colocar en correspondencia (1,1) con el conjunto de los números reales, para que $|x_B - x_A| = d(A, B)$ para todos los puntos A, B. Definiendo de esta manera distancia.
>
> Las semirrectas $l, m, \ldots$ a través de cualquier punto O puede ser puesto en correspondencia (1,1) con los números reales (mod 2π), por tanto, si $A \neq O$ y $B \neq O$ son puntos de l y m respectivamente, la diferencia $a_m - a_l$(mod 2π) es la medida del ángulo $\angle AOB$. Además, si el punto B en m varía continuamente en una recta r que no contiene al vértice O, el número a_m varía continuamente también.

El sistema teórico usado por Samper y Molina (2013) se basa en la propuesta de Moise (1963), que a su vez se fundamenta en el modelo de Birkhoff.

Definiciones como parte del sistema teórico

Las definiciones en un sistema teórico desempeñan un papel crucial. A través de las definiciones, se introducen los objetos de la teoría: las definiciones expresan las propiedades características de los objetos; por tanto, otras propiedades de los objetos definidos, las relaciones entre ellos y los objetos de la teoría se pueden establecer mediante procesos de deducción.

Expuesta la importancia de las definiciones dentro de un sistema teórico, a continuación, se muestran dos perspectivas, la de Aristóteles y la de Mariotti, en relación con dicho asunto; ello dará cierto contexto para el estudio que se pretende realizar.

Definiciones desde la perspectiva de Aristóteles

Aristóteles clasificó las definiciones en nominales y reales. En términos de hoy, podemos decir que las *nominales* proveen una lista de propiedades que caracterizan complemente al objeto sin aludir a otros objetos más que los que conforman al objeto mismo (Harari, 2004). Tales propiedades no se pueden obtener directamente en el marco de un sistema teórico específico, es decir, no existen elementos (i. e., postulados o teoremas) del sistema teórico que explícitamente y de manera inmediata provean un objeto con dichas propiedades. Por otro lado, las definiciones *reales* se reconocen por proveer una lista de propiedades del objeto que se vale de otros objetos de la teoría (que no necesariamente componen a la figura) cuya existencia previamente ha sido demostrada en el marco del sistema teórico. De esta lista de propiedades se pueden deducir las propiedades del objeto dadas en la definición nominal.

Por ejemplo, si se toma la definición nominal del objeto geométrico *rectas paralelas* (i. e., dos rectas que son coplanares y no se intersecan), solo se pueden listar las propiedades que caracterizan completamente a este objeto, es decir, la propiedad de ser coplanares y la de no intersecarse, sin embargo no se puede realizar un construcción directa de dicho objeto, puesto que la definición no provee otros elementos distintos a los antes mencionados.

En cuanto a la definición real del mismo objeto: (i) dos rectas son paralelas si y solo si son perpendiculares a una misma recta, o (ii) dos rectas son paralelas si y solo si al trazar una trasversal a ellas, los ángulos alternos internos son congruentes, se observa que se alude a propiedades de otros objetos con los cuales es posible construir el objeto así definido. Por ejemplo, si se toma como definición real la expuesta en (i), basta con construir dos rectas perpendiculares a una misma recta y comprobar que dichas rectas resultan ser paralelas. Por otro lado, si se toma la expuesta en (ii), se hace necesario construir dos rectas, trazar una recta transversal, y comprobar que las rectas resultan paralelas si los ángulos alternos internos son congruentes.

Definiciones desde la perspectiva de Mariotti

Mariotti y Fischbein (1997) sostienen que en matemáticas todos los objetos deben ser declarados y claramente definidos. Se refieren a dos tipos de definición: (a) la definición para introducir los objetos básicos de la teoría, y (b) la definición para introducir nuevos elementos en la teoría. Las definiciones del primer tipo se declaran a través de los axiomas que caracterizan los objetos (e. g., la definición de grupo en la teoría del Álgebra Abstacta), mientras que para las del segundo tipo, se permite la introducción de un nuevo elemento mediante algún teorema que afirme la existencia de tal elemento dentro de la teoría.

En esta perspectiva, y teniendo como marco el sistema de Birkhoff se pueden distinguir objetos que se clasifican en el tipo b de definiciones mencionado por tales autores; claro, salvo los objetos primitivos del sistema, todos los objetos involucrados en él se introducen mediante un teorema de existencia. Los objetos primitivos, si bien no son definidos, existen en dicho sistema producto de postulados (axiomas en términos de Mariotti y Fischbein, 1997).

METODOLOGÍA

La metodología general del trabajo es un análisis de texto. Las etapas del estudio fueron: búsqueda de referentes teóricos, construcción del marco teórico, construcción de categorías de análisis, análisis de los teoremas de existencia expuestos en el libro en cuestión. Para presentar el análisis se utilizaron tablas que sintetizan la clasificación realizada. Las categorías de análisis, como se dijo antes, atienden a los referentes teóricos encontrados. Hicimos dos clasificaciones: una relativa al enunciado y otra, a la demostración; los tipos de cada clase son de nuestra autoría.

ANÁLISIS

A continuación se presenta, grosso modo, una caracterización de las categorías empleadas en el estudio.

Clasificación de teoremas de acuerdo al enunciado

Enunciado que atiende a una definición (ED): Enunciado de teorema que provee existencia de un objeto o una relación cuya definición se ha provisto previamente.

Entre los enunciados que atienden a definiciones precisamos dos tipos: El primero (ED1) incluye enunciados que explicitan la existencia de un objeto que previamente ha sido definido; un ejemplo de este tipo de enunciado es aquel que provee la existencia de la bisectriz de un ángulo, objeto que previamente se ha definido en el marco del sistema teórico. El segundo tipo (ED2) corresponde a enunciados que proveen existencia de objetos que cumplen condiciones específicas (que no hacen parte de la definición del objeto, si este la tiene) explicitadas en el mismo enunciado. Esas condiciones son relaciones que cumple el objeto con respecto a objetos dados en el antecedente del enunciado.

Enunciado que atiende a un postulado (EP): Enunciado de teorema que provee existencia de un objeto o una relación que no posee definición previa (se trata de objetos y relaciones primitivos del sistema). Vale la pena precisar que en este caso la existencia de los objetos la garantiza un postulado.

Enunciado que atiende a condiciones específicas (ECE): Enunciado de teorema que provee existencia de un objeto que cumple una propiedad específica; en otras palabras, el consecuente da la existencia de un objeto que cumple propiedades que dependen de las condiciones nombradas en el antecedente. Estos objetos pueden ser primitivos o no del sistema.

Clasificación de teoremas de acuerdo a la demostración

Demostración inmediata (DI): Demostración en la que las aserciones de sus argumentos proveen las condiciones de teoremas o postulados que de manera inmediata dan la existencia del objeto en cuestión.

Demostración mediata (DM): Demostración de existencia de un objeto cuya definición hace parte del sistema. La demostración se conforma con varios argumentos que, articulados, generan condiciones suficientes para que un objeto inicial resulte ser el objeto cuya existencia se quiere demostrar; en otras palabras, los argumentos usados no contienen garantías que provean de manera inmediata las propiedades del objeto en cuestión según su definición.

CONCLUSIONES

Los enunciados de los teoremas de existencia en el libro que se analizó en el estudio, en su gran mayoría, atienden a una definición o a un postulado; sin embargo, los teoremas cuyos enunciados atienden a condiciones específicas desempeñan un papel preponderante en el sistema teórico, dado que se usan con frecuencia en situaciones de construcción.

La clasificación realizada de los teoremas de existencia proporciona al docente una forma de abordar dichos teoremas en clase; ello debido a que se profundiza en la estructura del sistema teórico en el cual se trabaja.

REFERENCIAS

Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Disponible en http://www.jstor.org/ stable/1968336

Harari, O. (2004). Knowledge and demonstration. Aristotle´s posterior analysis. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Mariotti, M. A. (1997). *Justifying and proving in geometry: The mediation of a microworld.* En M. Hejny y J. Novotna (Eds.), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education* (pp. 21-26). Prague, República Checa: Prometheus Publishing House.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Génova, Italia: Sense Publishers.

Mariotti, M. A. (2012). Proof and proving in the classroom: Dynamic Geometry Systems as tools of semiotic mediation. *Research in Mathematics Education*, *14*(2)-163-185.

Mariotti. M. A. y Fischbein, E. (1997). *Defining in classroom activities. Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248.

Moise, E. (1963). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Boston, EUA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Molina, Ó. (2015). Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado del teorema? En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 11-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L. y Echeverry, A. (2012). *La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa.* Épsilon, *29*(3), 41-56.

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje.* Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C. y Perry, P. (2014). ¿Es esto "machetear"? En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 79-97). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Selden, A. (2012). Transitions and proof and proving at tertiary level. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 391-420). Dordrecht, Holanda: Springer.