RECONSTRUCCIÓN DE CURVAS CERRADAS A PARTIR DE LA FUNCIÓN ANGULAR EN EL PLANO

Claudia Loaiza y **Milton Lesmes**
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Klaudia.loaiza@hotmail.com, miltonlesmes@hotmail.com

Se presenta una breve introducción a la Teoría de reconstrucción de curvas, con base en el artículo titulado *Fourier descriptors for plane closed curves* de Charles T. Zahn y Ralph Z. Roskies. Dada una curva regular a trozos, se calcula su respectiva función angular y, a partir de esta función, se reconstruye la curva. Este procedimiento puede ser significativo cuando, por ejemplo, una curva como la circunferencia se reconstruye a partir de un segmento de recta.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Al realizar una lectura general de Zahn y Roskies (1972) se observa la necesidad de desarrollar la reconstrucción de una curva según el comportamiento de sus ángulos; por este motivo, es necesario entender el desarrollo de esta teoría, y surge el siguiente interrogante: ¿Cuáles son los conceptos que intervienen en la reconstrucción de curvas cerradas y regulares a trozos en el plano euclídeo, a partir de su correspondiente función angular?

MARCO CONCEPTUAL DE REFERENCIA

Una *curva regular* en el plano es una función $\gamma: (a, b) \to \mathbb{R}^2,\ a < b$, derivable y tal que $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0,$ para todo $t \in (a, b)$. Una curva regular se dice de clase C^1 si es derivable y esa derivada es continua (Millman y Parker, 1977).

Una *curva regular a trozos* es una curva regular junto con un conjunto finito de puntos $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ tal que la restricción de la curva a los intervalos $[s_i, s_{i+1}]$ son segmentos de curvas regulares.

La longitud de un segmento de curva regular $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$ es $\int_a^b \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt.$

$l = l(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt$ define un parámetro denominado longitud de arco, $l(b) = L$ es la longitud de la curva.

Loaiza, C. y Lesmes, M. (2015). Reconstrucción de curvas cerradas a partir de la función angular en el plano. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 127-131.

Se considerarán curvas regulares cerradas $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^2$, es decir que $\gamma(a) = \gamma(b)$, definidas por $\gamma(l)$, donde l es la longitud de arco, $0 \leqq l \leqq L$.

El cálculo de la función angular, $\theta(l)$, función que determina la dirección del recorrido, de acuerdo a un vector fijo, se puede realizar usando el producto punto entre el vector fijo y los vectores tangentes de la curva y la fórmula $a \cdot b = ||a||||b||cos\,\theta$ (do Carmo, 1976). La función angular depende de la elección de un punto sobre la curva y la dirección para iniciar el recorrido.

Teorema de reconstrucción

Si la curva γ es descrita por $\theta(l)$ y un punto inicial $Z(0)$ (Figura 1), la posición del punto $Z(l)$ se puede obtener mediante la expresión (Roskies, 1972):

$$Z(l) = Z(0) + \int_0^l e^{i\theta(\lambda)} d\lambda.$$

Si $Z(0) = (0, 0),$ la expresión anterior se reduce a:

$$Z(l) = \int_0^l \left[cos\left(\theta\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\right), sen\left(\theta\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\right)\right] dt$$

lo cual reconstruye la curva según su función angular.

Si $Z(0) = (0,0),$ y la curva es cerrada, la expresión se reduce a:

$$Z(l) = \int_0^l \left[cos\left(\theta\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\right), sen\left(\theta\left(\frac{Lt}{2\pi}\right)\right)\right] dt$$

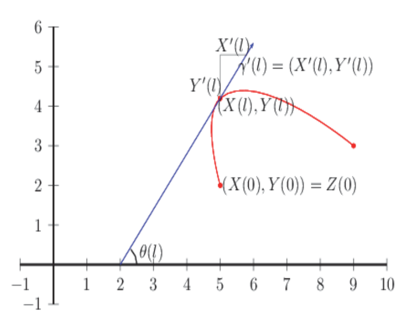

Figura 1. Recta tangente y función angular de una curva

EJEMPLOS

En lo que sigue, se presentan tres ejemplos que ilustran aspectos particulares de la aplicación de la Teoría de Zahn y Roskies. Fueron tomados del artículo, y nos apoyamos en Geogebra y Derive para tener las representaciones gráficas que se muestran.

El corbatín

Consideremos el corbatín como una función continua a trozos, que al evaluarla con el vector $v = [1,0]$ genera la siguiente función angular $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \chi(0, t, \sqrt{2})(-\pi/4) + \chi(\sqrt{2}, t, \sqrt{2} + 2)(\pi/2) + \chi(\sqrt{2} + 2, t, 3\sqrt{2} + 2)(5\pi/4) \\ - \chi(3\sqrt{2} + 2, t, 3\sqrt{2} + 4)(\pi/2) + \chi(3\sqrt{2} + 4, t, 4\sqrt{2} + 4)(-\pi/4)$$

Con $\theta(t)$ como función angular, se aplica el Teorema de Reconstrucción. La respectiva reconstrucción se presenta en la Figura 2.

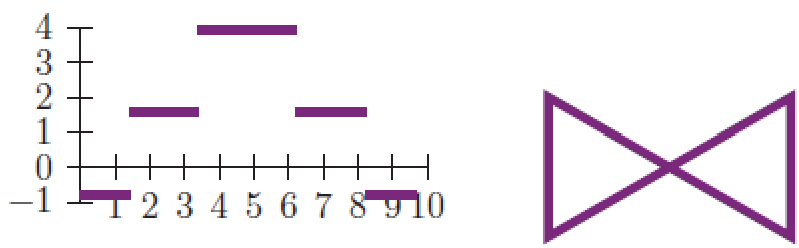

Figura 2. Reconstrucción de un corbatín

El ocho acostado

Consideremos la curva resultante de unir dos circunferencias tangentes y del mismo radio, que tiene apariencia de ocho acostado. En este caso, la circunferencia tiene como función angular un trozo de recta (Figura 3).

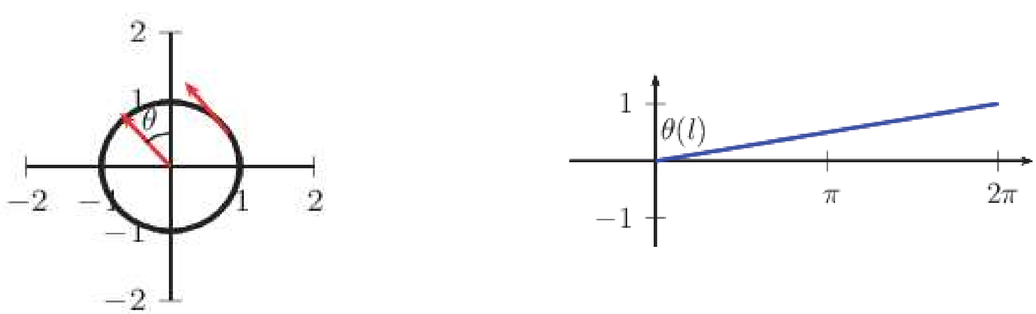

Figura 3. Función angular de la circunferencia

La ecuación de la función angular es:

$$\theta(t) = \chi(0, t, \pi)(2t - \pi/2) + \chi(\pi, t, 2\pi)(7\pi - 2t)$$

Y al aplicarle el Teorema de reconstrucción con el vector $v = [1,0]$ y el conjunto de tangentes, determina la función angular $\theta(t)$, y su respectiva reconstrucción (Figura 4).

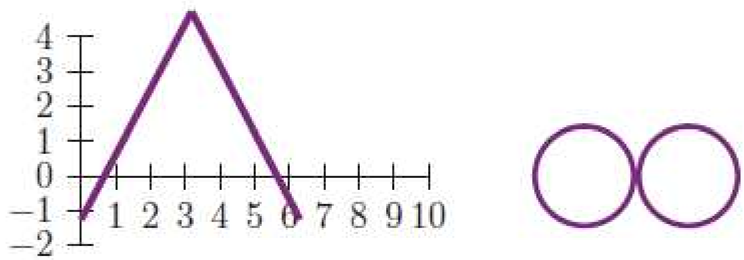

Figura 4. Función angular de un ocho acostado

Curva de Lissajous

Consideremos ahora la función paramétrica $\alpha(t) = [\text{sen(t)}, -\text{sen(2t)}]$ con $t \in [0, 2\pi]$ y (0, 0) su punto de partida en el plano cartesiano. Desarrollando el proceso para obtener la función angular con el vector $v = [1,0]$ se tiene que derivar y normalizar. Como la curvatura de esta curva no es ni cero ni constante, se genera la siguiente función angular $\eta(t)$:

$$\eta(t) = -\chi(0, t, \pi/4)g(t) + \chi(\pi/4, t, 3\pi/4)g(t) - \chi\,(3\pi/4, t, 5\pi/4)(g(t) - 2\pi) \\ + \chi(5\pi/4, t, 7\pi/4)g(t) - \chi(7\pi/4, t, 2\pi)g(t)$$

donde $g(t)$ es la función

$$g(t) = acot\left(\frac{\cos(t)SIGN(cos(2t))}{2(2\cos(t)^2 - 1)}\right)$$

En la Figura 5 se muestra la reconstrucción obtenida.

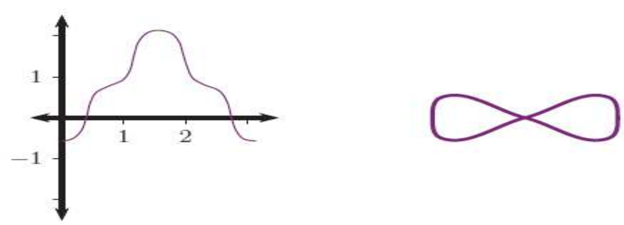

Figura 5. Reconstrucción de una curva de Lissajous

CONCLUSIONES

Al conocer la teoría que implicaba el Teorema de reconstrucción de curvas cerradas en el plano euclídeo se observa que:

- Aunque la Teoría de reconstrucción se puede aplicar a cualquier curva cerrada, en el caso de algunas curvas, el cálculo de la integral para la correspondiente reconstrucción, de acuerdo a la función angular, puede ser tedioso, incluso si se cuenta con un software matemático.
- Respecto a las curvas consideradas en los ejemplos se puede observar que si la función no es inyectiva en todo el intervalo, no se puede considerar una función de reconstrucción total; en estos casos, se deben realizar traslaciones y rotaciones del vector inicial, con el fin de completar la función angular de la reconstrucción.
- La Teoría de reconstrucción de curvas cerradas se puede aplicar a curvas abiertas y a descriptores de Fourier, entre otros.

REFERENCIAS

do Carmo, M. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*. Río de Janeiro, Brasil: Prentice-Hall Inc.

Millman, R. y Parker G. (1977). *Elements of differential geometry*. New Jersey, EUA: Prentice-Hall Inc.

Zahn, Ch. y Roskies, T. (1972). Fourier descriptors for plane closed curves. *IEEE Transactions on Computers*, c-21(3), 269-281.