Tecnología digital, actos y procesos semióticos en la definición de límite funcional de weierstrass

Gabriel Tamayo Valdés
Docente I. E. Manuel Germán Cuello G.
Docente catedrático U P C
Valledupar, Colombia
gtamayov@gmail.com
Álvaro Solano S.
Docente Universidad Popular del Cesar- U P C –
Valledupar, Colombia
Alsolano13@gmail.com
Pedro Torres F.
Docente I. E. Técnico La Esperanza
Docente catedrático U P C
Valledupar, Colombia
petofla1@yahoo.es
Jorge Ortiz P.
Docente I. E. Técnico La Esperanza
Valledupar, Colombia
joluorpaco@yahoo.com
Alcides Fernández G.
Docente I. E. Nacional Loperena
Docente catedrático U P C
Valledupar, Colombia
alcifergue@colombiaaprende.edu.co
Grupo de estudio e investigación en educación matemática
(gemat), universidad popular del cesar

Resumen

La teoría de instrucción matemática significativa basada en el modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática denominado Teoría de las Funciones Semióticas (TFS) proporciona un marco unificado para el estudio de las diversas formas de conocimiento matemático y sus respectivas interacciones en el seno de los sistemas didácticos (Godino, 1998).

Presentamos un desarrollo de esta teoría consistente en la descomposición de un objeto, para nuestro modelo, **la Definición de Límite funcional según Weierstrass,** en unidades para identificar entidades y las funciones semióticas que se establecen, en el proceso de enseñanza y aprendizaje en una institución escolar, implementando un ambiente de tecnología digital (calculadora graficadora TI-92 Plus y/o Voyage-200).

Palabras claves: Entidades primarias, función semiótica, ambiente de tecnología digital, instrumentos de mediación semiótica, Límite funcional según Weierstrass.

Introducción

En la actividad matemática los símbolos (significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto básico en los procesos de aprendizaje matemático no es, sin embargo, el dominio de las sintaxis del lenguaje simbólico matemático aunque esta sea también importante, sino la comprensión de su semántica y pragmática, es decir, la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su dependencia de los contextos y situaciones – problemas de cuya resolución provienen. Se hace necesario elaborar modelos teóricos que articulen las dimensiones semióticas (en sus aspectos sintácticos, semánticos y pragmáticos), epistemológica, sociológica y sociocultural en educación matemática (Godino, 1998).

La ontología matemática asociada a la Teoría de las Funciones Semióticos caracteriza los siguientes elementos: Prácticas matemáticas, significados institucionales y personales, Función Semiótica, entidades primarias y dualidades cognitivas, enfoque semiótica de los conocimientos matemáticos, análisis ontológico – semiótico.

La noción de Función Semiótica (Relaciones de dependencia o función entre la expresión y contenido), el tipo de objeto matemático asociado y las dualidades cognitivas se usan para desarrollar un análisis que permite determinar o caracterizar los significados que se ponen en juego en la actividad matemática, y en los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto **definición de Límite funcional según Weierstrass.**

La calculadora graficadora TI-92 Plus (y/o Voyage-200) son herramientas adecuadas para que los estudiantes desarrollen actividades que interrelacionan las representaciones simbólicas-analíticas- y visuales. Estas herramientas (que se transforman en instrumentos de mediación) sirven para establecer la comunicación a través de sistemas de signos. La semiosis es fundamentalmente una acto comunicativo (Winslow, 2003).

Marco teorico

La Teoría de la Función Semiótica (TFS) propone una semiótica específica basada en la teoría del lenguaje de Hjemslev (1943) y sustentada en una ontología matemática explícita de naturaleza pragmática – realista, que pretende ser una herramienta analítica de la cognición matemática adaptada a las necesidades de las investigaciones en Didáctica de las Matemática.

La noción de función semiótica (relaciones de dependencia o función entre expresión y contenido) pueden ser de tipo representacional (un objeto se coloca en lugar de otro), instrumental u operativa (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y componencial o cooperativo (dos o mas objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera las funciones semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. (Godino, 1998).

El problema sobre el que se centra la teoría de la función semiótica se describe como la elaboración de un enfoque teórico unificado de la cognición e instrucción matemática. Interpretar el conocimiento y la comprensión de un objeto (sea ostensivo, no ostensivo; elemental o sistémico) por parte de un sujeto (persona o institución) en términos de las funciones semióticas que el sujeto puede establecer, en unas circunstancias fijadas, en las cuales está en juego el objeto. Cada función semiótica implica un acto de semiosis por un agente interpretante y constituye un ***conocimiento***. Tratar conocimiento equivale a tratar significado, esto es, resultando una variedad de tipos de conocimientos en correspondencia con la diversidad de funciones semióticas que se pueden establecer entre las diversas entidades introducidas en el modelo.

Las entidades primarias en matemáticas pueden ser de tipo notacional, intencional o extensional y se presentan en la interacción del aula en forma ostensiva (que se puede mostrar a otro directamente, pública). Cada una de estas entidades puede jugar el papel de expresión o de contenido en una función semiótica: **"**… vamos a esbozar un modelo teórico que incluye los siguientes tipos de entidades básicas: **Extensivas,** considerando como tales las situaciones-problemas, aplicaciones, tareas, en general, las "entidades extensionales" que inducen actividades matemáticas, **Ostensivas,** esto es, todo tipo de representaciones materiales "públicas" usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, gráficas, tablas, diagramas, etc.), en general, "entidades notacionales", **Intensivas,** ideas matemáticas, abstracciones (conceptos, proposiciones, procedimientos, generalizaciones matemáticas, teorías, esto es, "entidades intencionales") (Godino y Recio, 1998, citado por Font, 2000).

La génesis del conocimiento matemático es producida como consecuencia de la actividad del sujeto cuando enfrenta situaciones problemáticas haciendo uso de los elementos ostensivos e intensivos, por eso la entidad (categoría) **Actuativa** (acción del sujeto describiendo, operando, argumentando, generalizando) es relevante en el modelo" (Godino y Batanero, 2003).

Las Funciones Semióticas se expresan en la siguiente tabla:

	Ext	Int	Not
Ext	FS1	FS2	FS3
Int	FS4	FS5	FS6
Not	FS7	FS8	FS9

Una de las tesis centrales de los enfoques psico-cognitivos de corte sociocultural, consiste en sostener que la acción cognitiva humana es siempre una acción mediada por alguna forma de herramienta o instrumento. Para el aprendizaje se deriva una consecuencia nodal: La naturaleza del conocimiento originado depende de la herramienta o instrumento (semiótico). La calculadora graficadora TI-92 Plus (y/o Voyage-200), herramienta semiótica (instrumento de mediación), sirve para establecer la comunicación a través de sistemas de signos-la semiosis es fundamentalmente un acto comunicativo (Winslow, 2003)-, construir y estructurar el conocimiento matemático de los estudiantes, en la interrelación de representaciones visuales y analíticas-simbólicas- (Moreno, 1999).

Las representaciones que suministra la herramienta semiótica (la TI-92 Plus y/o Voyage-200) son representaciones "ejecutables", es decir, portadoras de simular acciones cognitivas con independencia del usuario, se comunica e interactúa con el estudiante y permite construir nuevos significados. El conocimiento que "vive" en la herramienta es un referente para el niño y la niña, en el proceso de socializar su conocimiento.

Los instrumentos mediadores suministran un amplio abanico de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros y permiten establecer relaciones entre las diversas funciones semióticas.

Desarrollo de la actividad

El análisis que se hace del objeto **Definición de Limite funcional según Weierstrass: "Se dice que una función f: A $\rightarrow$ R tiene límite l cuando x tiende a a (punto de acumulación de A) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.**

$\lim_{x\rightarrow a} f(x) = l \leftrightarrow$ **$\forall \varepsilon > \overline{0}, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ entonces**

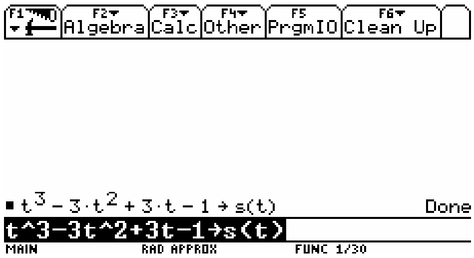
|f(x) – l |< ε”, definición que aparecen en los textos escolares de educación media; utilizaremos la calculadora graficadora TI – 92 Plus y/o voyage – 200 la calculadora virtual

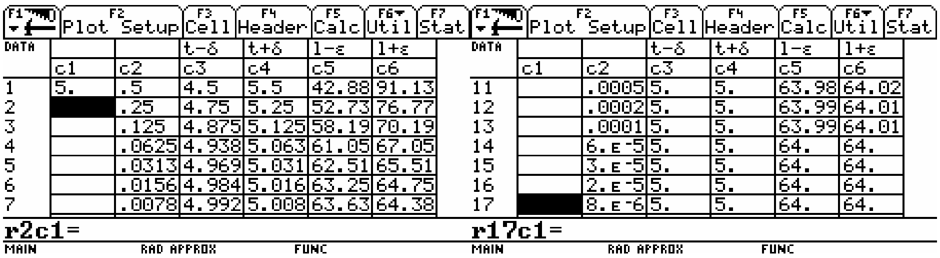
1. Inicialmente se plantea la situación problema: “Un objeto se mueve en línea recta de acuerdo con la expresión $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1$ (s en metros y t en segundos).

   Estudia la Variación de la distancia recorrida entre 4,5 y 5 segundos y, entre 5,5 y 5 segundos.

Esta situación establece las siguientes funciones semióticas, **FS3, FS8, FS2, FS6.** Aquí se presenta un conflicto semiótico entre el modelo y la situación, la distinción de variables, reconocimientos de símbolos y conceptos.

2. Elaboración de una tabla de valores previo almacenamiento de la función.





DATA			t−δ	t+δ	1−ε	1+ε
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
1	5.	.5	4.5	5.5	42.88	91.13
2		.25	4.75	5.25	52.73	76.77
3		.125	4.875	5.125	58.19	70.19
4		.0625	4.938	5.063	61.05	67.05
5		.0313	4.969	5.031	62.51	65.51
6		.0156	4.984	5.016	63.25	64.75
7		.0078	4.992	5.008	63.63	64.38

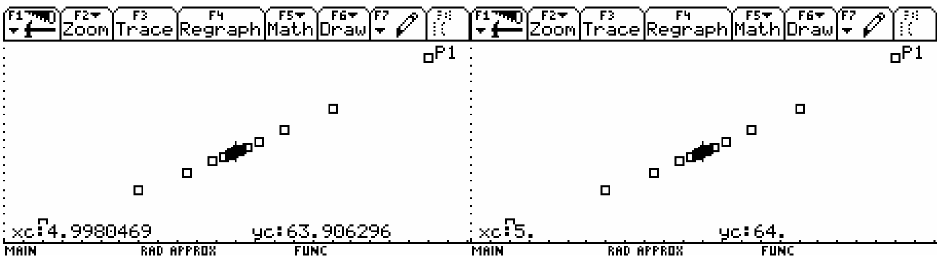
r2c1=

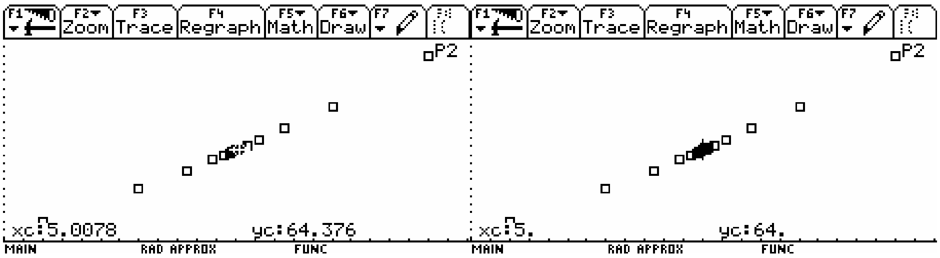
DATA			t−δ	t+δ	1−ε	1+ε
	c1	c2	c3	c4	c5	c6
11		.0005	5.	5.	63.98	64.02
12		.0002	5.	5.	63.99	64.01
13		.0001	5.	5.	63.99	64.01
14		6.E-5	5.	5.	64.	64.
15		3.E-5	5.	5.	64.	64.
16		2.E-5	5.	5.	64.	64.
17		8.E-6	5.	5.	64.	64.

r17c1=

En la elaboración de las tablas se establecen las funciones semióticas **FS3, FS2, FS9, FS7 y FS8.** En esta relación el estudiante visualiza variaciones, intervalos, entornos, convergencias, punto de acumulación.

3. Se orienta la construcción de la gráfica:

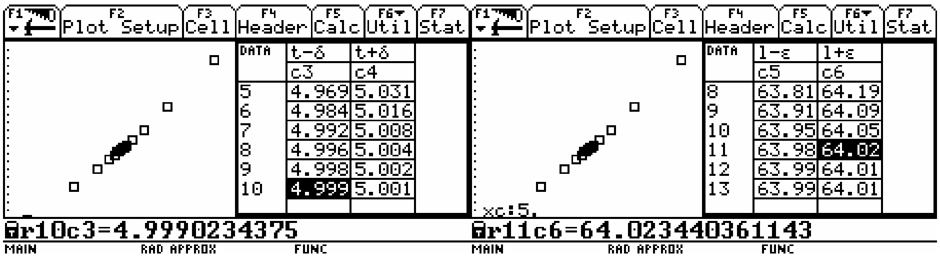




En esta representación se analizan las funciones semióticas, **FS8, FS3, FS7, FS2, FS5, FS6.**

Los estudiantes tienen la posibilidad de afirmar la noción de punto de acumulación, intervalos, entornos y variaciones.

Análisis en pantalla dividida



Posibilita estudiar la variación de s(t), Si t se encuentra entre (5 – δ, 5 + δ) entonces s(t) se encuentra (64 – ε, 64 + ε).

Se discute la expresión: $-\delta < t - 5 < \delta \rightarrow -\varepsilon < s(t) - 64 < \varepsilon$ que orienta

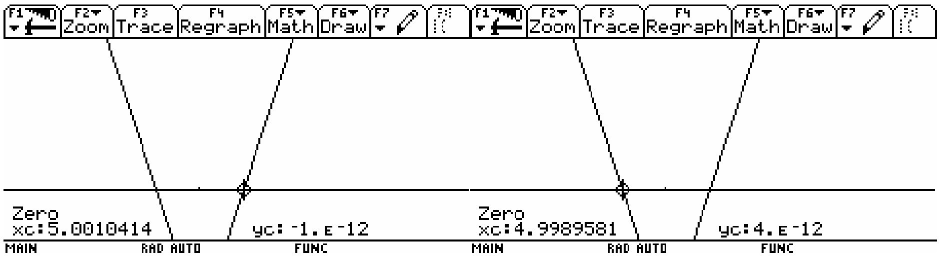
$0 < |t - 5| < \delta \rightarrow |s(t) - 64| < \varepsilon$

Esta situación presenta las funciones semióticas: **FS8, FS9, FS7, FS6, FS3, FS5.** Se presenta la definición del límite funcional según Weierstrass, superando los conflictos semióticos: valor absoluto, evaluación de la función y su límite en un valor fijo.

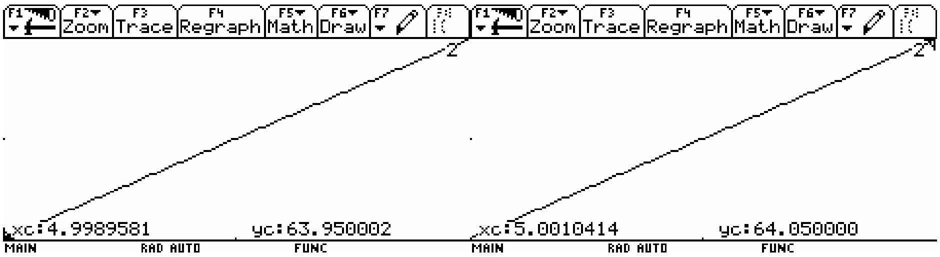
5. Ampliando la relación anterior:

Dado ε = 0,05 encontrar δ.

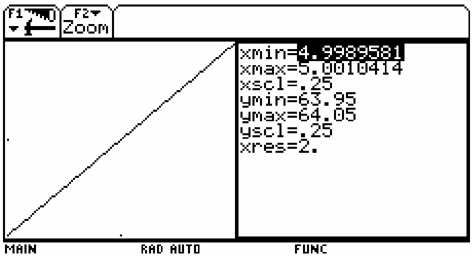
$|s(t) - 64| < 0{,}05$



Graficamos para visualizar el δ



Seleccionamos un **δ = 0,0018**

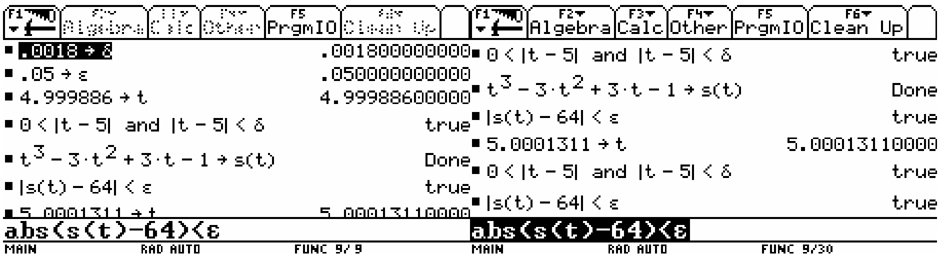


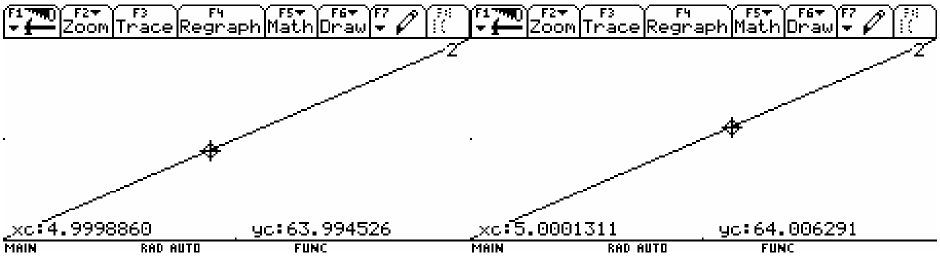
Seleccionamos un t = 4,9998860

0 < I4,9998860 - 5I < **δ = 0,0018** → I**s(t)** - 64I < **ε = 0,05**

Para un **t = 5,0001311**

0 < I5,0001311 - 5I < **δ = 0,0018** → I**s(t)** - 64I < **ε = 0,05**





En estas representaciones se establecen las funciones semióticas: **FS6, FS8, FS9, FS5.**

Se supera el conflicto semiótico en la concepción del ε y el δ, como magnitudes constantes o variables.

CONCLUSIONES

- La noción de función semiótica, la tipología de objetos matemáticos asociada y las dualidades cognitivas se usan para desarrollar una técnica analítica que permite determinar o caracterizar los significados que se ponen en juego en la actividad matemática y en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Al aplicar la teoría de la función semiótica, en lo que respecta al análisis ontológico – semiótico del objeto **Limite funcional según Weierstrass** en el marco de la actividad matemática y didáctica desarrollada por los sujetos participantes, permite la indagación sistemática de los contenidos de las funciones semióticas presentes en la actividad, a partir de la trascripción del proceso y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho objeto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Se pueden confrontar con los significados institucionales en referencia, lo que permite formular hipótesis sobre conflictos semióticos.
- Las funciones semióticas son herramientas de tipo descriptivo que pueden ser útiles, ya que permiten describir con un lenguaje unificado muchos procesos que se han estudiado en el campo del pensamiento matemático.
- Las funciones semióticas y los instrumentos de mediación posibilitan la construcción del conocimiento en lo referente a la comprensión de los objetos matemáticos.

Referencias

CONTRERAS, A, y FONT, V, (2002) ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? XVIII Jornadas del SI – IDM, pp.1-23.

DUVAL, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la U. del Valle, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

FONT, V. (2000), Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza media, Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona. International Newsletter on the teaching and learning of Mathematical proof. Pp. 1 – 22. (Font00.pdf)

GODINO, J. D. (2003), Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas; Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, pp. 1 – 19., (Teoría fs.pdf)

LUPIAÑEZ, J. L. & MORENO A., L. (1999). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. CINVESTAV, IPN, México.
WINSLOW, CARL. (2003). Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. (NOMAD_ICME10.pdf)