La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes

David Martínez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
dmartinezud@gmail.com

Las matemáticas y la construcción epistemológica de las mismas han desarrollado distintas formas de apropiación y aproximación de los conceptos matemáticos. En este artículo, por medio de instrumentos históricos se presenta una reflexión sobre la construcción de elipses en tres etapas distintas de la historia de la matemática y las relaciones entre tales construcciones, sin importar su distancia cronológica. La reflexión hecha permite entrever una posible ruta de aprendizaje de las cónicas en el aula.

Introducción: historia y epistemología

La construcción de objetos mentales y la generación del campo semántico que permite su utilización y cognición se desarrollan a partir de fenómenos que hacen posible, con su estudio y análisis, la evolución del pensamiento. Estos fenómenos que se pueden estudiar desde una perspectiva didáctica-epistemológica deben no solo dar cuenta y razón de los usos actuales de los conceptos por trabajar, sino también del uso y razón de ser en el momento mismo de su creación (Puig, 1997). Es por esto que en el marco de la formación de docentes se crea, en el periodo académico 2014-1, una comunidad de práctica en el proyecto curricular Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, cuyo propósito es realizar análisis históricos sobre procesos de instrumentación y curvas en un espacio electivo, del cual surge el siguiente informe previo de investigación.

El análisis histórico de dichos fenómenos o de los conceptos que los crean permite poner en juego, además, las matemáticas desde las que se sustentaban los conceptos (matemáticas que evolucionan y se transforman como los conceptos mismos), y entender asimismo que en cada época particular un mismo concepto matemático puede incluso mostrar distintas definiciones, propiedades o métodos de construcción. El trabajo que reporto aquí, surge

Martínez, D. (2015). La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 133-140.

como una iniciativa de exploración de dichas concepciones para un objeto matemático específico, la elipse, y se desarrolla desde las prácticas matemáticas en cada periodo histórico en que tal objeto se construye, entendiendo que todo concepto surge en la interacción entre distintos sistemas de prácticas sociales (Godino y Batanero, 1994), y que existen prácticas sociales de la comunidad de matemáticos que configuran medios de hacer y demostrar en matemáticas.

Épocas distintas, miradas opuestas

Desde sus inicios, el desarrollo de las matemáticas ha sido influenciado por decisiones políticas, sociales, culturales (Jaramillo, 2010); por este motivo, lo que conocemos del pensamiento matemático depende de quién lo cuente. La historia se encarga de validar los conocimientos, pero también de valorar algunos como menos científicos que otros.

Es en este tránsito donde surgen las primeras aproximaciones de ciencia. En Grecia, cerca del siglo III a. C., la ciencia se definía por su carácter deductivo y lógico, gracias a los matemáticos de ese siglo y los aportes de siglos anteriores. Euclides presenta su trabajo de recopilación del conocimiento científico (es decir axiomático y deductivo) en *Elementos*, que fue el tratado de geometría más importante hasta el desarrollo de nuevas axiomáticas en el siglo XVII (Boyer, 2001/1999). Sin embargo, esta historia de la geometría dejó a un lado muchos hechos y conocimientos que incluso existían antes del nacimiento de Euclides (fuera este un hombre o una escuela de Alejandría).

La historia de estos conocimientos marginados por la geometría tuvo que construirse y narrarse desde otras disciplinas, como las artes y la teología, o creando ciencias propias como la mecánica. Las cónicas como objeto matemático fueron relegadas al olvido por la geometría euclidiana debido a la imposibilidad que esta tenía de construirlas con los elementos geométricos de *Elementos*. Sin embargo, desde esa época de esplendor griego se desarrolló un estudio sobre las cónicas, siendo Apolonio de Pergamo el principal referente de estas curvas especiales.

La sección cónica de Apolonio

La definición de cónicas que se tiene desde la antigüedad no será modificada hasta los trabajos de Descartes en el siglo XVII; es por esto que la elipse, como una de tales curvas, es definida por construcción: Apolonio la presenta como una posible sección de un cono bajo circunstancias especiales; posteriormente, en un estudio de la sección ya construida presenta algunas de sus características (Lugo, 2014).

Respecto a las cónicas en Apolonio es necesario destacar que su construcción se realiza en 3D, refiriéndonos a que el hecho de seccionar un cono no es una operación realizable en un plano (aunque las representaciones encontradas sean en dibujos de dos dimensiones). Para entender cómo define la elipse Apolonio es necesario pensar los objetos en las tres dimensiones, operar con estos mediante cortes de sólidos y planos y, sin embargo, demostrar y afirmar sus propiedades desde la geometría plana.

El Renacimiento

Entre los siglos XV y XVI, la humanidad afrontó un periodo de transición, de reacomodación de las estructuras de pensamiento que impulsó las ciencias y la razón como los elementos constituyentes del conocimiento. En este cambio, los matemáticos, con renovadas energías intentan comprender el mundo y solucionar sus problemas utilizando instrumentos y máquinas para estos cometidos –sin que se diga que antes de esta época no hubieran existido máquinas o que no se solucionasen problemas– (Ruiz, 2003).

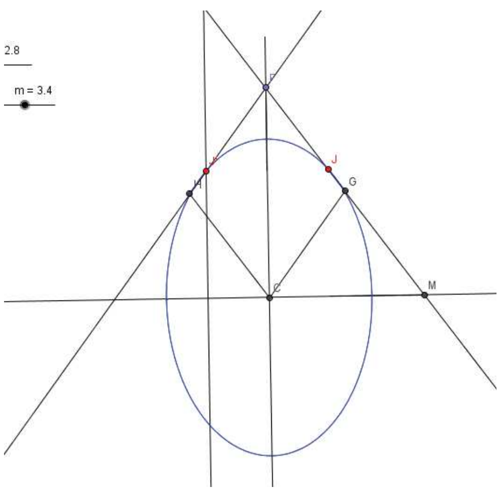
En esta época de renovación del pensamiento, la civilización occidental siguió buscando maneras de solucionar sus problemas y de teorizar y demostrar las teorías emergentes. Es así como científicos de la época dejan de lado sus concepciones teocéntricas y empiezan a buscar las soluciones en la naturaleza, como referente conceptual que luego intentarían imitar mediante máquinas. El mayor desarrollo de estos artilugios se logró mediante la incorporación de la mecánica y los sistemas de máquinas simples al conocimiento de la humanidad; es por esto, que en este siglo es de suma importancia garantizar cualquier conocimiento mediante un instrumento que demostrara de manera exacta el concepto.

En matemáticas este proceso se instaura como una práctica común en el quehacer de un matemático. Junto con la correspondencia y la racionalidad que caracterizan este siglo, instrumentalizar se convierte en la práctica más usada (o una de las más usadas) para la construcción de nuevos objetos matemáticos.

El elipsógrafo de da Vinci

Leonardo da Vinci fue un inventor, artista, escultor, pintor, filósofo, entre otras muchas cosas. Normalmente se le considera como el más claro ejemplo del proyecto científico-humanístico del Renacimiento. De sus manuscritos se puede entender un afán por construir, desarrollar e inventar máquinas de todo tipo. Entre sus producciones se encontró un instrumento que traza elipses con cierta facilidad convirtiendo un movimiento lineal en una curva; este instrumento, un elipsógrafo, no fue el primero en construirse, pero se presenta como uno de los más sencillos de manejar.

El elipsógrafo da Vinci es una máquina que no busca analizar las propiedades de una elipse pero que, sin embargo, busca trazar una elipse de la manera más exacta posible. Está compuesto por un rombo articulado y un punto de traza sobre uno de los lados.



El funcionamiento del elipsógrafo es bastante sencillo (como se ve en la Figura 1). Para trazar una elipse es necesario mover uno de los vértices del rombo por su diagonal correspondiente, haciendo que el punto de traza construya la elipse al asegurar las proporciones continuas.

Figura 1. Elipsógrafo de da Vinci

La instrumentalización como práctica matemática aseguraba, mediante estos instrumentos, que la comunidad matemática validara los objetos construidos; sin embargo, la idea de matemáticas existente en el Renacimiento aún dependía de la noción euclidiana de ciencia en la que cualquier demostración debe depender de la axiomática y el trabajo de proporciones expuesto por Euclides. Este trabajo demostrativo que se separaba de la práctica constructiva de la elipse usaba el rombo articulado y sus propiedades como objeto geométrico (congruencia de lados y articulación que permite su transformación) para poder validar las matemáticas presentes en el instrumento.

El inicio de la modernidad

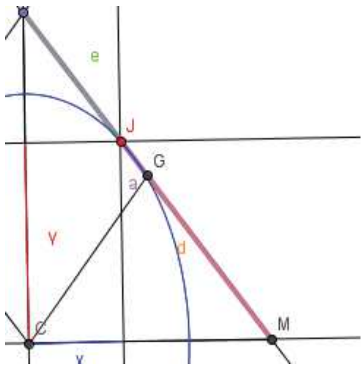
El paradigma matemático de la antigüedad se rompe gracias a los trabajos cartesianos, en los que se pueden vislumbrar los inicios de la modernidad y un cambio decisivo sobre las concepciones de la matemática. Descartes, con su heurística diferente, con el principio que adoptó de dudar y demostrar, es el precursor de una nueva geometría (posteriormente llamada geometría analítica). Gracias a sus trabajos, las representaciones simbólicas de los objetos matemáticos tomaron fuerza sin precedentes, llegando incluso a desplazar otras representaciones que primaban hasta ese momento como la gráfica o el lenguaje natural.

En este contexto histórico de cambio y reestructuración de las matemáticas encontramos a Franz Von Schooten quien, apoyado por su padre y gracias a una nutrida correspondencia con Descartes y la consecuente lectura de los trabajos cartesianos, crea su propio elipsógrafo. El elipsógrafo de Von Schooten es, según algunos autores, una simplificación (o, más bien, una unificación) de los elipsógrafo de Proclo y da Vinci. Es bien sabido que en la época renacentista la referencia a la antigüedad clásica es parte del nuevo pensar científico, por eso no sorprende que se haya vuelto a plantear el problema de Proclo (trazar una elipse con dos ejes ortogonales y ciertas condiciones del movimiento de una partícula), tampoco, que haya resurgido la instrumentalización en su elipsógrafo ni que este haya sido validado desde las matemáticas de su tiempo.

El elipsógrafo de Von Schooten (hijo), ¿cómo se construye?

El elipsógrafo de Von Schooten revive el problema de Proclo, con dos ejes ortogonales y un segmento de longitud fija, cada uno de cuyos extremos está en uno de los ejes. En este elipsógrafo el punto de traza es cualquier punto del segmento y el movimiento se realiza haciendo que los extremos del segmento se desplacen por los ejes (Figura 2).

La reproducción del instrumento mediante geometría dinámica permite, más allá de construir una única elipse determinada por dos ejes, entender las relaciones entre el punto de traza y los ejes que restringen su movimiento y cómo tales relaciones caracterizan la curva. El objetivo del instrumento es asegurar ciertas propiedades del punto de traza, para así demostrar que la figura dibujada es una elipse.

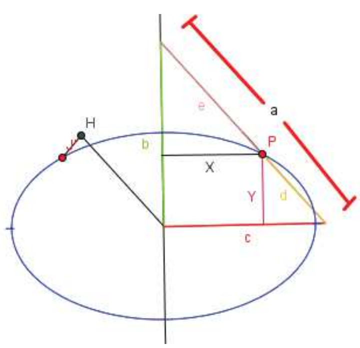


Siendo J el punto de traza, el elipsógrafo de Von Schooten permite que con el movimiento de la recta GM por los ejes ortogonales se pueda pensar en la elipse como el lugar geométrico de J que dicho movimiento produce.

Figura 2. Elipsógrafo de Von Schooten

El momento histórico en el que está inscrito, le permite a Von Schooten demostrar dichas propiedades y, por tanto, validar su instrumento desde las matemáticas cartesianas; muy al estilo de Descartes, nombra con símbolos las magnitudes de los segmentos, y para asegurar que el punto de traza pertenece a una elipse inscribe el instrumento en un sistema de referencia y llega a la ecuación general de la elipse (Figura 3).

Para todo punto P con coordenadas (x, y),



$$\frac{x}{e} = \frac{c-x}{d}$$

$$\frac{y}{d} = \frac{b-y}{e}$$

$$dx = ec - ex$$

$$dx + ex = ec$$

$$ax = ec$$

$$c = \frac{ax}{e}$$

$$ey = db - dy$$

$$dy + ey = db$$

$$ay = db$$

$$b = \frac{ay}{d}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$\frac{a^2x^2}{e^2} + \frac{a^2y^2}{d^2} = a^2$$

$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

Figura 3. Demostración geométrica elipsógrafo Von Schooten

RELACIONES Y DIFERENCIAS

Al considerar la construcción de Apolonio, las prácticas de instrumentalización y los elipsógrafos de da Vinci y de Von Schooten podemos ver cómo aun cuando estos autores plantean definiciones, construcciones y validaciones o demostraciones del mismo objeto matemático, el momento cultural, histórico y social en el que viven condiciona sus formas de actuar y sus resultados.

Las concepciones de Apolonio, aunque las conocieron los matemáticos de la antigüedad, no se tomaron como parte del conocimiento matemático, a pesar de los esfuerzos de Apolonio por demostrar sus conocimientos a la manera euclídea.

Da Vinci, con su instrumento y rodeado de una visión holística de las ciencias (esto, gracias a su formación de artista e inventor), aún necesita del paradigma euclídeo para validar matemáticamente la construcción de su instrumento; es el lenguaje de las proporciones y de los invariantes geométricos lo que permite en el elipsógrafo la caracterización de la elipse; sin embargo, es importante aclarar cómo para da Vinci la elipse trazada con su instrumento está determinada por el punto que la dibuje; la elipse, de hecho, se considera como el conjunto de puntos dibujados, y el interés real de la demostración es garantizar la existencia de la elipse a partir de la traza de los mismos.

Por el contrario, con el elipsógrafo de Von Schooten el interés de validación recae en la existencia del punto de traza asegurando que se cumplan ciertas propiedades. En las matemáticas posteriores a Descartes, la elipse se visualiza como lugar geométrico, como el conjunto de los puntos del plano que cumplen determinada condición.

Pero, si bien cada instrumento está contextualizado en un momento y lugar específico, surgen cuestionamientos sobre su relación y la posibilidad de entender en este objeto matemático una evolución del pensamiento constructivo y demostrativo. Gracias a la inclusión de software geométrico en el estudio (una especie de instrumentación de la actualidad), se puede afirmar que los trabajos de Von Schooten, Proclo y da Vinci están basados en un mismo tipo de elipse, y que, de hecho, su construcción es la misma. El rombo articulado de da Vinci permite a uno de los lados del instrumento moverse entre dos ejes ortogonales como en la construcción de Proclo, es por esto que algunos autores mencionan que Von Schooten simplifica estos dos instrumentos.

Ahora bien, la brecha epistemológica, la razón de ser de este artículo, está presente en la definición de elipse que juega para cada instrumento. No importa que tracen el mismo objeto matemático, no importa que sus sistemas de construcción sean similares, cada instrumento, cada matemático responde a las necesidades culturales de su época, y utiliza las herramientas y recursos de los que dispone.

Reflexión final y conclusiones

En la actualidad existe una corriente didáctica que busca la implementación de instrumentos históricos que trazan cónicas o curvas matemáticas en el aula. Personalmente creo que el trabajo con estos instrumentos nos muestra más sobre la historia y la filosofía de las matemáticas, que sobre el instrumento mismo o la elipse. Si esperamos llegar a la geometría analítica con nuestros estudiantes partiendo del uso de instrumentos (ya sean digitales o mecánicos) debemos tener en cuenta una reflexión histórica de la existencia de diferentes matemáticas a lo largo de la historia; sin embargo, creo que es una estrategia válida y útil como recurso didáctico.

Hablando de prácticas matemáticas como la instrumentalización renacentista, en la actualidad el uso de software geométrico en la educación matemática se ha convertido en lo que parece ser un invariante en la enseñanza; el potencial que tiene el uso de estos programas –bien sea dentro o fuera del aula– es inmenso y por esto creo que la práctica social o matemática más usada por los docentes es el uso de la tecnología y no podemos intentar desligarlos de la misma, por el contrario debemos aprovecharla como recurso para el estudio de prácticas antiguas o para la innovación de conceptos geométricos, siempre teniendo en cuenta cuál es el objetivo del uso de esta práctica.

Referencias

Boyer, C. (2001/1992). *Historia de la matemática* (M. Martínez Pérez, Tr.). Madrid, España: Alianza Editorial.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14* (3), 325-355.

Jaramillo, D. (2010). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Educación y Pedagogía,* 59, 13-36.

Lugo, J. (2014). Secciones cónicas: un estudio epistemológico y el análisis de su tratamiento en los libros de texto (tesis de postgrado). Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. Recuperado el 30 de mayo de 2015, de: http://www.ungs.edu.ar/ms_idh/wp-content/uploads/2014/10/Secciones-C%C3%B3nicas.-Un-estudios-epistemol%C3%B3gico-y-el-an%C3%A1lisis-de-su-tratamiento-en-los-libros-de-textos.pdf

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: Horsori.

Ruiz, Á. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.