OPERADORES MORFOLÓGICOS DIFUSOS

Carlos Ochoa y Wilson Forero
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
oochoac@udistrital.edu.co, wilsonforerob@gmail.com

Una herramienta para filtrar imágenes son los operadores morfológicos difusos, los cuales permiten desde obtener información del objeto de estudio hasta modificarlo sin alterar su estructura global. Esta implicación (no alterar la estructura global) tiene una relación directa con la construcción de los operadores de apertura y cerradura. En este artículo se hace énfasis en tales operadores debido a las propiedades que los caracterizan y la relación difusa que inducen.

ALGUNOS CONCEPTOS PREVIOS

Conjuntos difusos

Para atender este concepto, se toma en principio la definición correspondiente dada por Zadeh (1965), que se ha constituido en la noción primitiva por excelencia.

Definición 1. Sea X un espacio de puntos. Se denota por x un elemento genérico de X. Un conjunto difuso A en X está caracterizado por una función de membresía $f_A(x)$ la cual asocia a cada punto de X un número real en el intervalo [0, 1], este valor $f_A(x)$ representa el grado de pertenencia de x en A.

Retículos residuados

La teoría de retículos permite dar los cimientos del trabajo de la matemática morfológica tanto clásica como difusa; hace énfasis en la estructura de retículo del intervalo [0, 1], debido a que en tal intervalo la operación es una t-norma en el caso difuso.

Definición 2. Un conjunto parcialmente ordenado (X, R) es un conjunto X con una relación binaria R, la cual satisface las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$:

1. x R x (reflexiva).

Ochoa, C. y Forero, W. (2015). Operadores morfológicos difusos. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 149-154.

2. Si x R y, y R x entonces x = y (antisimetría).

3. Si x R y, y R z entonces x R z (transitividad).

Para citar un conjunto parcialmente ordenado, usualmente se usa la abreviatura "poset" que proviene de la expresión inglesa *partially ordered set*.

Definición 3. Un poset $(L, \leq)$ es un retículo si cualquier par de elementos $a, b \in L$ posee máxima cota inferior y mínima cota superior.

Si c es la máxima cota inferior de a y b se escribe $c = a \wedge b$, si d es la mínima cota superior, se escribe $d = a \vee b$. Así, un retículo es una estructura $(L, \leq, \wedge, \vee)$. Un retículo es completo si para cada uno de sus subconjuntos existen máxima cota inferior y mínima cota superior; en tal caso, si A es un subconjunto del retículo, donde c es la máxima cota inferior de A, se escribe $c = \wedge A$, si d es la mínima cota superior de A, se escribe $d = \vee A$.

Definición 4. Sea $(L, \leq, \wedge, \vee)$ un retículo y $*$ una t-norma definida en L, se dice que $(L, \leq, \wedge, \vee, *)$ es un retículo residuado si existe una operación binaria $\rightarrow$ en L, que satisface:

$$\alpha * \beta \leq \gamma \leftrightarrow \alpha \leq \beta \rightarrow \gamma.$$

Si $(L, \leq, \wedge, \vee)$ es un retículo completo, L tiene cota superior, la cual se nota con 1, y tiene cota inferior, la cual se nota con 0. $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ es un retículo entero si 1 actúa como módulo de $*$ (i. e., $a * 1 = a$, para todo $a \in L$).

Tiene especial interés tomar $L = [0, 1]$, debido al campo de aplicaciones. De esto dan evidencia los trabajos de Zadeh (e. g., Zadeh, 1965) que se han constituido en la génesis de esta teoría.

Teorema 1. Si $([a, b], \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ es un retículo residuado, entonces es una t-norma semicontinua a izquierda y $([a, b], \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ es un retículo residuado entero.

Demostración. Sean $*$ una t-norma y $\{x_n\}$ una sucesión de términos no decrecientes en $[a, b]$. $*$ es no decreciente en ambos argumentos, entonces para cada i se tiene que $\{ x_i \leq \vee_{\{j \in J\}} \{x_j\}\}$, por lo tanto

$$x_i * y \leq \vee_{\{j \in J\}} \{x_j\} * y,$$

de donde se sigue

$$\vee_{\{j \in J\}} (x_j * y) \leq \vee_{\{j \in J\}} (x_j) * y.$$

Debido a que $\{x_n\}$ es no decreciente en $[a, b]$, se tiene en consecuencia,

$$\vee_{\{j<i\}} (x_j * y) \leq (x_i) * y$$

así,

$$\vee_{\{j \in J\}} (x_j * y) \leq \vee_{\{j \in J\}} (x_i) * y.$$

De lo anterior se desprende

$$\vee_{\{j \in J\}} (x_j * y) = \vee_{\{j \in J\}} (x_i) * y.$$

Por tanto, es semicontinua a izquierda. A su vez, es fácil ver que 1 actúa como módulo en ($[a, b]$, $\leq$, $\wedge$, $\vee$, $*$, $\rightarrow$) y es el máximo de $[a, b]$. Es decir, ($[a, b]$, $\leq$, $\wedge$, $\vee$, $*$, $\rightarrow$) es un retículo entero.

Algunas propiedades que se desprenden del teorema anterior son:

Corolario 1. Sea el retículo ($[a, b]$, $\leq$, $\wedge$, $\vee$, $*$, $\rightarrow$). Se cumple que:

- $\wedge_{\{j \in J\}} (x_i) * y \leq \wedge_{\{j \in J\}} (x_j * y)$
- $x * (y \rightarrow z) \leq y \rightarrow (x * z)$
- $y_1 \leq y_2$ implica que $x \rightarrow y_1 \leq x \rightarrow y_2$
- $y_1 \leq y_2$ implica que $y_2 \rightarrow x \leq y_1 \rightarrow x$.

La demostración de este corolario se encuentra en Höhle y Klement (1995).

Operadores consecuentes

Un operador es una aplicación que permite relacionar dos o más términos, el cual puede clasificarse según las características que tenga o las condiciones que se le impongan. En esta sección, se hace énfasis en el operador consecuente y algunas implicaciones que posee en la matemática difusa.

Definición 5. Un operador $C: P(X) \rightarrow P(X)$ es un operador consecuente en X si satisface las siguientes propiedades:

1. $A \leq C(A)$ para todo subconjunto $A \in P(X)$;

2. $A \leq B$ entonces $C(A) \leq C(B)$ para todo $A, B \in P(X)$;

3. $C(C(A)) = C(A)$ para todo $A \in P(X)$.

Las propiedades 1 y 2 en matemática morfológica se llaman propiedad de extensión y de crecimiento, respectivamente.

Es pertinente recordar que L^X denota el conjunto de todas las funciones de X en L, esto es, el conjunto de todos los subconjuntos L difusos de X.

Definición 6. Un operador $C: L^X \to L^X$ es un operador consecuente difuso en X si se verifica:

1. $\mu \leq C(\mu)$ para todo subconjunto difuso $\mu \in L^X$,

2. $\mu_1 \leq \mu_2$, entonces $C(\mu_1) \leq C(\mu_2)$ para todo $\mu_1, \mu_2 \in L^X$,

3. $C(C(\mu)) = C(\mu)$ para todo $\mu \in L^X$.

Operadores coherentes

Antes de dar inicio a la presentación del operador coherente se exhibe la función pulso.

Definición 7. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ y X un conjunto, para $x \in X$ se designa por $\hat{x}$ la función pulso, dada por:

$$\hat{x}(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 8. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, X un conjunto y $C: L^X \to L^X$. Se dice que C es coherente si

$$\mu(a) * C(\hat{x})(a) \leq C(\mu)(x)$$

para todo $\mu \in L^X$ y para todo $(a, x) \in X \times X$.

Operadores morfológicos difusos

Mediante los operadores morfológicos es posible abarcar el reconocimiento de imágenes con el estudio de ciertos detalles específicos, sin llegar a alterar la imagen global sino actuando sobre detalles estructurales que se definen previamente; esto se logra a partir de los operadores de dilatación y erosión, los cuales son el pilar de cualquier otro operador que se pueda definir. Esto ocurre gracias a que cualquier operador morfológico que se intente definir se expresa como algún tipo de función determinada por los operadores de dilatación y erosión. En las líneas que siguen se entenderá por elemento estructural un subconjunto del conjunto de estudio.

Sea un conjunto arbitrario X y una relación difusa R, que es la proyección del concepto de elemento estructural, denominada, entonces, relación estructural.

Definición 9. Dada una relación difusa $\mathrm{R} \in L^{X\times X}$, los operadores erosión y dilatación de $A \in L^X$ son,

$$\varepsilon_R(A) = \wedge_{\{\mathrm{y} \in \mathrm{X}\}}\{\, \mathrm{R}^{\mathrm{op}}(x,y) \to A(y)\, \}$$

$$\delta_R(A) = \vee_{\{\mathrm{y} \in \mathrm{X}\}}\{\, \mathrm{R}^{\mathrm{op}}(x,y) * A(y)\, \}$$

donde $\mathrm{R}^{\mathrm{op}}(x,y) = \mathrm{R}(y,x)$.

Con la composición de los operadores, antes definidos, es posible crear operadores que nos brinden mayor exactitud en el reconocimiento de detalles específicos de una imagen (Elorza, Fuentes-González, Bragard y Burrillo, 2013). Uno de ellos es el *operador apertura*, α_R, que consta de la composición del operador erosión seguido del operador dilatación; aquel operador se usa especialmente para eliminar regiones pequeñas y protuberancias.

Si se compone el operador dilatación seguido del operador erosión se obtiene el *operador clausura*, γ_R, usado, entre otras cosas, para rellenar pequeños agujeros, faltas.

Es claro que los operadores erosión y dilatación no son consecuentes pues no son idempotentes, pero sí son coherentes, es decir:

Teorema 2. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \to)$, X un conjunto y R una relación en X, los operadores erosión y dilatación son $*$-coherentes.

Al considerar el operador apertura se tiene que $\alpha_R(\mu) \leq \mu$ lo cual impide que sea un operador consecuente, pero sí es un operador coherente, además es monótono, es decir si $\mu_1 \leq \mu_2$ entonces $\alpha_R(\mu_1) \leq \alpha_R(\mu_2)$ e idempotente (i. e., $\alpha_R(\alpha_R(\mu_1)) = \alpha_R(\mu_2)$.

Teorema 3. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, X un conjunto y R una relación en X, el operador apertura difuso α_R es un operador coherente.

El operador más detallado respecto a propiedades es el operador clausura, lo que se evidencia en el siguiente teorema (Elorza, Fuentes-González, Bragard y Burrillo, 2013):

Teorema 4. Sean $(L, \leq, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$, X un conjunto y R una relación en X, el operador clausura difuso γ_R es un operador consecuente coherente.

Conclusiones

- Los operadores erosión, dilatación y apertura son coherentes pero no consecuentes; además, son monótonos (si $\mu_1 \leq \mu_2$ entonces $C(\mu_1) \leq C(\mu_2)$).
- El operador apertura es idempotente.
- El operador clausura difuso es un operador consecuente coherente.

Referencias

Elorza, J., Fuentes-González, R., Bragard, J. y Burrillo, P. (2013). One the relation between fuzzy closing morphological operators, fuzzy consequence operators induced by fuzzy preorders and fuzzy closure and co-closure systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 218, 73-89.

Höhle, U. y Klement, E. (Eds.) (1995). *Non-classical logics and their applications to fuzzy subsets. A handbook of the mathematical foundations of fuzzy set theory*. Dordrecht, Holanda: Springer.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.