Una representación geométrica de S_n^m

Miguel Hurtado
Gimnasio La Khumbre
dma.mhurtado@pedagogica.edu.co

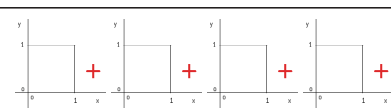
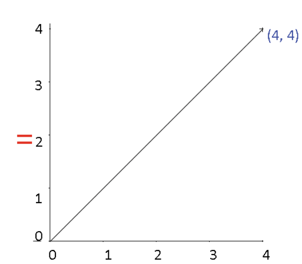
Se expone una representación geométrica de la suma de las potencias (S_n^m), mediante la integral definida, aprovechando que en el trabajo de grado titulado "Observaciones sobre la suma de las m-ésimas potencias de los primeros *n* enteros positivos y algunos otros resultados relacionados" (elaborado por el autor en 2013 en la Universidad Pedagógica Nacional) se encuentran nuevos métodos, mediante el cálculo, para obtener las fórmulas de estas sumas.

Introducción

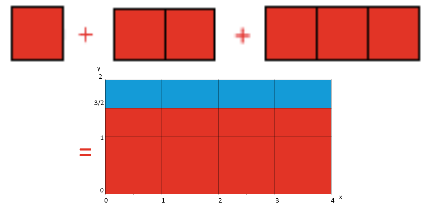
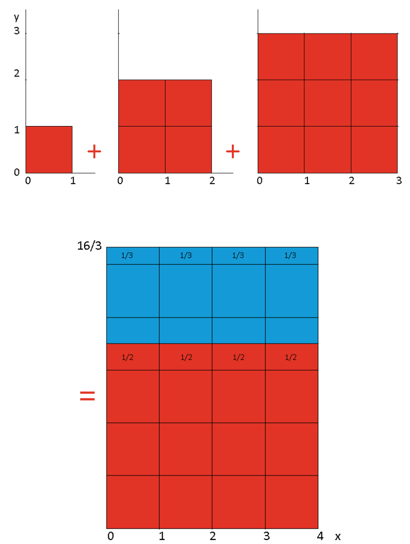
Una suma de la forma $S_n^m = 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m$, con m entero positivo, se llama la suma de las m-ésimas potencias de los primeros enteros positivos. Históricamente mediante estas sumas se obtuvieron métodos para solucionar algunas cuadraturas, lo que hoy en día se entiende como el área bajo la curva o la integral definida (González, 1995). De forma recíproca, en lo que sigue, se muestra una representación geométrica de estas sumas.

Representación geométrica de S_n^m mediante la integral

La siguiente tabla muestra un procedimiento para obtener las fórmulas de S_n^m (Hurtado, 2013) y una representación geométrica de las mismas.

Procedimiento recurrente	Obtención de las fórmulas para $\boldsymbol{S_n^m}$	Representación geométrica mediante la integral definida
Se multiplica por m a S_n^{m-1}, se cambia las variables i, n, por la variable x real, y se integra: Al lado izquierdo de la fórmula, desde límite inferior 0 hasta el límite superior i, y Al lado derecho de la fórmula, a cada potencia m de x, desde el límite inferior $n^{\frac{1}{m+1}}$ hasta el límite superior n.	$$\sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$$ En particular, para $n = 4$ se tiene que: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ Y se representa de forma geométrica como sigue:	 

Hurtado, M. (2015). Una representación geométrica de S_n^m. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 199-200.

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{0}^{i} 1\,dx = \int_{n^{\frac{1}{2}}}^{n} x\,dx$$ La sumatoria de las áreas bajo la curva de la función $y = 1$ en intervalos de [0,1], [0,2]…[0, n-1] es igual al área bajo la curva de la función $y = x$ en $\left[n^{\frac{1}{2}}, n\right]$.	$$\sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$ De los términos, el primero representa el rectángulo de área mayor, y los de color, azul y rojo representan áreas correspondientes al mismo color.	 El área de color rojo siempre se suma, y el área de color azul se resta, de tal suerte que, el área roja resultante es la suma deseada.
$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{0}^{i} 2x\,dx = \int_{n^{\frac{1}{3}}}^{n} x^2\,dx - \int_{n^{\frac{1}{2}}}^{n} x\,dx$$ La sumatoria de las áreas bajo la curva de la función $y = 2x$ en intervalos de [0,1], [0,2]…[0, n-1] es igual al área bajo la curva de la función $y = x^2$ en el intervalo $\left[n^{\frac{1}{3}}, n\right]$ menos el área bajo la curva de la función $y = x$ en el intervalo $\left[n^{\frac{1}{2}}, n\right]$.	$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right)$$ Operando se tiene $$\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{i}^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$	
⋮	⋮	⋮

Conclusión

Se obtiene una representación geométrica de S_n^m, mediante la integral definida.

Referencias

González, P. (1995). *Las técnicas del cálculo: Fermat, Wallis y Roberval*. Actas del Seminario Oratova 2. Recuperado en octubre de 2013, de: http://fundacionorotava.org/archivos%20adjuntos/publicaciones/actas/act2_pdf_web/a2_c016w.pdf

Hurtado, M. (2013). *Observaciones sobre la suma de las m-ésimas potencias de los primeros n enteros positivos y algunos otros resultados relacionados* (tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.