

CONTEXTUALIZANDO LA INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO NUMÉRICO EN ESPAÑA

Contextualizing the research on numerical thinking in Spain

Gil, F.

Universidad de Almería

INTRODUCCIÓN

Con la intención de contextualizar las investigaciones realizadas en España dentro del marco de las realizadas a nivel mundial, busqué algún trabajo sobre el estado de la cuestión en pensamiento numérico. No he encontrado ninguno realizado en los últimos años pero sí uno realizado por Verschaffel, Greer y Torbeyns en 2006 que a su vez hacía referencia a otro anterior de Bergeron y Herscovics de 1990. Teniendo en cuenta que las primeras tesis en didáctica de la matemática están en este periodo de años, me ha parecido oportuno centrarme en estos trabajos para contextualizar a nivel mundial, por un lado, el punto de partida de las investigaciones en pensamiento numérico en nuestro país y, por otro, el nivel que se llega a alcanzar al final de este periodo. Así, he organizado este texto de réplica en tres partes, la primera dedicada a la revisión realizada por Bergeron y Herscovics (1990), la segunda al estudio realizado por Verschaffel et al. (2006) y la tercera dedicada a sacar conclusiones sobre los trabajos anteriores y el presentado aquí por el profesor González Mari.

PRIMERA REVISIÓN

La primera revisión que presento fue realizada por Bergeron y Herscovics (1990). En ella se plantearon los principales temas en los que la investigación en la aritmética temprana se había centrado durante los quince años anteriores.

Los conceptos numéricos

En su revisión sistemática estos dos autores determinaron la presencia de dos enfoques teóricos y metodológicos independientes y complementarios. Los dos enfoques son: la teoría de Piaget, que utiliza el razonamiento lógico como base para la construcción de los conceptos numéricos naturales; y el enfoque basado en el conteo, que sostiene que los conceptos numéricos evolucionan mediante las competencias adquiridas de contar a través del proceso de cuantificación.

Las estructuras aditivas

Estos trabajos describen los procedimientos empleados por los niños más pequeños en su intento de resolver problemas de un paso de suma y resta de números naturales. Estos procedimientos se han clasificado en tres tipos principales: el modelado directo (con objetos físicos), el conteo verbal y las estrategias mentales que implican directamente el recuerdo de algún hecho básico de la adición o de la sustracción.

La resolución de problemas

Los problemas verbales aditivos se pueden dividir según su estructura semántica; aquí, las categorías semánticas ayudan a explicar el nivel de dificultad, las estrategias de solución y los errores. Además, el desarrollo de la capacidad del niño para resolver estos problemas puede verse como parte de la evolución cognitiva global de los esquemas del niño que le permite resolver problemas cada vez más complicados. También los dos autores que comentamos, llegaron a constatar que otras variables no semánticas como la presencia de determinadas palabras (por ejemplo “más” o “ambos”) o el orden de presentación de los elementos, determinan el nivel de rendimiento de los niños.

Conclusiones de esta primera revisión

En la mayoría de estos trabajos se identifica número con número natural. Las investigaciones se centran en estudiar el desarrollo matemático de los niños como evolución de esquemas conceptuales abstractos. Las estructuras que se describen son de carácter local, y no se abordan cuestiones generales como los aspectos del número o los de la suma y la resta. Se limitan a estudios de evaluación de los conocimientos de los niños utilizando entrevistas clínicas. Finalmente, los autores concluyen sobre la necesidad de realizar investigaciones con carácter más didáctico (menos psicológico y más pedagógico) a fin de explorar y valorar los efectos cognitivos que puedan tener distintas intervenciones educativas.

SEGUNDA REVISIÓN

Esta segunda revisión realizada por Verschaffel et al. (2006) muestra la evolución desde la revisión de las investigaciones sobre números y la aritmética presentadas en los Congresos PME a lo largo de los quince años anteriores. Estos tres autores organizan su revisión en tres apartados: número naturales, otros números y estructura aritmética.

Números naturales

Aquí los autores indicados incluyen las investigaciones sobre los números naturales y sus operaciones. Las características y el desarrollo de las estrategias que los niños de primaria utilizan para *operar con números naturales* han sido foco de atención en el PME. En este ámbito se han detectado dos líneas de trabajo: el análisis cognitivo de las estrategias de cálculo (se continúa profundizando en temas que quedaron pendientes como estudio del dominio por los niños del producto) y el desarrollo de la competencia aritmética en diversos contextos (que surge a raíz de considerar al escolar como miembro de una comunidad). En esta última línea aparecen tres temas principales: (a) el diseño, implementación y evaluación de entornos educativos que amparen la visión activa del aprendizaje matemático y la construcción conjunta de significados en contextos socioculturales; (b) el papel de los conocimientos, creencias y acciones de aprendizaje de los docentes; y (c) la adquisición y uso de conocimientos y habilidades aritméticas en contextos fuera de la escuela y sus conexiones con la escuela.

Otra área de investigación se ha centrado en las *Operaciones aritméticas como modelos para situaciones*; aquí se estudia la vinculación entre las estrategias aritméticas de los niños y los procedimientos aritméticos y situaciones significativas a las que se refieren. Se incluyen cuatro temas: (a) las estructuras conceptuales (esquemas) para representar y resolver problemas; (b) el análisis y la enseñanza de estrategias de resolución de problemas (heurística); (c) el análisis sociocultural del rendimiento en problemas aritméticos de enunciado verbal; y (d) el enfoque de

modelado emergente sobre cómo diseñar y utilizar diferentes tipos de contextos del mundo real, modelos, materiales virtuales, etc., para mejorar el desarrollo de la aritmética elemental.

Otros números

El "número" también refleja la integridad del sistema numérico (que tenga simétrico para la suma/resta) a través de la resolución de las diversas formas de desequilibrio/falta de cierre (en particular, los números negativos y números racionales). Las investigaciones del PME han evolucionado con una cantidad considerable de trabajos sobre números racionales y números negativos.

Los estudios sobre el *número racional* incluyen dos grandes líneas: las interpretaciones y representaciones de fracciones y los decimales. En interpretaciones y representaciones de las fracciones no hay consenso sobre qué papel debe jugar cada modelo ni sobre el uso de estos constructos en las escuelas. También se estudian errores de interpretación de las fracciones y sus representaciones. La mayoría de los trabajos sobre decimales se enmarcan en el estudio de errores. Son pocos los trabajos en el PME sobre la extensión de las cuatro operaciones básicas más allá de los números naturales, si bien existe consenso sobre que los estudiantes, además de comprender los cálculos, deben comprender cómo esas operaciones modelizan aspectos del mundo real.

En los trabajos del PME hay un continuo debate sobre si los *números negativos* deben introducirse a través de modelos y/o representaciones concretas o como abstracciones formales. La mayoría de los trabajos se realizan desde el primer enfoque, y casi todos con la suma y la resta, sin llegar a la multiplicación y división, pues es con la multiplicación y la división por números negativos donde las limitaciones de los modelos concretos se agudizan.

Son pocos los trabajos sobre la comprensión del *número real*. Los tres que se referencian se centran en: obstáculos epistemológicos para la comprensión de los irracionales, un experimento de enseñanza de los reales y la concepción del número de estudiantes de cálculo.

El *conocimiento y las creencias de los profesores* se han convertido en objeto de muchas investigaciones que pretenden: unas valorar el conocimiento del contenido de los docentes, a menudo revelando debilidades alarmantes, y otras determinar el conocimiento del contenido pedagógico de los docentes.

Estructura aritmética

Gran parte de los trabajos sobre la aritmética se centra, de una manera u otra, en las propiedades estructurales de los sistemas numéricos y operaciones. En dos aspectos: (a) la naturaleza inherentemente algebraica de la aritmética, así los autores hablan de "pre-álgebra" o "pensamiento algebraico incipiente" y (b) el alcance de la aritmética temprana para sentar las bases de los procesos de conjetura y prueba.

Se detectan tres líneas. La primera se centra en explorar la comprensión de los estudiantes sobre las propiedades de las operaciones y en desarrollar planteamientos de enseñanza que fomenten dicha comprensión. También se incluyen estudios sobre la comprensión del signo igual. La segunda se centra en la estructura de los números naturales, bien mediante la exploración de configuraciones puntuales o haciendo indagaciones en teoría de números. La tercera se sitúa en la generalización, la argumentación y la prueba, y se sustenta en la idea de que hay que entender por qué funciona un

patrón y para ello los estudiantes tienen que defenderlo haciendo uso de conjeturas, refutaciones y generalizaciones.

Conclusiones de la segunda revisión

Esta segunda revisión pone de manifiesto que el enfoque en lo que se debe de aprender para adquirir la competencia numérica se ha desplazado hacia una visión que implica la disponibilidad integrada de los diferentes conocimientos y la posibilidad de aplicarlos de manera flexible. La concepción del aprendizaje ha evolucionado hacia un marco "participativo", entendido como la construcción del sentido a través de la actividad del alumno en una comunidad de prácticas. A ello han contribuido numerosas corrientes.

Con respecto a la enseñanza, las investigaciones presentadas en el PME han demostrado interés por los problemas a los que se enfrentan los profesores cuando tratan de enseñar matemáticas, siguiendo las ideas de la comprensión y la flexibilidad. También se ha constatado el desarrollo de investigaciones donde los investigadores trabajan con los maestros, estudiantes y administradores para construir ambientes de aprendizaje que potencien la habilidad matemática y el aprendizaje en una comunidad de prácticas. Un aspecto al que no se ha prestado mucha atención ha sido la diversidad cultural.

Gran parte de las investigaciones revisadas dan la visión de que la aritmética es contemplada como una oportunidad para establecer las bases de una buena preparación matemática.

CONCLUSIONES DE MI RÉPLICA

En primer lugar hemos constatado a través de las tres revisiones presentadas, las dos de este texto y la del texto a cargo del profesor González Mari, que el campo del pensamiento numérico está en constante expansión a través de nuevas líneas de trabajo sobre números y operaciones, o bien mediante líneas más transversales como el análisis didáctico que confluyen con él porque la mayoría de las investigaciones se han implementado con contenidos numéricos.

Veamos cual ha sido la presencia española en el campo del pensamiento numérico. En la revisión de Bergerson y Herscovics (1999) no aparece referenciado ningún trabajo español; se están produciendo la primera generación de tesis/investigaciones en didáctica de la matemática, bastantes de ellas en pensamiento numérico. En la revisión de Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006) ya aparecen referenciados tres trabajos españoles (Rico, 1994; Rico, Castro y Romero, 1996; Romero y Rico, 1996) y dos de ellos como generadores de nuevas líneas (números reales y estructura de los números). Se ha comenzado tener presencia mundial. Si nos fijamos en la presentación de González Mari vemos que ya existen trabajos españoles en todas las líneas de pensamiento numérico, tan solo hay que ver las actas de los últimos PME, y además seguimos con nuestra capacidad de innovación abriendo nuevas líneas y perspectivas, por ejemplo, el concepto de flujo para estudiar la motivación en matemáticas (Montoro y Gil, 2013)

Se ha podido apreciar el enorme esfuerzo realizado por los investigadores del campo para, partiendo desde una posición de apenas presencia en los años noventa, pasar a estar ahora jugando en la "primera división" mundial. Es justo reconocer el papel fundamental jugado por el profesor Dr. Luis Rico Romero en este desarrollo; los tres trabajos referenciados en Verschaffel, Greer y Torbeyns (2006) son de él y si repasamos la presentación anterior podemos constatar que en todos los campos hay contribuciones suyas y todas ellas son punteras, es un pilar clave en torno al que se ha desarrollado el pensamiento numérico en España en el último cuarto de siglo.

REFERENCIAS

- Bergeron, J. C. y Herscovics, N. (1999). Psychological aspects of learning early arithmetic. En P. Neshier y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 31-52). Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Montoro, A. B. y Gil, F. (2013). Measuring flow in mathematical tasks. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, p. 130). Kiel, Germany: PME.
- Rico, L. (1994). Two-step addition problems with duplicated structure. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 121–129). Lisboa, Portugal: PME.
- Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 87–102). Valencia: PME.
- Romero, I. y Rico, L. (1996). On the introduction of real numbers in secondary school. An action research experience. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference, of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 227–234). Valencia: PME.
- Verschaffel, L., Greer B. y Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 51-82). Róterdam, Holanda: Sense Publishers.