PERFILES DE ESTUDIANTES EN LA COMPRENSIÓN DE LA APROXIMACIÓN AL ÁREA DE UNA SUPERFICIE BAJO UNA CURVA

Students' profiles related to the understanding of the approximation to the surface area under a curve

Aranda, C.[a], y Callejo, M. L.[b]

[a]I.E.S. Número 3 La Vila Joiosa, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio es identificar perfiles de estudiantes en la forma en que aproximan el área de la superficie bajo una curva. Los estudiantes participaron en un experimento de enseñanza dirigido a la construcción del concepto de integral definida partiendo de la idea de aproximación al área de una superficie. Las tareas fueron diseñadas atendiendo a una trayectoria hipotética de aprendizaje considerando las fases de construcción de un concepto apoyadas en la abstracción reflexiva. El análisis de las respuestas, teniendo en cuenta los distintos momentos del proceso de abstracción reflexiva, permitió identificar tres perfiles en la comprensión de la aproximación al área de una superficie bajo una curva.

Palabras clave: *aproximación al área, integral definida, trayectoria hipotética de aprendizaje, experimento de enseñanza*

Abstract

The aim of this study is to identify profiles of students related to the way they approach to the surface area under a curve. Students participated in a teaching experiment focused on building the concept of definite integral from the idea of approaching to the area of a surface. Tasks were designed taking into account a hypothetical learning trajectory considering the phases of the construction of a concept supported by reflective abstraction. The analysis of students' responses taking into account the different phases of the process of reflective abstraction, lets to identify three profiles of students' understanding of the approximation to the surface area under a curve.

Keywords: *approximation to the area, definite integral, hypothetical learning trajectory, teaching experiment*

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones han identificado las dificultades de los estudiantes para comprender la integral definida como límite de una suma, debido a una comprensión no adecuada del proceso de límite (Boigues, Llinares y Estruch, 2010; González y Aldana, 2010; Orton, 1983). Cuando se introduce la integral mediante las sumas de Riemann, McDonald, Mathews y Strobel (2000) consideran que es importante que los estudiantes vean la sucesión de las sumas inferiores/superiores no solo como un listado de números sino como una función cuyo dominio pertenece al conjunto de los números naturales.

Las investigaciones indican que el primer encuentro de los estudiantes con la concepción de límite de una función es a través de la idea de aproximación (Cornu, 1991) mediante la concepción dinámica del límite: "Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a […] si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2015). *Perfiles de estudiantes en la comprensión de la aproximación al área de la superficie bajo una curva*. En C. Fernández, M. Molina, N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 123-131). Alicante: SEIEM.

$f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada" (Blázquez y Ortega, 2002, p. 79). Esta manera de dar sentido a la idea de límite influye en la comprensión de la concepción métrica. Algunas investigaciones señalan que la dificultad de los estudiantes para construir la definición formal de límite es el resultado de una comprensión insuficiente de la concepción dinámica del mismo (Cottrill et al., 1996; Pons, Valls y Llinares, 2012).

Por otra parte, se sugiere la necesidad de usar múltiples representaciones para presentar el concepto de integral y de enfatizar las conexiones entre ellas (Ferrini-Mundi y Graham, 1994; Fernández-Plaza et al., 2012). En esta línea Ferrara, Pratt y Robutti (2006) proponen usar la tecnología para tratar la integral, primero a nivel numérico y gráfico, como sumas de rectángulos de base cada vez más pequeña, y después a nivel simbólico. Camacho, Depool y Santos-Trigo (2010) han puesto de manifiesto que actividades programadas con las utilidades que ofrecen las tecnologías permiten progresar en el uso de aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida.

Por último, algunos autores consideran que en la secuencia de enseñanza del concepto de integral debe primar su génesis histórica, que responde al problema del cálculo del área de la superficie bajo una curva, porque está más en consonancia con las ideas y el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Turégano, 1998). En el contexto de introducir el concepto de integral definida partiendo del cálculo del área de la superficie bajo una curva, el objetivo de esta investigación es:

> Identificar distintas formas en que los estudiantes de Bachillerato construyen la aproximación del área de la superficie bajo una curva en el contexto de un experimento de enseñanza utilizando *applets*.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico es el mecanismo de reflexión sobre la relación actividad-efecto (Simon et al., 2004) que trata de describir la construcción de un nuevo concepto intentando hacer operativa la "transposición a un plano superior" y la "reconstrucción" a las que hace referencia Piaget para explicar el proceso de abstracción. Este marco ofrece "lentes teóricas" con el fin de analizar los conocimientos disponibles de los estudiantes y cómo los utilizan para construir nuevos conceptos.

Tzur y Simon (2004) han identificado dos fases en la elaboración de un nuevo concepto: la fase *de participación*, entendida como el proceso donde el alumno abstrae una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto producido, y la fase *de anticipación* que se refiere al uso de la regularidad abstraída en situaciones distintas a las que se llevó a cabo la abstracción. Roig (2008) ha identificado tres momentos en la fase de participación: *proyección*, *reflexión* y *anticipación local*. En el de *proyección* los alumnos construyen un conjunto de registros o unidades de experiencia, en el de *reflexión* abstraen la regularidad a partir de la información procedente del conjunto de registros, y en la de *anticipación local* aplican la regularidad identificada (la concepción matemática que organiza la situación) a nuevos casos particulares. Roig considera, en términos del mecanismo de *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, que "las acciones propias de la fase de *proyección* están anidadas en la coordinación de información que caracteriza la reflexión" (2008, p. 228) pues se produce en forma paralela a la generación de casos particulares.

Desde este marco teórico, Simon y Tzur (2004) han elaborado la idea de *trayectoria hipotética de aprendizaje* donde consideran los conceptos previos de los estudiantes, los objetivos de aprendizaje, las tareas matemáticas que se usan para fomentar el aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje en el contexto de un conjunto particular de tareas. Estos dos últimos puntos son interdependientes y ahí entra en juego la manera en que se caracteriza el mecanismo de *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, porque se plantea la necesidad de seleccionar aquellas tareas que permitan favorecer la generación de *actividades* y crear el contexto para reflexionar sobre la relación entre la actividad y el efecto producido que sean la base del aprendizaje pretendido.

MÉTODO

Diseño del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza se diseñó atendiendo a los Ciclos de Enseñanza de las Matemáticas descritos por Simon (1995). Estos ciclos contemplan: el conocimiento del profesor, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y la evaluación del conocimiento de los estudiantes; esta evaluación proporciona nuevo conocimiento al profesor y cierra un ciclo de enseñanza.

En nuestro experimento de enseñanza: el conocimiento del profesor sirvió de apoyo para diseñar la secuencia de enseñanza y las tareas, a fin de alcanzar un objetivo de aprendizaje; se describe una trayectoria hipotética de aprendizaje que se apoya en la problemática y el marco teórico antes expuestos; por último se valoró el conocimiento de los estudiantes identificando distintos perfiles. Estos perfiles nos han aportado un nuevo conocimiento sobre cómo parece que ha funcionado el experimento de enseñanza.

El objetivo de aprendizaje del experimento de enseñanza fue que los estudiantes *construyeran* el concepto de integral definida como límite de las sumas de Riemann, a partir de la aproximación al área de la superficie bajo una curva (Turégano, 1998). Se articula de la siguiente manera:

- Cálculo del área del círculo por el método de “agotamiento”.
- Aproximación del área de superficies bajo una curva mediante suma de áreas de rectángulos.
- Diferencia entre área bajo una curva en un intervalo e integral definida de la función definida por la curva en dicho intervalo: Definición de la integral definida.
- Propiedades de la integral.
- Introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

El experimento se llevó a cabo en 8 sesiones de 1 hora durante tres semanas. La secuencia de enseñanza constaba de 11 tareas con guías de trabajo que daban orientaciones y planteaban cuestiones. Los estudiantes podían responder con la ayuda de *applets* diseñados *ad hoc*. El papel de la profesora era hacer de guía durante las sesiones, aclarar dudas y moderar una puesta en común de cada sesión. Los estudiantes trabajaron por parejas o tríos de similar nivel de rendimiento académico.

En esta comunicación nos centramos en la aproximación al área de la superficie bajo una curva.

Trayectoria hipotética de aprendizaje: aproximación al área de la superficie bajo una curva

La Figura 1 muestra el proceso hipotético de construcción de la aproximación al área de la superficie bajo una curva. En el diseño de este proceso se ha tenido en cuenta: por una parte las fases de construcción de un concepto apoyadas en la abstracción reflexiva; por otra las concepciones dinámica y métrica del límite; y por último los distintos sistemas de representar la aproximación al área bajo una curva. Nuestra hipótesis es que los estudiantes *experimentarán* con los *applets* aumentando o disminuyendo con el deslizador el valor de n (número de subintervalos de la partición), lo que les permitirá observar el *efecto* sobre las representaciones geométricas y numéricas que aparecen en pantalla. La realización de este tipo de acciones origina el contexto para generar *registros* de la relación actividad-efecto *relacionando* el incremento del número de subintervalos de la partición con el valor de las sumas superiores e inferiores, con el recubrimiento de la superficie por rectángulos y con una cota del error de aproximación. Se espera que la *reflexión* sobre la relación actividad-efecto dé lugar a *inferir,* por una parte, que cuanto mayor sea el número de subintervalos, mejor será la aproximación del área de la superficie bajo la curva y, por otra, que el error es una cota, es decir, que dado un valor del error de la aproximación, se puede encontrar un valor de n a partir del cual el error es menor que el valor dado.

Estas inferencias pueden llevar a los estudiantes a realizar distintas *coordina*ciones: procesos de aproximación de una sucesión en el dominio y en el rango (concepción dinámica del límite), una cota del error y el número de subintervalos de la partición (concepción métrica del límite); y también entre sistemas de representación. La *reflexión* sobre las mismas les puede llevar, a su vez, a *coordinar* las concepciones dinámica y métrica del límite (al incrementar el valor de n se reduce la diferencia entre las sumas superiores e inferiores y por tanto el error de aproximación). Finalmente, tras el proceso de *reflexión* los estudiantes pueden llegar a aplicar las regularidades observadas a nuevos casos particulares, sin necesidad de experimentar porque sus reflexiones se apoyan en los significados construidos (*anticipación local*).

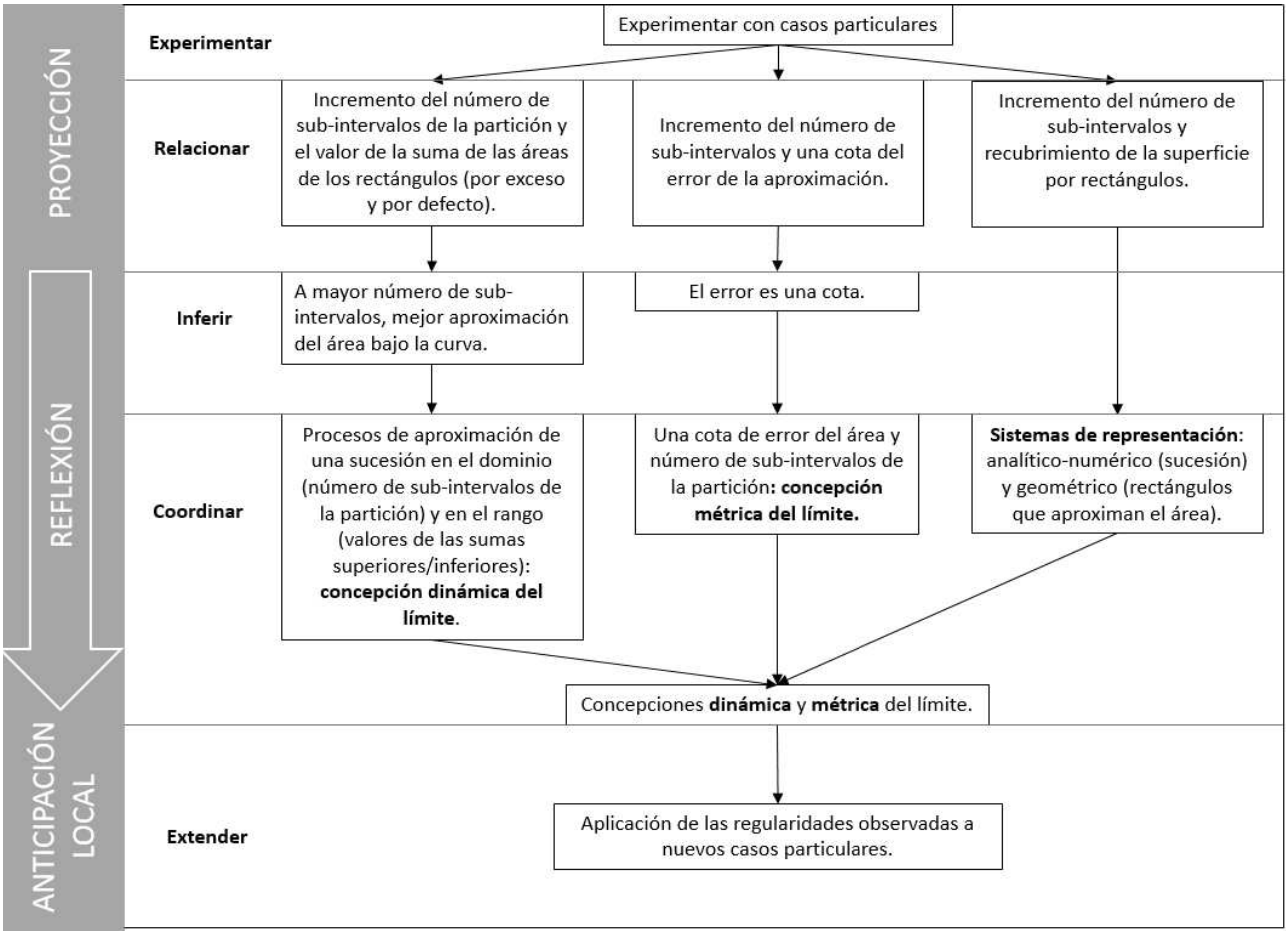


Figura 1. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Tarea propuesta

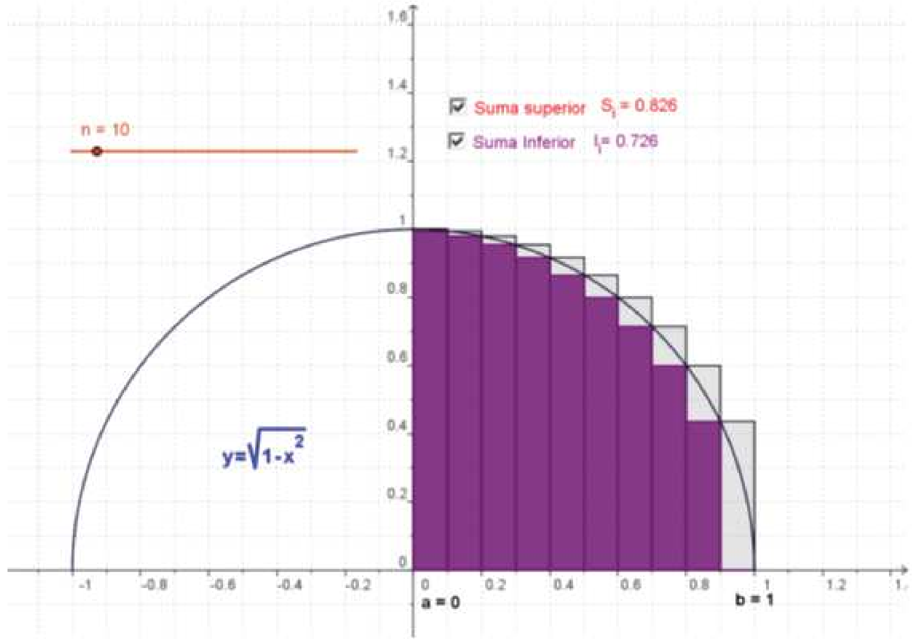
En este trabajo nos centramos en la segunda tarea del experimento de enseñanza donde se pedía aproximar el valor del área bajo la curva $y=\sqrt{1-x^2}$ en el intervalo [0, 1] (Figura 2). El objetivo específico era que los estudiantes, apoyándose en un *applet*, generaran un conjunto de registros de experiencia sobre la relación entre una acción (modificar n, número de subintervalos de la partición) y el efecto producido (si n aumenta mejora la aproximación). El *applet* permite variar n de 0 a 100. En la pantalla aparecen los rectángulos que recubren la superficie por exceso y por defecto, y el valor de las sumas superiores e inferiores.

La *hipótesis sobre el proceso de aprendizaje,* apoyada en los momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva (Figura 1), es que los estudiantes, tras familiarizarse con el *applet* (cuestión I), *experimentarán* aumentando el valor de *n* y observarán lo que ocurre con los valores de *las sumas inferiores y superiores* (cuestiones II y III), *relacionarán* el incremento de *n* con el valor de las sumas superiores e inferiores, con el recubrimiento del cuadrante de círculo por rectángulos y con una cota del error de aproximación.

Tarea: Área del cuadrante. Cálculo aproximado del área mediante particiones

Cuando queremos calcular el área bajo una función no rectilínea, es decir bajo una curva, tenemos que recurrir a aproximaciones. Recuerda cómo calculamos el valor de π aproximando el área del círculo mediante polígonos inscritos y circunscritos en el círculo, aumentando el número de lados y hallando el límite.

Ahora vamos a calcular de nuevo el valor de π, hallando el área del cuadrante de un círculo, usando la función $y = \sqrt{1 - x^2}$, y aproximando mediante rectángulos.



I. Cambia el valor de **n** utilizando el deslizador, y observa:

a. El número de subintervalos en que se divide el intervalo.

Para un valor de **n** dado, ¿cuántos subintervalos hay?

b. La longitud de estos subintervalos.

Para un valor de **n** dado, ¿cuál es la longitud de los subintervalos?

II. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas inferiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

III. Deja sólo marcada la casilla de las **sumas superiores**. Da a **n** el valor 1 y ve aumentando **n**. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de **n** para aproximar el área hasta el valor anterior?

Y si el error máximo fuera 0,02, ¿cuál sería el valor del área y de **n**?

V. Si se aumenta el valor de **n**, ¿qué observas que ocurre con las aproximaciones y con el error de esta aproximación?

Figura 2. Guía de la tarea de aproximación del área de la superficie bajo un arco de circunferencia

Esto les puede llevar a *inferir* que al aumentar el valor de *n* se obtiene una mejor aproximación del área del cuadrante de círculo y que el error se mantiene por debajo de un valor dado. Esto les conducirá, a su vez, a *coordinar* los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, (concepción dinámica del límite), y a *coordinar* los sistemas de representación numéricos y geométricos. De la cuestión IV se espera que establezcan las *coordinaciones* necesarias para construir la concepción métrica del límite. Por último de la cuestión V se espera que los estudiantes lleguen a *coordinar* las concepciones métrica y dinámica del límite.

Participantes

Los participantes fueron 15 estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años) de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Habían estudiado en 1er curso el concepto de límite de una función en un punto con un enfoque procedimental y en 2º el concepto de derivada que se introdujo usando *applets*.

Recogida y análisis de datos

Los datos son las acciones con los *applets* y las declaraciones orales registrados en archivos digitales (Codes, Sierra y Raboso, 2007), y las hojas de respuesta. Primero se hizo la trascripción de las comunicaciones orales y las acciones realizadas con la escena del *applet*. Se consideró como unidad de análisis cada una de las acciones o declaraciones orales o escritas. Después se codificó cada unidad de análisis teniendo en cuenta, por una parte, las acciones realizadas por los estudiantes: experimentar, relacionar, inferir, coordinar y extender y, por otra, los distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva: proyección, reflexión o anticipación local (Figura 1). Dos investigadores codificaron por separado los momentos y acciones y discutieron las discrepancias. Por último se hizo la descripción de las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes a través de los distintos momentos de la fase de participación y de las acciones realizadas, y se agruparon en distintos perfiles en función del momento de la fase de participación en que se encontraban los estudiantes.

RESULTADOS

Hemos identificado tres perfiles de estudiantes que se encuentran en distintos momentos de la fase de participación:

- Los del perfil 1 muestran evidencias de construir la aproximación mediante la coordinación entre dos concepciones del límite: la métrica y la dinámica y de aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones (momento de anticipación local).
- Los del perfil 2 muestran evidencias de construir la aproximación mediante la concepción dinámica y métrica del límite, pero no de conexión entre ambas concepciones (momento de reflexión).
- Los del perfil 3 no dan evidencias de construir una aproximación al área de la superficie bajo una curva como límite de una sucesión (momento de proyección).

Los estudiantes del perfil 3 experimentaron con el *applet* y construyeron algunos registros de experiencia estableciendo algunas relaciones que no les llevaron a hacer inferencias y a establecer las coordinaciones necesarias para construir la aproximación al área. Por ejemplo, hicieron afirmaciones como: *"al aumentar el valor de n las sumas inferiores/superiores van aumentando/disminuyendo cada vez más lentamente"*, constatando así que la sucesión es monótona y no lineal. Pero este registro de experiencia no les llevó a afirmar que si se incrementa el valor de *n* se obtiene una mejor aproximación del área bajo la curva, o a que las sucesiones de sumas inferiores y superiores convergen al mismo valor, por tanto no hemos encontrado evidencias de la concepción dinámica del límite. Una segunda característica es que los estudiantes tuvieron dificultad para entender lo que se les preguntaba cuando se les pedía el valor del área con un error menor que 0,1 (cuestión IV); dieron como respuesta el valor del área para n=100, que es el mayor valor que permitía el deslizador del *applet,* y no intentaron buscar un valor menor de *n*. Por tanto los estudiantes del perfil 3 se encuentran en el momento de *proyección* pues experimentaron e identificaron algunas relaciones, pero no llegaron a hacer inferencias que les llevará a *coordinar* procesos de aproximación.

Los estudiantes del perfil 2 construyeron la concepción dinámica y métrica del límite, pero no mostraron evidencias de que coordinaran entre sí ambas concepciones, pues no llegaron a verbalizar el hecho de que el error disminuye a medida que las sumas superiores/inferiores se aproximan al valor del área. Por ello situamos a estos estudiantes en el momento de *reflexión*.

Evidencias de la concepción dinámica es el uso de expresiones como: *"ésta* [las sumas superiores] *se va acercando desde arriba"*, que pone de relieve la coordinación entre representaciones geométricas (desde arriba) y numéricas (aproximación del valor del área), o *"la suma va aumentando a ... cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área... el área del cuadrante"* (Tabla 1). La utilización del verbo "acercar" es propio de la concepción dinámica de límite.

Tabla 1. Evidencias de la comprensión dinámica del límite. Protocolo pareja K-MA del perfil 2

II. Deja sólo marcada la casilla de las sumas inferiores. Da a n el valor 1 y ve aumentando n. Observa lo que ocurre con el valor de esta suma. Escribe lo que has observado.

Lo que hacen con el *applet*	Lo que dicen
Van moviendo el deslizador: n=6, 2, 1, 95, 56 Dejan marcada la casilla de las sumas inferiores	[16] MA: La suma de los... de los rectángulos, cuando más aumenta n se acerca más al área real de este trozo, de… o sea del sector circular.
Obtienen una aproximación con la calculadora del valor del área del cuadrante de círculo (π/4).	[26] K: Pues eso que la suma va aumentando a… cuanto mayor es n y cada vez acercándose más al área… al área del cuadrante, ¿no?

Una evidencia de la concepción métrica es darse cuenta de que a partir de un valor de *n* se mantiene la aproximación (Tabla 2).

Tabla 2. Evidencias de la comprensión métrica el límite. Protocolo pareja K-MA del perfil 2

IV. Si se pide el valor del área con un error menor que 0,1, ¿cuál sería el valor del área? ¿Cuál sería el valor de n para aproximar el área hasta el valor anterior?

Lo que hacen con el *applet*	Lo que dicen
n=100 Señalan en la pantalla Si=0,790 Ii=0,780 Mueven el deslizador a n=47, n=28, n=30, n=100	[44] MA: Tiene que acercarse a esto [se refieren a 0,78] con menos de una décima de diferencia. [45] K: O sea, más de 0,68 y menos de 0,88,
Mueven el deslizador n=1, 7, 6; Señalan que para n=6: Si=0,849; Ii=0,682 Para n=5 ; Si=0,859, Ii=0,659	[46] K: Pues a partir de n=6 ¿no?

Los estudiantes del perfil 1, además de mostrar evidencias de la concepción dinámica y métrica del límite y de coordinar los significados de ambas concepciones, no necesitaron experimentar con el *applet* cuando se les preguntó por la relación entre la aproximaciones y el error de éstas, lo que sitúa a estos estudiantes en el momento de anticipación local. Un ejemplo de evidencia de la concepción dinámica del límite es la siguiente expresión: *"...su área se aproxima por arriba cada vez más a π/4 [...]. O sea de más a menos. Siempre superiormente",* donde utilizan el verbo "aproximar"; otra evidencia es la constatación de que las dos sucesiones (sumas superiores e inferiores) convergen, pues refiriéndose a las sumas superiores usaron expresiones como: *"pero igualmente se está aproximando a π/4"*, donde entendemos que "igualmente" alude al caso de las sumas inferiores. Una evidencia de la concepción métrica del límite es que, cuando se les pidió el valor de *n* para aproximar el área con un error menor que 0,1 se dieron cuenta de que a partir de un valor de *n* el error seguía siendo menor que 0,1, lo que una pareja expresó diciendo *"le podríamos poner más cuadraditos, rectángulos de esos y seguiría siendo menor que una décima"*. La tercera característica es la coordinación de las concepciones dinámica y métrica del límite, lo que se puso en evidencia con afirmaciones del tipo: *"las aproximaciones cada vez van aumentando poco a poco… y el error se reduce porque se aproxima cada vez más a la integral"*. La no utilización del recurso tecnológico por parte de los estudiantes para hacer la afirmación anterior se puede interpretar como que apoyaron su reflexión sobre los significados construidos y fueron capaces de *extenderlos*, por ello consideramos que los estudiantes de este perfil se encuentran en el momento de *anticipación local*.

CONCLUSIÓN

Este estudio nos ha permitido identificar tres perfiles de estudiantes relativos a la manera en la que construyen los significados de la aproximación al área de la superficie bajo una curva en un caso particular, donde la función es monótona y los estudiantes conocen el valor del área buscada. Cada uno de estos perfiles está en distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva: proyección, reflexión y anticipación local. Estos resultados nos permiten inferir algunos de los saltos cognitivos que se producen para pasar de un momento a otro.

El primer salto cognitivo se produce del momento de proyección al de reflexión, cuando los estudiantes son capaces, por una parte de *coordinar* los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y una cota del error del área y el número de subintervalos. El siguiente salto cognitivo se produce dentro del momento de reflexión, cuando los estudiantes son capaces de *coordinar* los significados de las dos concepciones del límite, la dinámica y la métrica, constatando la relación entre el aumento del valor de n, las aproximaciones y el error de esta aproximación. Camacho, Depool y Socas (2010) han señalado la dificultad de los estudiantes para diferenciar entre el "error de la aproximación" y una "cota del error". El salto del momento de reflexión al de anticipación local se produce cuando los estudiantes son capaces de *extender* las regularidades observadas a nuevas situaciones sin necesidad de experimentar, apoyando su reflexión sobre los significados construidos.

Los logros y dificultades identificados en este ciclo del experimento de enseñanza, nos permitirá diseñar nuevos ciclos de enseñanza. Asimismo es preciso realizar otros estudios en los que se aproxime el área de la superficie bajo una curva en funciones no monótonas o donde no se conozca el valor del área buscada, que permitirán confirmar, matizar o discutir los resultados aquí presentados.

REFERENCIAS

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, Revista de Didáctica de la Matemática, 30*, 67-82.

Boigues, F.J., Llinares, S. y Estruch, V.D. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (3), 129–158.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*, 35-67.

Camacho, M., Depool, R. y Socas, M. (2010). La integral de Riemann. Interpretación de los errores de aproximación utilizando CAS. En A. Contreras y L. Ordoñez, *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 62-78). Baeza, España: SEIEM.
Recuperado el 7 de febrero de 2015 de:
http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

Codes, M., Sierra, M., y Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). Tenerife, España: SEIEM.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu., M. C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229-237). Baeza, España: SEIEM.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-273). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Ferrini-Mundy, J. y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding of limits, derivatives, and integrals. En E. Dubinsky y J.J. Kaput (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning: Preliminary analyses and results* (pp. 31-45). Washington D.C.: MAA.

González, M. T., y Aldana, E. (2010). Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE. En A. Contreras y L. Ordoñez, *Jornadas de investigación en didáctica del Análisis Matemático* (pp. 4-22). Baeza: SEIEM. Recuperado el 7 de febrero de 2015 de: http://www.seiem.es/actividades/archivosactividades/JORNADASDIDACTICAANALISIS.pdf

McDonald, M. A., Mathews, D. y Strobel, K. (2000), Understanding sequences: a tale of two objects. En. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV* (pp. 77-102). Providence: American Mathematical Society.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu., M. C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza, España: SEIEM.

Roig, A. I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (5), 305-329.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.

Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(2), 287-304.