PENSAMIENTO FUNCIONAL DE ESTUDIANTES DE PRIMERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Functional thinking in first-year primary teacher students: An exploratory study

Cañadas, M. C.[a] y Fuentes, S.[b]

[a]Universidad de Granada, [b]Colegio Cardenal Raúl Silva Henríquez

Resumen

Este trabajo se enmarca en una investigación más amplia sobre el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria en España. Presentamos parte de los resultados de un estudio exploratorio desarrollado con estudiantes de primer curso (seis-siete años). Mostramos los sistemas de representación y las estrategias que utilizan los estudiantes en la realización de una tarea que involucra la relación funcional f(x)=5x. Los resultados evidencian una variedad de estrategias empleadas por los estudiantes que incluyen la identificación de diferentes relaciones funcionales (adecuadas o no a la tarea) y la utilización de distintos sistemas de representación, con predominio del pictórico.

Palabras clave: *estrategias, pensamiento funcional, relaciones funcionales, sistemas de representación.*

Abstract

This work is developed within a wider investigation about Spanish elementary students´ functional thinking. We present part of the results of an exploratory study developed with students of year 1 (six -seven years old). We show the representation systems and strategies used by the students when solving a task which involves the functional relationship f(x)=5x. The results evidence a variety of strategies used by the students that includes the identification of different functional relationships (adequate or not to the task) and the used of distinct representation systems, with predominance of the pictorial one.

Keywords: *functional relationships, functional thinking, strategies, representation systems.*

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Desde la propuesta curricular *early algebra* recomiendan introducir el pensamiento algebraico en educación primaria e incluso en educación infantil, aprovechando diferentes contenidos curriculares previos a la educación secundaria (e.g., Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015; Kaput, 2008; Molina, 2009). No se trata de adelantar de curso los contenidos que actualmente se trabajan en educación secundaria, si no de dar un enfoque diferente a los contenidos que ya existen o incluso incluir nuevos contenidos que faciliten la aproximación de los estudiantes al álgebra. Uno de los enfoques para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria es el pensamiento funcional. Dentro de este enfoque, Usiskin (1999) propone que el álgebra acompañe a

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

los contenidos de educación infantil y primaria con conceptos algebraicos que relacionen los valores de dos variables, para que los niños puedan establecer relaciones funcionales de forma intuitiva.

Los estudiantes de educación primaria son capaces de identificar relaciones funcionales entre dos variables, representar esas relaciones de diferentes formas (incluyendo el simbolismo algebraico), generalizar relaciones entre dos variables y utilizar relaciones funcionales para interpretar problemas (e.g., Brizuela y Earnest, 2008; Cañadas, Brizuela y Blanton, en revisión; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Merino, Cañadas y Molina, 2013a, 2013b). A nivel internacional, los investigadores abordan el pensamiento funcional en educación primaria a través de tareas que involucran relaciones funcionales lineales. Blanton y Kaput (2004) muestran cómo los niños descubrieron, gradualmente, propiedades en la relación, como la paridad, la relación aditiva o multiplicativa entre las variables. Finalmente, los niños llegaron a introducir el simbolismo algebraico en sus respuestas.

En un proyecto de investigación de Estados Unidos se indaga sobre el pensamiento funcional de los estudiantes de los dos últimos cursos de educación infantil y dos primeros cursos de educación primaria. Con la información recogida en diferentes centros, se logran resultados sobre las estrategias, los sistemas de representación y las relaciones funcionales que usan los estudiantes en la resolución de tareas. Brizuela et al. (2015) llegan a introducir el simbolismo algebraico en primero de educación primaria, con la intención de indagar si utilizan letras para expresar la generalización a partir de la introducción de parejas de datos en una tabla. Algunos de los errores identificados apuntan a la conexión que establecen los estudiantes entre las letras y el orden de las mismas dentro del abecedario. Los estudiantes evidencian su comprensión de las letras como variables, pero no desechan el uso de valores específicos para cada una de las situaciones planteadas. Cañadas et al. (en revisión) analizan la correlación que establecen estudiantes de segundo de educación primaria al trabajar con situaciones que involucran funciones lineales. Entre los resultados, destacan las diferentes estrategias utilizadas para relacionar las dos variables. Por ejemplo, hay niños que utilizan el doble como la suma de un número consigo mismo y otros que utilizan la suma de dos en dos (con base en la relación de recursividad, que les dificulta llegar a la generalización). Las autoras destacan la capacidad de los estudiantes para cambiar del contexto presentado en la situación al matemático, y viceversa.

A pesar de las repercusiones positivas que parece tener el pensamiento funcional en los niños de educación primaria, en España existe una necesidad de investigaciones que lo aborden (Fuentes, 2014; Merino, et al., 2013a, 2013b). Nuestro problema de investigación surge del interés por potenciar el pensamiento algebraico a través de la introducción del pensamiento funcional en edades tempranas. En este trabajo indagamos sobre las relaciones funcionales que establecen los estudiantes de primer curso de educación primaria, las estrategias que usan para resolver tares que involucran estas relaciones y los sistemas de representación que emplean.

MARCO CONCEPTUAL

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se pone de manifiesto al construir, describir y razonar con y sobre las funciones (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011) y está construida por tópicos, procedimientos y relaciones que conciernen a las funciones (Rico, 2006). El pensamiento funcional aborda las ideas de cambio, relaciones entre esos cambios, y utilizar esas relaciones para resolver problemas (Warren y Cooper, 2005). Este tipo de pensamiento tiene por objeto establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos que están inmersos en una situación cotidiana para el estudiante. El pensamiento funcional demanda descubrir otras parejas de datos involucradas en esa situación y la generalización de la relación que se establece entre esos conjuntos de datos.

El simbolismo algebraico es fundamental en temas relacionados con las funciones. Sin embargo, los investigadores sobre el pensamiento funcional consideran que dicho pensamiento incluye, pero no restringe, el pensamiento con notación algebraica, y se puede incorporar, además, el uso del lenguaje natural (oral y escrito), las tablas y los gráficos (e.g., Radford, 2011). La utilización del sistema de representación verbal u otros como el pictórico resultan claves para el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos.

Podemos identificar el pensamiento funcional cuando el niño hace explícita la relación entre las variables o entre los conjuntos, y con esa relación puede abstraer el razonamiento hacia una regla general o generalización. Esta regla puede ser descubierta a través de un proceso inductivo (Cañadas, Castro y Castro, 2008) donde, a través de la recursividad, se llega a la generalización. Para llegar a la generalización es necesario ir más allá de una relación recurrente entre los valores de una variable.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

En este trabajo abordamos los siguientes objetivos de investigación, relacionados con el pensamiento funcional.

- Identificar y describir estrategias que utilizan los estudiantes de primero de educación primaria en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales lineales.
- Describir los sistemas de representación que utilizan los estudiantes de primero de educación primaria en la resolución de tareas que involucran relaciones funcionales lineales.

MÉTODO

Este trabajo es de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Se trata de un estudio transversal realizado con una muestra intencional de 32 estudiantes de primero de educación primaria (seis-siete años). Estos niños asistían a un centro concertado de Granada (España) y no habían trabajado previamente los contenidos ni el tipo de tareas previstos para esta investigación. En particular, no habían trabajado la multiplicación. Sí habían abordado la identificación de patrones geométricos, conteos de uno en uno y de dos en dos con su maestra, sin asociarlos a ningún contexto.

Las autoras recogimos la información analizada en este trabajo en una sesión de clase a través de una prueba individual escrita. En la prueba hay una situación descrita, que también explicamos oralmente. Esta situación involucra una relación funcional lineal con dos variables y con dominio los números naturales. La relación se establece entre número de niños y número de globos que deben comprarse para una fiesta de cumpleaños: 5 globos para cada niño (la función involucrada es $f(x)=5x$). Las variables de tarea para los apartados de la tarea son: (a) tamaño de los números implicados, (b) sistemas de representación empleados en el enunciado, (c) sistemas de representación en el que se les pedía la respuesta y (d) preguntas sobre casos particulares consecutivos o no consecutivos.

En primer lugar comentamos en gran grupo los casos particulares de 1 y 2 niños y el número de globos que necesitan. A continuación presentamos los apartados que los alumnos debían contestar en la prueba y explicar lo mejor posible.

- A. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 3 niños a la fiesta de cumpleaños?
- B. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 4 niños a la fiesta de cumpleaños?
- C. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 5 niños a la fiesta de cumpleaños?
- D. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 8 niños a la fiesta de cumpleaños?
- E. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 10 niños a la fiesta de cumpleaños?
- F. ¿Cuántos globos tenemos que comprar si asisten 20 niños a la fiesta de cumpleaños?
- G. Explícale a la mamá de Lola cuántos globos tiene que comprar si asisten 100 niños a la fiesta de cumpleaños.

Con base en la teoría fundamentada (Corbin y Strauss, 1990) y nuestros objetivos de investigación, realizamos varias revisiones de datos y elaboramos diferentes categorías hasta llegar a las categorías definitivas para analizar la información: (a) responde (sí/no), (b) corrección (sí/no), (c) sistemas de representación (simbólico, pictórico, verbal, tabular, etc.) y (d) estrategias (conteo de dibujos, respuesta directa, asociación de elementos en grupos, cambia el número de niños en la relación u otra estrategia). Los valores correspondientes a sistemas de representación no son disjuntos, pues los estudiantes podían emplear varios en un mismo apartado.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

En este apartado describimos el trabajo de los estudiantes en cada apartado de la tarea. En las tablas 1 y 2 recogemos el resumen de resultados del número de estudiantes para cada una de las categorías descritas. En la tabla 1 recogemos la información relativa a la respuesta, su corrección y los sistemas de representación que emplean los estudiantes en cada apartado.

Tabla 1. Respuestas y sistemas de representación

		Sistema de representación			
			Simbólico		
Responden	Responden correctamente	Pictórico	N	O	Verbal
Apartado A					
32	10	14	20	3	3
Apartado B					
32	10	14	20	3	3
Apartado C					
30	7	16	15	2	3
Apartado D					
30	4	16	15	2	3

Tabla 1. Respuestas y sistemas de representación

		Sistema de representación			
			Simbólico		
Responden	Responden correctamente	Pictórico	N	O	Verbal
		Apartado E			
29	3	16	14	2	3
		Apartado F			
28	0	14	13	2	4
		Apartado G			
22	1	2	11	1	19

Nota. N = numérico; O = operaciones.

Como se observa en la tabla 1, en los primeros apartados (casos particulares consecutivos), casi la totalidad de los estudiantes contestan (A, B, C). En apartados relativos a casos particulares no consecutivos (D, E, F), observamos que el número de estudiantes que responden cada apartado va disminuyendo, llegando a 22 en el apartado G, sobre la generalización de la relación.

En todos los apartados, el número de estudiantes que contestan correctamente es menor a un tercio. Ese número también va disminuyendo según avanzamos en los apartados, conforme aumenta el nivel de complejidad. En los dos primeros apartados, 10 estudiantes contestan correctamente, pero esta cifra decae progresivamente hasta llegar a ningún y un estudiante en los apartados F y G, respectivamente.

Los estudiantes utilizaron varios sistemas de representación simultáneamente en todos los apartados. Alrededor de la mitad de los estudiantes realizaron dibujos (sistema de representación pictórico) en todos los apartados menos en el G. La mayoría de estos estudiantes combinaron los dibujos con números en sus respuestas (sistemas de representación pictórico y numérico). Por otro lado, dos o tres estudiantes utilizaron operaciones para dar respuesta a todos los apartados de la tarea. Tres o cuatro estudiantes dieron su respuesta verbalmente a todos los apartados excepto el G. En el último apartado de la tarea aumenta significativamente el número de estudiantes que responden verbalmente (19) ya que en él se pidió que explicaran su respuesta. De ahí también el bajo número de estudiantes que utilizan el sistema de representación pictórico (2).

En cuanto a las estrategias utilizadas, identificamos tres: (a) conteo de dibujos, (b) respuesta directa y (c) asociación de elementos en grupos de cinco. A continuación describimos cada estrategia y diferentes formas de emplearlas.

Conteo de dibujos. Hacen dibujos de globos y los cuentan.

- Relación 1-5. Dibujan cinco globos por cada niño.
- Sin relación. Dibujan globos pero no hay relación entre estos y el número de niños dado.

Respuesta directa. Presentan un número de globos como respuesta, sin explicaciones.

- Relación 1-5. El número de globos es cinco veces el número de niños.
- Relación 1-1. El número de globos coincide con el número de niños.

- Relación n+5. El número de globos es igual al número de niños más cinco.
- Sin relación. El número de globos no tiene relación aparente con el número de niños dado.

Asociación de elementos en grupos. Presentan varios grupos de globos.

- Todos los grupos correctos. Hacen grupos de cinco globos o con números cinco y todos los grupos tienen cinco elementos.
- Algunos incorrectos. Hacen grupos de cinco globos y algunos de los grupos tienen más o menos de cinco elementos.

Cambia el número de niños de la relación. Responden considerando un número de niños diferente al dado.

Otra estrategia. Hay una estrategia diferente de las anteriores que no ayuda a responder el apartado.

En la tabla 2 presentamos el número de estudiantes que utilizó cada una de las estrategias descritas.

Tabla 2. Estrategias

Conteo de dibujos			Respuesta directa				Asociación en grupos			
R 1-5	R 1-1	SR	R 1-5	R 1-1	R n+5	SR	TC	AI	CNNR	OE
Apartado A										
5	3	4	4	1	3	8	3	0	0	1
Apartado B										
3	4	3	4	1	1	9	4	0	2	1
Apartado C										
1	10	1	2	1	1	9	3	0	1	1
Apartado D										
1	10	1	1	1	1	10	3	0	2	1
Apartado E										
1	10	1	1	1	1	9	2	0	3	1
Apartado F										
0	5	6	0	1	1	9	1	1	3	1
Apartado G										
0	0	2	0	12	2	5	1	0	0	0

Nota. R 1-5 = relación 1-5; R 1-1 = relación 1-1; R n+5 = relación n+5; SR = sin relación; TC = todos correctos; AI = algunos incorrectos; CNNR = cambia el número de niños de la relación; OE = otra estrategia.

En la tabla 2 se observa que entre 10 y 12 estudiantes dibujaron los globos y los contaron en cada apartado. Entre 12 y 19 estudiantes dieron una respuesta directa a cada apartado. El número de estudiantes que contaron los globos siempre fue menor o igual al número de estudiantes que respondieron directamente en todos los apartados. La asociación en grupos la utilizaron entre uno y tres niños según el apartado, siendo la estrategia empleada con menor frecuencia en todos los apartados.

Identificamos la relación 1-1 en nueve y siete estudiantes en los apartados A y B, respectivamente. Hasta 11 estudiantes utilizan la relación 1-1 en tres apartados (C, D y E). Hasta 10 estudiantes no identificaron relación en un apartado. La mayoría de estudiantes que no identifican la relación se corresponden con respuestas directas.

Hasta cuatro estudiantes asociaron los globos en grupos en un apartado (el B). Tres estudiantes utilizaron esta estrategia en todos los apartados. Hay un estudiante que establece grupos y considera alguno de ellos con el tamaño incorrecto, dando una respuesta errónea.

Observamos que cambiar el número de niños invitados a la fiesta se vuelve más común cuando los casos particulares no son consecutivos. Algunos estudiantes continúan la secuencia según un patrón, sin tener en cuenta la relación establecida con el número de niños.

Un estudiante evidencia otra estrategia que no le permite resolver los apartados correctamente. En la figura 1 mostramos un ejemplo de esto en el apartado D.

Figura 1. Ejemplo de otra estrategia (estudiante 27, apartado D)

A continuación, mostramos ejemplos del trabajo que realizaron los estudiantes en algunos apartados y que dan muestra de los sistemas de representación utilizados y de las estrategias.

Seis estudiantes usaron la relación 1-5 en el apartado C (ver tabla 2). De ellos, dos a través de una respuesta directa, uno con dibujos y tres hicieron grupos. En la figura 2 mostramos la respuesta de uno de estos tres estudiantes. Observamos que los globos dibujados se encuentran distribuidos en grupos de cinco y que hay tantos grupos como niños hay (5). Once estudiantes identificaron la relación 1-1, de los cuales uno dio una respuesta directa y los 10 restantes dibujaron los globos.

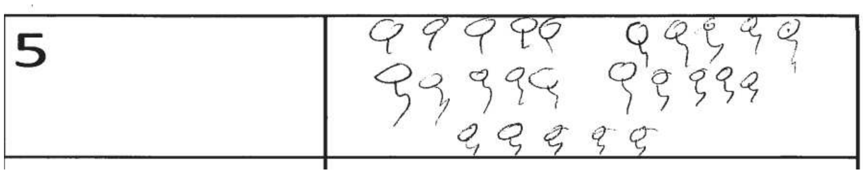

Figura 2. Ejemplo de creación de grupos(estudiante 26, apartado C)

En cuanto a las estrategias que utilizaron los estudiantes en el apartado E, tres estudiantes identificaron la relación 1-5. Uno de ellos mediante dibujos (ver figura 3), utilizando los sistemas de presentación pictórico y simbólico. Como observamos, presenta el 50 como respuesta y dibuja los 50 globos.

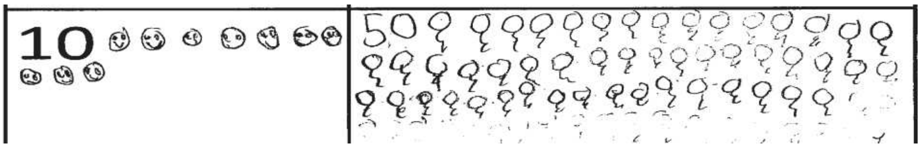

Figura 3. Ejemplo de conteo de dibujos en relación 1-5(estudiante 15, apartado E)

En el apartado G, un estudiante identificó la relación 1-5 a través de la conformación de grupos y 12 identificaron la relación 1-1 en su respuesta directa. Como en el apartado se pide que expliquen su respuesta, un elevado número de estudiantes utilizan el sistema de representación verbal. Hay siete estudiantes que hacen explícita la relación funcional que establecen. Analizamos la respuesta del estudiante 4, quien expresó: “ai sien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100” (hay cien niños 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 100). En esta respuesta se evidencia la utilización de una serie de 5 hasta llegar a 100. La relación más común fue la 1-1 y en algunos casos establecieron la relación n+5. Otro estudiante utilizó la serie numérica en la que incluyó tantos cincos como niños, aunque se equivocó en la cantidad de cincos en el apartado D.

Algunos estudiantes siguieron la misma estrategia en todos los apartados pero no siempre fue así. Por ejemplo, el estudiante 7 contestó correctamente a los apartados A, B, C, identificando la relación 1-5. Sin embargo, para los apartados D, E, F, entrega un número sin relación aparente y en el apartado G utilizó la relación n+5. Otro ejemplo lo observamos en el estudiante 15, quien contestó correctamente los apartados A, B, C, D, E, pero dio una respuesta incorrecta al apartado F. En el apartado G utilizó la relación n+5. Esto pone de manifiesto que el estudiante respondió a los primeros apartados mediante una relación de recurrencia y no llegó a detectar el patrón de forma general.

CONCLUSIONES

Con este trabajo contribuimos a la investigación que se está llevando a cabo sobre *early algebra* y, específicamente, sobre el pensamiento funcional en edades tempranas. Esta investigación es innovadora porque contribuye a una línea de actualidad que ha recibido poco tratamiento en España. Parte de la originalidad de esta investigación radica, a nivel internacional, en el trabajo con estudiantes de primero de educación primaria, donde son escasos los trabajos desarrollados.

Para dar respuesta a los objetivos de investigación, hemos analizado las producciones escritas de 32 estudiantes de primero de educación primaria en la realización de una tarea que involucra una relación funcional del tipo f(x)=5x. El sistema de categorías desarrollado para este trabajo puede ser útil para futuras investigaciones en este u otros niveles educativos para tareas similares.

El sistema de representación más frecuentemente utilizado por los estudiantes fue el pictórico, a excepción del apartado sobre generalización donde, como era de esperar, el sistema de representación verbal fue el predominante. El pictórico apareció usualmente vinculado con el sistema de representación simbólico (números). Algunos estudiantes llegaron a la expresión numérica final mediante el conteo o mediante la expresión de operaciones entre números que anotaban. Además, hubo estudiantes que utilizaron el sistema de representación verbal, a través del cual explicaron su respuesta. Debemos destacar que su vocabulario era muy pobre y, en ocasiones, esto dificultaba su explicación. Esto no es de extrañar si tenemos en cuenta su edad y que la mayoría de ellos eran lectores y/o escritores principiantes.

En cuanto a las estrategias utilizadas por los estudiantes, destacamos las relaciones entre las variables implicadas que los estudiantes detectan. La relación 1-5, que es la correcta, la hemos encontrado tanto en respuestas de estudiantes que realizan dibujos de niños y globos y realizan el recuento sobre los mismos; como en casos en los que dan una respuesta directa. Entre las relaciones que dan lugar a una respuesta inadecuada para la situación planteada en la tarea, los estudiantes utilizan la relación 1-1 y n+5 para dar soluciones a la tarea. En el primer caso, los estudiantes consideran que necesitan el mismo número de globos que niños haya, por lo que no están considerando el contexto (no matemático) de la tarea. También es posible que estos estudiantes hayan utilizado la relación funcional de una tarea previa que involucraba la relación identidad. En el otro caso, parece ser una confusión entre la estructura multiplicativa del problema (que se correspondería con una expresión del tipo 5n) y la estructura aditiva que ellos tienen en cuenta (n+5). Esto puede deberse a que en este curso están trabajando fundamentalmente con la estructura aditiva. En este sentido, algunos estudiantes utilizan la asociación de elementos en grupos, una vía habitual de la introducción de la estructura multiplicativa. Entre los estudiantes que hacen grupos de cinco globos, se presenta un error que consiste en considerar algún grupo que no tiene cinco globos.

Los resultados enriquecen los antecedentes internacionales citados. Además, desde el punto de vista nacional, presentamos una primera aproximación a la descripción del pensamiento funcional de los estudiantes de primero de educación primaria. Es viable la incorporación de tareas relacionadas con este pensamiento en este curso. Los estudiantes son capaces de desarrollar estrategias y de identificar patrones de forma general, más de lo que cabía esperar en un comienzo dados sus conocimientos previos. Este trabajo nos proporciona información para lograr profundizar en un futuro en otros cursos de educación primaria y educación infantil.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

REFERENCIAS

Blanton, M. y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the ―best deal‖ problem. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273-301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. M. y Gardiner, A. (2015b). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1-30.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Blanton, M. (en revisión). Second graders articulating ideas about linear functional relationships.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137-151.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*, 87-115.

Corbin, J. y Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology, 13*(1). 3-21.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Master. Universidad de Granada, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6263/

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México, DF: McGraw Hill.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, Blanton y Kaput (2004) NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013a). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013b). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in mathematics education monograph series* (pp. 303-322). Nueva York, NJ: Springer.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66.

Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 7-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood, 6*(2), 150-162.