



ESTUDIO EMPÍRICO DE LOS PROBLEMAS SOBRE INTERVALOS DE CONFIANZA EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

M^a del Mar López-Martín, Danilo Díaz-Levicoy, María M. Gea y Pedro Arteaga
mariadelmarlopez@ugr.es, dddiaz01@hotmail.com, mmgea@ugr.es, parteaga@ugr.es
Universidad de Granada



RESUMEN

Los intervalos de confianza son un tema fundamental en estadística. En la actualidad, en España, solamente los estudiantes de último curso de Bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales son los que estudian este contenido. Estos alumnos deben pasar unas pruebas de acceso a la universidad, conocidas habitualmente como selectividad, que les permiten, según la puntuación alcanzada, acceder a los diversos estudios universitarios de grado.

Con la finalidad de estudiar la correspondencia entre los contenidos que se evalúan en estas pruebas y los indicados en las directrices curriculares, en este trabajo se analizan las pruebas de selectividad que fueron propuestas en Andalucía en el periodo comprendido entre 2003 y 2014. Mediante un análisis de contenido se han identificado los distintos campos de problemas de inferencia estadística, que son incluidos en las mencionadas pruebas. A partir del estudio realizado, se han caracterizado los 128 ítems sobre intervalos de confianza encontrados.

Los problemas se clasificaron según el tipo de actividad que se pide al estudiante: construir un intervalo de confianza, interpretar su significado, o bien, se dé un intervalo ya construido y se pida determinar el coeficiente de confianza o el tamaño de la muestra. Para cada una de estas categorías se presentan ejemplos y se determinan los contenidos requeridos para su resolución, mostrando la gran complejidad y diferentes objetos matemáticos implicados en la tarea.

El estudio estadístico de los problemas muestra un balance entre la construcción e interpretación de intervalos de confianza y la determinación del tamaño de muestra para una precisión o una amplitud de intervalo dado. La variabilidad es mayor, cuando se estudia la distribución de estos dos tipos de problemas a lo largo del tiempo. Esperamos que el análisis realizado y los resultados obtenidos contribuyan a una mejor preparación de los estudiantes en cuanto a la información que aporta a los profesores, para que puedan potenciar la comprensión del tema en sus estudiante, así como para asegurar el éxito en la prueba de acceso a la universidad, que determina que el alumno pueda cursar el estudio de grado deseado.

Palabras clave: Inferencia Estadística, Intervalos de Confianza, Bachillerato, Selectividad.

ABSTRACT

Confidence intervals are a statistical key topic. Currently, in Spain only the students in the last year of high school, specialty of Social Sciences, are studying this content. These students must pass a test of access to university, commonly known as selectivity, which allows them, according to the score achieved, to access to different type of university careers.

In order to study the correspondence between the curriculum guidelines and the contents assessed in these tests of access to university, in this paper, selectivity tests proposed in Andalusia in the period between 2003 and 2014 are analysed. Through a content analysis, we have identified the various fields inference problems referred to statistical inference that are included in the trials. From the study, the 128 items of confidence intervals included in these trials were characterized

The problems were classified into two types, depending on the type of activity being asked. The first type is related to the construction of a confidence interval or the interpretation of its meaning is requested. On the other side, the second type of problems is referred to items in which information about an already constructed interval is facilitated, and from it, they are asked to determine the confidence coefficient or the size of the sample. We show an example of each of these two types to show the complexity and the number of mathematical objects involved in its solution.

The statistical study of the problem shows a balance between construction and interpretation of confidence intervals and determination of sample size for accuracy or given amplitude range. When we analyse the distribution of these two types of problems in this period, we have obtained higher variability. We hope that the report of the results and the analysis carried out contribute to a better preparation of students, according to the information that arose for teachers, as well as to ensure success in the test, which determines that the student can take the desired career.

Keywords: Statistical inference, confidence intervals, Bachelor, Selectivity.

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística ha adquirido gran importancia en las últimas décadas, generalizándose su enseñanza en la mayoría de los grados y másteres universitarios. En la actualidad, en España, el estudio de la inferencia se introduce en el segundo curso de Bachillerato (alumnos de 17 años), dentro de la asignatura Matemática Aplicadas a las Ciencias Sociales II, en la modalidad de Bachillerato en Humanidades y Ciencias Sociales con los siguientes contenidos definidos en las directrices curriculares del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC, 2007):

Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, de aproximación de la Binomial a la Normal y Ley de los Grandes Números. Problemas relacionados con la elección de las muestras. Condiciones de representatividad. Parámetros de una población. Distribuciones de probabilidad de las medias y proporciones muestrales. Intervalo de confianza para el parámetro p de una distribución binomial y para la media de una distribución normal de desviación típica conocida. Contraste de hipótesis para la proporción de una distribución binomial y para la media o diferencias de medias de distribuciones normales con desviación típica conocida (p. 45476).

Estos contenidos se repiten, con pocos cambios, en el nuevo decreto curricular del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (MECD, 2015), todavía no implementado en su totalidad.

Puesto que los estudiantes que cursan el Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales reciben menor formación en contenidos sobre álgebra lineal o análisis matemático que los que cursan la modalidad de Bachillerato de Ciencias, es previsible encontrar dificultades en este alumnado al comprender una presentación formal de la inferencia. Además,

destacamos el escaso tiempo del que disponen estos estudiantes para dominar la inferencia estadística, pues junto a este tema, se incluyen, en la citada asignatura, contenidos de probabilidad, números y álgebra, análisis y un bloque transversal relacionado con la resolución de problemas.

La importancia que dentro del aula se da a cada uno de los temas recogidos en las orientaciones curriculares para este curso, viene indirectamente determinada por las pruebas de evaluación que los estudiantes españoles, al finalizar los estudios de Bachillerato, deben realizar para acceder a la universidad. Estas Pruebas de Acceso a la Universidad (en adelante PAU), son obligatorias y su finalidad principal es evaluar los conocimientos y capacidades adquiridas por los futuros universitarios durante su etapa de Bachillerato. Estas pruebas también se utilizan para seleccionar a los estudiantes que quieren ingresar en titulaciones y centros de estudio determinados.

El objetivo de nuestro estudio fue analizar el contenido de los ejercicios sobre intervalos de confianza propuestos, desde 2003 a 2014, en las PAU propuestas en Andalucía en la especialidad de Bachillerato de Ciencias Sociales.

MARCO TEÓRICO

Nos apoyamos en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007), que asume que los objetos matemáticos —en nuestro caso los objetos relacionados con la inferencia estadística— surgen de las prácticas matemáticas realizadas para resolver problemas relacionados con el tema, considerando el término problema en sentido amplio (incluyendo también ejercicios y tareas). El interés, por tanto, radica en identificar y analizar los problemas que conforman el significado de un contenido matemático.

Mediante la reiteración de estas prácticas matemáticas, realizadas al resolver problemas del mismo campo, se llega a configurar el significado de un objeto matemático. Así es que, los problemas propuestos a los estudiantes, bien durante la enseñanza o en las pruebas de evaluación, incidirán en el aprendizaje de diferentes objetos matemáticos y, por tanto, en el significado que los estudiantes asignarán a los mismos.

En este marco teórico, el significado de un objeto matemático es interpretado desde dos perspectivas. Por una parte, se considera el significado que la institución comparte y concreta para los estudiantes; y por otra parte, el significado que adquiere una persona, por ejemplo, un estudiante, y que puede ser diferente al aceptado dentro de la institución. Dentro de la institución de enseñanza, se diferencian: a) el *significado global*, que sería el más amplio (en nuestro caso, el significado de la inferencia en la propia estadística); b) el *significado pretendido* del objeto dentro de un nivel educativo, que sería el fijado por la institución (en nuestro estudio, el marcado por las orientaciones curriculares); c) el *significado implementado* en la enseñanza (lo que el profesor y los estudiantes trabajan en el aula, en este caso se asume que se abordan todos los temas del currículo); y d) el *significado evaluado*, que se refiere al contenido relacionado con el objeto matemático en las pruebas de evaluación.

Nuestro trabajo se orienta a determinar el significado evaluado del intervalo de confianza en las PAU para Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. La importancia radica, principalmente, en que las respuestas a las pruebas de evaluación determinan en gran medida la planificación de la enseñanza del tema y, con ello, la formación que reciben los

estudiantes. Es fundamental, entonces, que las pruebas de evaluación sean válidas, es decir, que exista una correspondencia entre el significado institucional pretendido y el evaluado en torno al tema. Esta correspondencia es la que tratamos de evaluar en la investigación para el contenido de inferencia.

INVESTIGACIONES PREVIAS

Son varios los autores que han analizado las pruebas PAU en España propuestas para la asignatura de Matemáticas o Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales. Generalmente, el objetivo de estos estudios ha sido analizar los resultados de los estudiantes y la variabilidad de resultados dependiendo de diferentes factores.

Nortes y Nortés (2010) analizaron las respuestas de una muestra de 134 alumnos en la región de Murcia en las PAU de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales en septiembre del año 2009. En su estudio analizan la distribución de la puntuación global en la prueba, que resultó baja —los alumnos responden correctamente menos de la mitad de los ejercicios, a pesar de que en esta región tienen opción a elegir 1 ejercicio entre 2 en cada uno de cinco bloques de contenido—. Asimismo comparan las puntuaciones medias en las diferentes preguntas y bloques de contenido, observando que el problema más sencillo (nota media de 7,4) fue precisamente de inferencia y consistió en la construcción de un intervalo de confianza. También detectan los errores con respecto al cálculo del valor crítico correspondiente al nivel de confianza con una tabla de la distribución normal y con respecto al manejo de desigualdades al expresar y calcular el intervalo de confianza.

Vidal (2010) clasifica los problemas de probabilidad condicional propuestos en las PAU de la comunidad valenciana, a partir de un modelo teórico previo de clasificación de dichos problemas, tratando de ver si las pruebas proponen todos los problemas incluidos en dicho modelo. Analiza también el contexto de los problemas, según el marco de evaluación PISA (OCDE, 2009), siendo el más frecuente el social, seguido por los problemas puramente matemáticos (descontextualizados).

Ruiz, Dávila, Etxeberria y Sarasua (2013) realizan un análisis estadístico de los resultados obtenidos en la PAU de Matemáticas por alumnos del País Vasco en 2010. Realizaron un estudio comparativo por centro y analizaron la relación de los resultados de los estudiantes con la opinión de los profesores sobre estos estudiantes y la metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje utilizada. Encontraron, en general, unos resultados muy bajos, por lo que clasificaron las pruebas como difíciles; hubo, además, pocas diferencias entre centros educativos. Un resultado no esperado fue que los centros con buenos resultados utilizaban una metodología tradicional, con poca presencia de las nuevas tecnologías.

Mallart (2014) analiza las respuestas de 104 estudiantes en las PAU de Matemáticas en 2012 en la Universidad de Barcelona, estudiando las estrategias de resolución de los problemas con el propósito de detectar errores significativos y poder incidir en la planificación de la enseñanza para resolver las dificultades de aprendizaje. El autor diferencia entre resoluciones mecánicas, la ejecución con precisión de las operaciones, la aplicación con rigor de las propiedades y la capacidad creativa de resolución. El primer tipo de estrategia es la más frecuente, lo que indica que los alumnos han aprendido los aspectos rutinarios en la resolución de problemas. También observa falta de rigor y precisión en el planteamiento y resolución de los problemas geométricos, y son muy pocos los alumnos que muestran creatividad en la resolución de los problemas.

Por nuestra parte, en trabajos previos (Contreras, López-Martín, Arteaga, Carretero, 2015; López-Martín, Contreras, Batanero, Carretero, 2015) se han analizado los problemas de probabilidad propuestos en las PAU de Andalucía en el periodo 2003-2014. Dichos problemas tratan sobre los conceptos de probabilidades a priori y a posteriori, probabilidad compuesta, condicionada y total, y Teorema de Bayes. Los resultados mostraron una frecuencia mucho mayor de propuestas de problemas de probabilidad condicional, frente a los problemas relacionados con la probabilidad simple o compuesta. En general, el análisis de los problemas mostró su dificultad, por el gran predominio de espacios muestrales compuestos, donde, además, los experimentos simples son dependientes entre sí. Igualmente, abundan los espacios muestrales formados por sucesos no equiprobables y los datos suelen estar recogidos en el enunciado en forma de probabilidad o porcentaje, formato que es más difícil que el uso de números enteros o frecuencias absolutas.

La única investigación centrada en el análisis de los problemas de inferencia estadística en la PAU es la realizada por Espinel, Ramos y Ramos (2009). Sin embargo, las autoras no realizan un estudio o clasificación de los problemas de inferencia, ni tratan de identificar las variables que los definen. Su estudio se centra en las dificultades encontradas por una muestra de estudiantes al resolver dos problemas de contraste de hipótesis propuestos en las PAU en la Universidad de La Laguna (Canarias). Por todo ello, nuestro trabajo aporta información original en el campo de investigación.

MÉTODO

La investigación llevada a cabo es de tipo cualitativa, ya que se basa en el análisis de contenido (López, 2002), cuyo foco de atención se centra en el análisis del significado del concepto a través de la descripción de los significados, el abanico de distintos significados y la correcta aplicación del contenido. Haciendo uso del análisis de contenido, se han clasificado los ejercicios propuestos de acuerdo a los diferentes campos de problema, seleccionando únicamente los relacionados con intervalos de confianza. A partir de dicha información, se ha realizado un estudio de la distribución de las diferentes categorías, globalmente y a lo largo del tiempo.

La muestra objeto de estudio corresponde a las pruebas que han sido propuestas en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en Andalucía, celebradas desde 2003 hasta 2014. En cada uno de los años seleccionados, se revisaron los seis modelos disponibles de prueba (entre los seis modelos, por sorteo, se elige la prueba oficial de junio y la de septiembre), cada uno de ellos con dos opciones. Cada modelo que se propone contiene un ejercicio relacionado con contenidos de inferencia estadística. Por lo tanto, como cada año contiene 12 relacionados con inferencia estadística, la muestra analizada está compuesta por 144 problemas, de los cuales 128 corresponden a intervalos de confianza.

PROBLEMAS PROPUESTOS SOBRE INTERVALO DE CONFIANZA Y CONTENIDO EVALUADO EN CADA UNO DE ELLOS

En primer lugar, se han analizado los distintos tipos de campos de problemas que son tratados en las pruebas PAU, seleccionando únicamente los relacionados con el contenido de intervalo de confianza. Los problemas de intervalos de confianza se han podido clasificar en dos categorías principales: 1) cálculo o interpretación de un intervalo de

confianza (B1); y 2) relación entre confianza, error de estimación y tamaño muestral en un intervalo de confianza (B2). A continuación se analizan cada uno de ellos, incluyendo ejemplos con el fin de clarificar el estudio realizado.

Cálculo o interpretación de un intervalo de confianza (B1)

Dentro de este bloque se han considerado tanto los problemas en los que se pide explícitamente la construcción de un intervalo de confianza para un cierto estadístico (generalmente la media o la proporción muestral), así como los relacionados con la interpretación de la información aportada por el intervalo. En lo que sigue analizamos el ítem incluido en la prueba de reserva propuesta en el curso académico 2005/2006, cuyo enunciado se muestra a continuación.

Ítem 1A (2006). De 500 encuestados en una población, 350 se mostraron favorables a la retransmisión de debates televisivos en tiempos de elecciones. Calcule un intervalo de confianza, al 99,5 %, para la proporción de personas favorables a estas retransmisiones.

En la resolución del ejercicio, el estudiante debe tener en cuenta que para estimar el parámetro de una población mediante un intervalo de confianza, en nuestro caso la proporción poblacional, debe considerar la proporción muestral como estimador puntual, así como la distribución asociada a éste.

Cuando se trata de determinar, a través de un intervalo de confianza (o realizar un contraste de hipótesis), la proporción de individuos que posee una característica o atributo, se utiliza la distribución binomial, y esta puede ser aproximada por una distribución normal en ciertos casos. Concretamente, si en una población la proporción de individuos que posee un atributo es p , entonces, la proporción muestral de individuos con esta característica en las muestras de tamaño n es \hat{p} , y siempre que el tamaño de la muestra sea superior a 30, se distribuye aproximadamente según una distribución normal de media p y desviación típica $\sqrt{p(1-p)/n}$. Como consecuencia, al tipificar obtenemos la distribución normal $N(0,1)$.

Un elemento básico en la construcción del intervalo es el coeficiente de confianza $(1-\alpha)\times 100\%$. A partir de este coeficiente, el objetivo es hallar los límites de un intervalo de valores $[e_1, e_2]$, tal que $P(e_1 \leq p \leq e_2) = 1-\alpha$. Para calcularlo, se comienza identificando un intervalo de valores de la distribución normal tipificada (Z), centrado en el origen, tal que el área de cada cola sea $\alpha/2$:

$$P\{-k < Z < k\} = 1-\alpha.$$

Realizando una lectura inversa de la tabla de la distribución normal, se obtienen los valores de $-k$ y k (véase Figura 1), que verifican la expresión anterior y, a partir de estos valores, se despejan los extremos del intervalo de confianza de la variable tipificada Z .

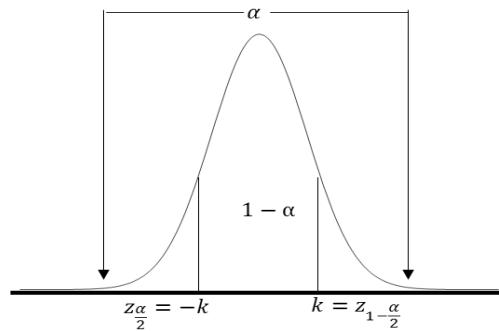


Figura 1. Selección de los puntos críticos para el cálculo del intervalo de confianza.

En nuestro caso, usando la tipificación de la proporción muestral, se obtiene

$$P\left\{|\hat{p} - p| < k \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

de donde se despejan los extremos del intervalo de confianza.

Puesto que estos extremos dependen del parámetro poblacional, que es desconocido, una vez obtenida la proporción de individuos que poseen una cualidad, se empleará dicho valor muestral como el estimador de p .

Así pues, dado que $k = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, se concluye que el intervalo de confianza de la proporción

poblacional con un nivel de confianza $(1-\alpha)100\%$ es

$$\left(\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

En nuestro caso, puesto que $k = Z_{0,9975} = 2,81$ y $\hat{p} = \frac{350}{500} = 0,7$ obtenemos que el intervalo de confianza, a un nivel de confianza del 99,5%, para la proporción de personas favorables a la retransmisiones de debates televisivos en tiempos de elecciones es (0,6421; 0,7576).

Hay que destacar que una vez ha sido calculado el intervalo para una muestra determinada, no es correcto interpretar que la probabilidad de que el parámetro pertenezca al intervalo es $(1-\alpha)$ ya que, una vez obtenido, deja de ser aleatorio y la probabilidad será 1 si el intervalo es de los $(1-\alpha)\times 100\%$ que contienen al parámetro, o 0 si el intervalo es uno de los $\alpha\times 100\%$ intervalos que no contienen al parámetro. Por tanto, no tiene sentido hablar de probabilidad sino de confianza. Así es que, la confianza está puesta en que el método de construcción de los intervalos nos asegura que $(1-\alpha)\times 100\%$ de las muestras producirán intervalos que contienen al parámetro.

Relación entre confianza, error de estimación y tamaño muestral (B2)

En este grupo se han considerado todos los problemas en los que se solicita calcular el coeficiente de confianza, error de estimación o tamaño muestral, después de haber fijado dos de ellas. Como datos se da la población y el estadístico considerado, o bien, el intervalo de confianza. Un ejemplo se muestra a continuación.

- Ítem 3B** (2007). Se sabe que (45,13; 51,03) es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.
- ¿Cuál es el error cometido?
 - Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1,8.

En este problema el estudiante debe, en primer lugar, diferenciar entre estadístico (media de la muestra) y parámetro (media de la población). Debe, asimismo, comprender el significado del intervalo de confianza —un rango de posibles valores para el parámetro, en este caso la media de la población— y del coeficiente de confianza —95% de los intervalos construidos de la misma población con muestras del mismo tamaño contendrán al parámetro; pero no sabemos si el intervalo particular lo contiene o no—. Puesto que se da la distribución de la población como dato, y se trata de una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, entonces se verifica que la variable aleatoria media muestral se distribuye según una distribución normal: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, donde n es el tamaño de la muestra, que no se da como dato en este problema.

Para resolver el primer apartado, el estudiante ha de recordar que el error de estimación se define como la mitad de la amplitud del intervalo, es decir, es la mitad de la diferencia existente entre el extremo superior e inferior del intervalo; por tanto,

$$E = \frac{1}{2} \times (51,03 - 45,13) = 2,95.$$

Si nos centramos en la resolución del segundo apartado, al pretender disminuir el error (manteniendo el nivel de confianza), la única variable que puede ser modificada es el tamaño muestral, ya que el error de estimación para el caso de la distribución normal, que es la que utiliza en estos problemas, es equivalente a

$$E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Dada la relación existente entre el error de estimación y el tamaño muestral, se puede establecer que cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, la precisión en la estimación realizada será mejor, ya que el intervalo es más estrecho. En nuestro caso, dado que el nivel de confianza es del 95% (entonces $Z_{1-\alpha/2} = 1,96$), la desviación típica de la población es 15 y el error de estimación debe ser no superior a 1,8, concluimos que al menos la muestra debe estar formada por 267 elementos.

A partir de la expresión del error, el estudiante puede razonar a través de las siguientes propiedades:

- a medida que aumenta el tamaño de la muestra (manteniendo constante el nivel de confianza) el error de estimación disminuirá;
- manteniendo constante el tamaño de la muestra, el error aumentará a medida que aumente el nivel de significación.

Observemos que una forma más coherente para conseguir mayor precisión en la estimación es el aumento del tamaño de la muestra, ya que habitualmente no es recomendable utilizar un nivel de confianza inferior al 90%.

Contenido evaluado en los diferentes campos de problemas

Para sintetizar, la Tabla 1 contiene los resultados del análisis de la solución de un ejemplo de cada categoría de los dos campos de problemas (B1 y B2) que se proponen en las pruebas PAU. Observamos el dominio que se requiere de conceptos y procedimientos en cada uno de dichos problemas.

Tabla 1. *Contenidos matemáticos evaluados en los diferentes campos de problemas*

Contenido matemático		B1	B2
Conceptos y propiedades	Población y muestra	x	x
	Distribución muestral	x	x
	Relación entre estadísticos en la población y en la distribución muestral	x	x
	Modelo teórico de distribución (binomial o normal)	x	x
	Distribución normal tipificada	x	x
	Estimador de un parámetro	x	x
	Intervalo de confianza	x	x
	Coeficiente de confianza; significado	x	x
	Relación entre amplitud de intervalo, precisión y tamaño muestral		x
Probabilidad condicional	x	x	
Procedimientos	Tipificación	x	
	Lectura de tablas de la distribución normal	x	x
	Cálculo de probabilidades en intervalos	x	
	Cálculo de percentiles en la distribución normal	x	
	Cálculo de extremos en intervalos de confianza	x	

Notamos conocimientos comunes evaluados en los campos de problemas considerados, en particular, los de población y muestra, distribución muestral y relación entre los estadísticos de la muestra, la población y la distribución muestral. Ello fuerza al estudiante a diferenciar los tres planos de distribución señalados por Schuyten (1991): la distribución de datos en la muestra, la distribución de la variable de interés en la población y la distribución muestral del estadístico en todas las posibles muestras obtenidas de la población. Esta diferencia (y de los correspondientes resúmenes como la media o la varianza) es compleja y puede llevar al estudiante a cometer errores; por ejemplo, a confundir la media poblacional hipotética y su estimador, como ocurrió en la investigación de Espinel, Ramos y Ramos (2009).

Los dos campos de problemas propuestos se apoyan fuertemente en la comprensión de la probabilidad condicional, que interviene tanto en la definición de las distribuciones muestrales (condicionadas al valor del parámetro), intervalos de confianza (condicionados con el valor del estadístico), como en el contraste de hipótesis (las regiones de aceptación y rechazo se calculan bajo la condición de ser cierta la hipótesis nula). Puesto que el concepto de probabilidad condicional es difícil y se han descrito números sesgos sobre el mismo (Díaz, Contreras, Batanero y Roa, 2012) los profesores deberán prestar especial atención a su uso en el tema de inferencia, para asegurar un aprendizaje significativo en los estudiantes, que influirá en la correcta solución que realicen de los problemas propuestos en las pruebas de acceso.

Estudio estadístico de campos de problemas

De los 144 problemas analizados, se encontraron 128 ítems sobre intervalos de confianza: 43 relacionados con el tipo B1 y 85 del tipo B2. Queremos señalar, que el elevado número de ítems relacionados con intervalos de confianza se debe a que los problemas tenían varios apartados, donde se trabajaban ambos tipos de problemas. En la Figura 2 se observa que en todos los años analizados, a excepción de 2014, el número de ítems del tipo B2 es siempre superior a los del tipo B1. La inclusión de los ítems del tipo B2 permite conseguir mayor precisión en la estimación realizada.

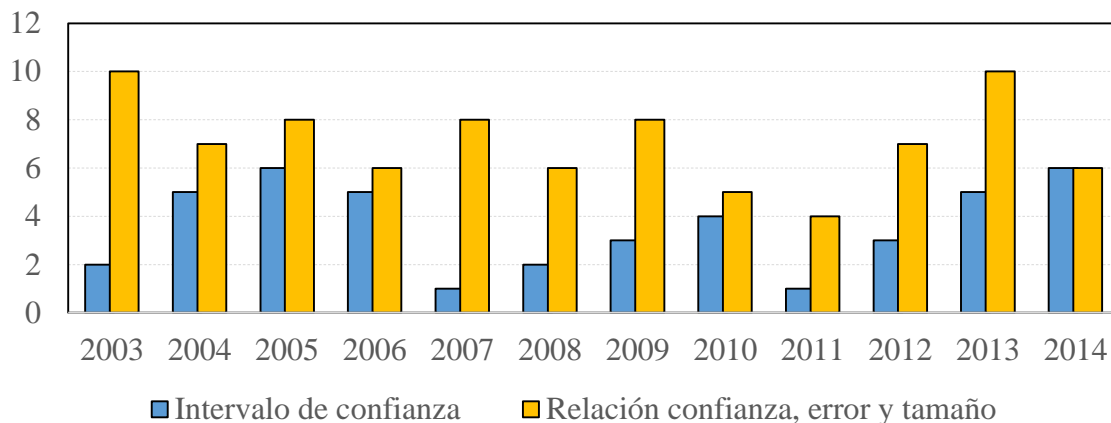


Figura 2. Distribución de campos de problemas en el tiempo

CONCLUSIONES

El análisis semiótico de la solución a los problemas propuestos en las pruebas PAU muestra la complejidad que tiene la resolución de los mismos debido a la cantidad de objetos matemáticos que intervienen en su resolución. En el análisis de los tipos de problemas seleccionados se observa una alta tendencia a incluir ítems donde el estudiante debe relacionar el nivel de confianza, error de estimación y el tamaño muestral. Recordemos que este tipo de problemas requiere que el estudiante sea capaz de identificar la relación entre los tres elementos y razonar las consecuencias que tienen al aumentar o disminuir alguna de ellas manteniendo el resto de ellas constantes.

En general, el estudio realizado muestra una alta dificultad de los problemas propuestos de inferencia estadística en las PAU, que debería ser considerada por los diseñadores de las mismas en las sucesivas ediciones o en pruebas de evaluación alternativas que se propongan en el futuro.

Además, esperamos que la información mostrada en el documento contribuya a que, con la ayuda de los docentes, los estudiantes mejoren la comprensión del tema con el fin de tener éxito en la prueba de acceso a la universidad y cursar el estudio de grado deseado.

Agradecimiento

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT PFCHA 72150306.

REFERENCIAS

- Belia, S., Fidler, F. y Cumming, G. (2005). Researchers misunderstand confidence intervals and standar error bars. *Psychological Methods*, 4, 389-396.
- Contreras, J.M., López-Martín, M.M., Arteaga, P. y Carretero, M. (2015). Pobability content in the entrance to university tests in Andalucía. En H. Oliveira, A. Henriques, A.P. Canavarro, C. Monteiro, C. Carvalho, J.P. Ponte, R.T. Ferreira y S. Colaço (Eds.), *Proceedings of the International Conference Turning data into knowledge: New opportunities for statistics education* (pp. 24-33). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
- Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación secundaria. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 26(22), 1207-1226.
- Espinel, M.C., Ramos, C. E. y Ramos, R. M. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato. *SUMA*, 61(1), 35-44.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI. Revista de Educación*, 4, 167-180.
- López-Martín, M.M., Contreras, J.M., Batanero, C. y Carretero, M. (2015). Los problemas de probabilidad propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía. *ARETÉ*, 1(1), 39-60.
- Mallart, A. (2014). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores. *Educatio Siglo XXI*, 32(1), 233-254.
- MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1), 317-342.
- OCDE. (2009). *PISA 2009 assessment framework - key competencies in reading, mathematics and science*. Paris: OCDE.

- Olivo, E. (2008). *Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Ruiz, J. G., Dávila, P., Etxeberri, J. y Sarasua, J. (2013). Pruebas de selectividad en Matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones de los profesores. *Revista de Educación*, 362, 217-246.
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. VereJones (Ed.), *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Vidal, E. (2010). *Els problemes de probabilitat condicional en les PAU de la CV*. Tesis de Máster. Universidad de Valencia.