UNA HERRAMIENTA PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MODELOS PRODUCIDOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FERMI

A tool for characterization of models produced in the resolution of Fermi problems

Gallart, C.[a], Ferrando, I.[b], García-Raffi, L. M.[c], Albarracín, L.[d], y Gorgorió N.[d]

[a]Universidad Cardenal Herrera-CEU, Valencia, [b]Universitat de València, [c]Universitat Politècnica de València, [d]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este trabajo presentamos una herramienta de caracterización de los modelos matemáticos que producen los alumnos de Educación Secundaria. En concreto, utilizamos esta herramienta para analizar las producciones de los estudiantes de 16 años de dos centros diferentes al resolver Problemas de Estimación de Grandes cantidades, que son un tipo de problemas de Fermi. Los resultados muestran que la herramienta propuesta permite distinguir aspectos diferenciadores entre los modelos producidos por alumnos sin experiencia modelizadora, de los producidos por alumnos con experiencia previa.

Palabras clave: *tareas de modelización, problemas de Fermi, educación secundaria*

Abstract

In this work we present a tool for characterizing mathematical models produced by secondary students. We use this tool to analyze the productions of 16 years students of two different centers in Problems of Estimation of Big Quantities, a sort of Fermi problems. The results show that the proposed tool is useful to distinguish aspects between the models produced by students without modelling experience and those produced by students with prior experience.

Keywords: *modelling tasks, Fermi problems, Secondary School*

INTRODUCCIÓN

Cada vez existen más propuestas a nivel internacional que se centran en el uso de las matemáticas en situaciones contextualizadas, véanse los recientes estudios PISA (OECD, 2014), por ejemplo. El currículo de Educación Secundaria Obligatoria en España ha incluido recientemente de forma explícita la práctica de procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.

En trabajos previos hemos observado que los Problemas de Estimación de Grandes Cantidades (PEGC) son un tipo concreto de problemas de Fermi y que, por su naturaleza, son problemas contextualizados que los alumnos pueden resolver introduciendo elementos de modelización (Albarracín y Gorgorió, 2013). En este trabajo utilizamos problemas que se centran en realizar estimaciones de cantidades de personas u objetos en un determinado plano, como puede ser la estimación de la cantidad de personas en un recinto acotado.

Nuestros datos provienen de dos experiencias de aula realizadas en paralelo y con alumnos de 16 años que resuelven una misma secuencia de PEGC. Las producciones de los alumnos al resolver este tipo de tareas de respuesta abierta son diversas y presentan una gran variedad de estrategias de resolución (Albarracín y Gorgorió, 2014). Este hecho supone un reto para la gestión de aula por parte del profesor (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015a) ya que cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas matemáticos contextualizados en los que se plantean

Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2015). Una herramienta para la caracterización de modelos producidos en la resolución de Problemas de Fermi. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 269-278). Alicante: SEIEM.

interrogantes relacionados con fenómenos o situaciones reales "todas las competencias matemáticas se activan durante el proceso de modelización" (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015b, p. 101).

Por ello, presentamos una herramienta para caracterizar los modelos matemáticos que elaboran los alumnos, con el objetivo de poder evaluarlos o crear una guía de posibles resoluciones que permita preparar la fase de anticipación de las actividades que involucren este tipo de tareas. La secuencia de problemas diseñada ha sido utilizada con alumnos en dos centros diferentes: en uno de ellos los alumnos tenían experiencia previa en modelización ya que, durante el curso anterior trabajaron por grupos problemas de modelización cuya resolución presentaron y discutieron en clase; los alumnos del otro centro carecían de experiencia en resolución de problemas de modelización. En este trabajo utilizamos la herramienta de análisis propuesta con el propósito de determinar las diferencias en los modelos elaborados por los alumnos de ambos centros.

SOBRE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

En este estudio tomamos la siguiente definición de modelo matemático propuesta por Lesh y Harel (2003):

> Los modelos son sistemas conceptuales que tienden a expresarse usando diversos medios de representación que interactúan entre ellos. Pueden implicar símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos generados por ordenador, diagramas en papel o metáforas basadas en la experiencia. Su propósito es construir, describir o explicar otros sistema(s).
>
> Los modelos incluyen: (a) un sistema conceptual para describir o explicar los objetos matemáticos pertinentes, así como las relaciones, acciones, patrones y regularidades que se atribuyen a la situación; y (b) los procedimientos para generar construcciones útiles y realizar predicciones. (p. 159)

A partir de esta definición, entendemos que la elaboración y creación de modelos matemáticos destinados a describir o representar de forma abstracta un determinado fenómeno o realidad es un proceso complejo. En efecto, en un modelo matemático tienen cabida diferentes elementos que le dan forma, como pueden ser conceptos matemáticos, representaciones simbólicas de la realidad o esquemas, así como los procedimientos, matemáticos o no, asociados a su uso.

La forma en la que los estudiantes elaboran modelos matemáticos para resolver problemas es objeto de discusión y existen diferentes posiciones al respecto (Borromeo Ferri, 2006) aunque, en general, se acepta que los procesos de modelización tienen una naturaleza cíclica. El recorrido del ciclo de modelización no es lineal (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014), los alumnos tratan de resolver los problemas en un proceso que pasa por las diferentes fases y vuelve a comenzar para tratar de encontrar una representación matemática que describa el fenómeno estudiado o permita responder a las preguntas formuladas de la forma más adecuada posible. De esta forma, el proceso se repite en diferentes iteraciones en las que se mejoran los modelos y soluciones encontradas, adaptándose a las necesidades que marca el enunciado en cada momento (Blum y Borromeo Ferri, 2009). Siguiendo a Blum (2003), los procesos de modelización se pueden estructurar en cinco fases principales: 1) simplificar el problema real a un modelo real; 2) matematizar el modelo real, pasando a un modelo matemático; 3) buscar una solución a partir del modelo matemático; 4) interpretar la solución del modelo matemático; y 5) validar la solución matemática interpretándola en el contexto del problema real.

SOBRE LOS PROBLEMAS DE FERMI

Una estimación es un juicio del valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de las circunstancias y necesidades de la persona que emite ese juicio (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989). En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que una estimación es la forma más adecuada de dar respuesta a una pregunta, ya sea porque no disponemos de los medios para responderla de forma precisa, porque no dispongamos de toda la información necesaria o porque el esfuerzo para ofrecer una respuesta exacta es excesivo o simplemente innecesario. Un caso concreto de actividades que requieren un proceso de simplificación y matematización de una realidad son los denominados problemas de Fermi. La definición de problema de Fermi que ofrece Ärlebäck (2009) es la siguiente:

> Open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations. (p. 331)

Efthimiou y Llewellyn (2007) caracterizan los problemas de Fermi a partir de su particular formulación, ya que siempre parecen difusos, ofreciendo poca información concreta o pocos aspectos relevantes para enfocar el proceso de resolución. Es a partir de un análisis detallado de la situación presentada en el enunciado que se puede descomponer en problemas más sencillos que permitan llegar a la solución de la pregunta original. Por su naturaleza, los problemas de Fermi permiten estrategias de resolución más sencillas que las tareas abiertas de modelización, aunque en ambos casos los alumnos ponen en juego varias competencias con interrelaciones complejas. De esta forma observamos que existe una fuerte conexión entre los procesos de resolución de los problemas de Fermi y trabajo desarrollado durante el ciclo de modelización para la elaboración de un modelo matemático (Ärlebäck, 2009; Borromeo Ferri, 2006) sobre todo en las primeras experiencias de los alumnos. Por este motivo consideramos que los problemas de Fermi, y los PEGC en concreto, representan una oportunidad para estudiar la competencia modelizadora de los alumnos, tanto si han seguido una enseñanza tradicional como si han trabajado de forma específica la resolución de tareas de modelización.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

En este artículo estudiamos el trabajo de aula de alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria (16 años) al resolver dos problemas de estimación de grandes cantidades. Los dos problemas han sido diseñados como parte de una secuencia con la intención de proporcionar a los alumnos situaciones que les permitan desarrollar sus propios modelos matemáticos y adaptarlos a nuevas situaciones, con diferentes niveles de complejidad. De esta forma, los objetivos de nuestro estudio son los siguientes:

1. Analizar los modelos matemáticos producidos por los alumnos durante la secuencia de PEGC utilizando una nueva propuesta de herramienta de caracterización de modelos.

2. Identificar los elementos diferenciadores de los modelos producidos entre alumnos con experiencia previa en actividades de modelización y los que no la tienen.

METODOLOGÍA

El estudio que presentamos en este documento se basa en los datos recogidos en dos centros diferentes relacionados con la resolución de una secuencia de PEGC. Este tipo de problemas permiten el trabajo en el aula relacionado con la generación y uso de modelos matemáticos en su resolución (Albarrracín y Gorgorió, 2013). Los PEGC no son habituales en las aulas, por lo que los alumnos no conocen métodos específicos para resolverlos. Al tratar con grandes cantidades no resulta eficiente realizar aproximaciones simplistas a la solución, como utilizar recuentos exhaustivos de objetos, con lo que este tipo de problemas provoca la necesidad en los alumnos generar estrategias matemáticamente ricas que incluyan elementos matemáticos para representar la realidad estudiada (Albarracín y Gorgorió, 2014).

Para orientar el diseño de la secuencia de problemas utilizada se han considerado los aspectos que configuran las actividades que promueven la modelización o *modelling-eliciting activities* (Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000). Siguiendo las recomendaciones de Wessels (2014), hemos tratado que las actividades sean complejas, alejadas de los problemas convencionales asociados a procedimientos de resolución definidos y que incluyan diferentes contextos reales.

De esta forma, la secuencia de PEGC utilizada consta de una serie de problemas de Fermi que tratan una misma problemática ─desde el sentido estrictamente matemático─ ya que todos los problemas piden a los alumnos una estimación del número de personas u objetos que se pueden colocar en una determinada superficie. El diseño de la actividad se basa en un primer problema que permite el trabajo de campo en el propio centro educativo de forma que los alumnos puedan desarrollar métodos de resolución que puedan ejecutar in situ. Posteriormente, se plantea a los alumnos la resolución de un grupo de problemas que no pueden resolverse experimentalmente en un entorno accesible, con lo que se genera la necesidad de transferir las estrategias de resolución del primer problema a otros contextos. En este estudio nos centramos en el análisis de las producciones de los alumnos para dos de los problemas, el problema A que resuelven experimentalmente en el patio del centro y el problema B que resuelven posteriormente dentro del aula. Los enunciados de estos problemas son los siguientes:

Problema A: ¿Cuánta gente cabe en el patio del instituto?

Problema B: ¿Cuántos árboles hay en Central Park?

El trabajo en el aula se estructura esencialmente en grupos heterogéneos. Los alumnos trabajan en grupos de 3 o 4 personas durante diversas sesiones. En la primera sesión los alumnos resuelven el problema A y presentan su trabajo a los otros grupos en una puesta en común. Las siguientes sesiones se dedican al trabajo en el resto de problemas, entre los que se encuentra el problema B.

La experiencia que presentamos se ha realizado con dos grupos, uno de 24 alumnos de 4º de ESO de un centro de Valencia (que llamaremos grupo E1), distribuidos en 7 equipos de trabajo, y otro (que llamaremos E2) formado por 22 alumnos, distribuidos en 6 equipos del mismo nivel educativo de un centro de la provincia de Barcelona. Los alumnos del grupo E1 tenían experiencia previa trabajando en actividades de modelización. En total tenemos las resoluciones escritas de los problemas A y B de 6 equipos de trabajo de alumnos sin experiencia en modelización y 7 equipos con esa experiencia.

PROCESO DE ANÁLISIS Y RESULTADOS

Para analizar los modelos matemáticos generados por los alumnos proponemos a continuación una herramienta que nos permita caracterizar cualitativamente los aspectos esenciales que los definen y que puedan proporcionarnos una idea objetiva de la complejidad con la que representan la situación estudiada.

Tabla 1. Elementos de caracterización de modelos matemáticos

Elementos	Concreciones
Sistemas conceptuales	Uso de diversos objetos matemáticos Relaciones entre los diferentes objetos matemáticos para obtener resultados-conclusiones Observación de patrones y/o regularidades en los datos
Procedimientos	Utilización de uno o diversos procedimientos para llegar a resultados/conclusiones
Lenguajes	Utilización de lenguaje simbólico Utilización de lenguaje oral Utilización de lenguaje escrito Realización de esquemas o diagramas

Siguiendo a Lesh y Harel (2003), consideramos que un modelo matemático está formado por conceptos y procedimientos de forma interrelacionada. Al mismo tiempo, en el momento de comunicar el modelo producido intervienen símbolos, gráficos y lenguajes que pueden complementar la carga conceptual del modelo, como podría ser el uso de metáforas (Presmeg, 1997). Estos elementos para la caracterización de los modelos matemáticos generados por los alumnos se muestran en la Tabla 1. Hemos utilizado esta herramienta de análisis para caracterizar los modelos propuestos por los alumnos de los dos grupos experimentales al enfrentarse a los problemas A y B.

En lo relativo a los **sistemas conceptuales** en ambos problemas se han identificado dos conceptos fundamentales: la noción de *densidad de población* entendida como el número de elementos en un espacio determinado y la *iteración de la unidad*, que se basa en determinar la superficie ocupada por un número determinado de elementos. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos en el análisis de los sistemas conceptuales propuestos. Debemos señalar que uno de los equipos del grupo E2 no resolvió el problema B y que otro equipo de E2 utiliza un sistema conceptual diferente para resolver el problema A, en el que se plantean una distribución de personas en cuadrícula.

Tabla 2. Sistemas conceptuales detectados

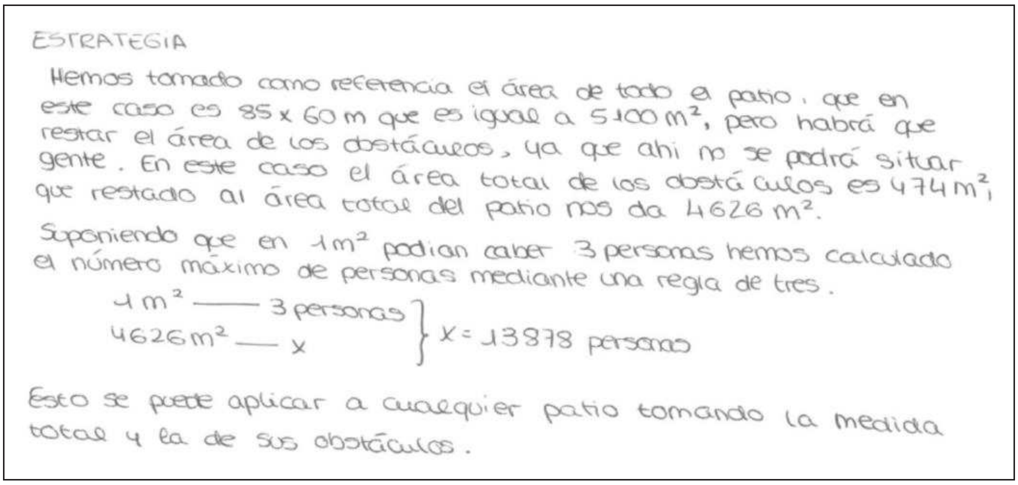
Problema	Densidad		Iteración de la unidad		Cuadrícula	
	E1	E2	E1	E2	E1	E2
A	6	3	1	2	0	1
B	3	3	4	2	0	0

La tabla 3 muestra número de equipos de trabajo que han considerado un tipo de elemento que añade complejidad a los modelos producidos como es la consideración de espacios no hábiles.

Tabla 3. Elementos de complejidad detectados

Problema	Espacio no hábil		No considera espacio no hábil	
	E1	E2	E1	E2
A	7	2	0	5
B	5	1	2	4

Observamos que los alumnos del grupo E1 al enfrentarse al problema A utilizan mayoritariamente la noción de densidad, averiguando el número de personas que caben en un espacio determinado, mientras que esos mismos alumnos no usan el mismo concepto en el problema B al tratar de estimar la cantidad de árboles (véase Figura 1).

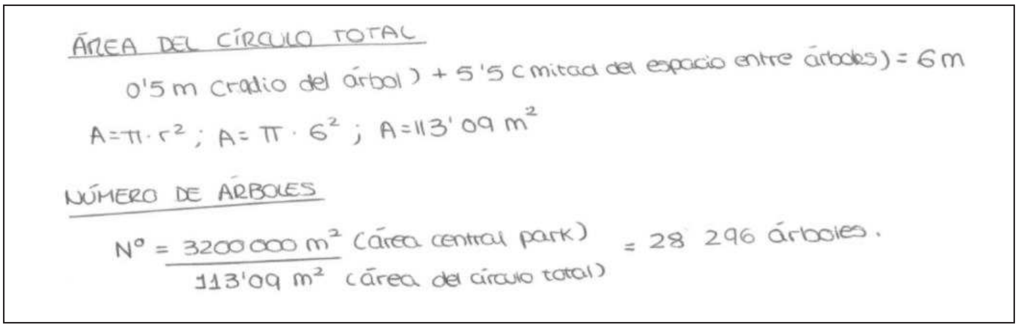

ESTRATEGIA

Hemos tomado como referencia el área de todo el patio, que en este caso es 85 x 60 m que es igual a 5100 m², pero habrá que restar el área de los obstáculos, ya que ahí no se podrá situar gente. En este caso el área total de los obstáculos es 474 m², que restado al área total del patio nos da 4626 m².

Suponiendo que en 1 m² podían caber 3 personas hemos calculado el número máximo de personas mediante una regla de tres.

1 m² —— 3 personas
4626 m² —— x
x = 13878 personas

Esto se puede aplicar a cualquier patio tomando la medida total y la de sus obstáculos.



ÁREA DEL CÍRCULO TOTAL

0'5 m (radio del árbol) + 5'5 (mitad del espacio entre árboles) = 6 m

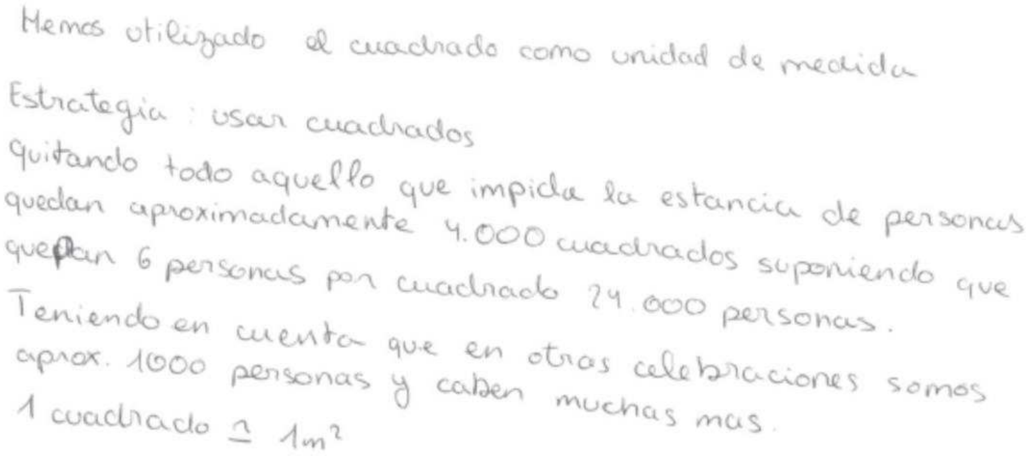
$A = \pi \cdot r^2$; $A = \pi \cdot 6^2$; $A = 113'09\ m^2$

NÚMERO DE ÁRBOLES

$N° = \frac{3200000\ m^2 \text{ (área central park)}}{113'09\ m^2 \text{ (área del círculo total)}} = 28\ 296$ árboles.

Figura 1. Resoluciones a los problemas A y B realizadas por un mismo equipo del grupo E1

Encontramos también un equipo del grupo E1 que utiliza la densidad a través de unidades no estandarizadas: utilizan las baldosas del patio como unidad de área y suponen que en una baldosa caben 6 personas (véase Figura 2).



Hemos utilizado el cuadrado como unidad de medida

Estrategia: usar cuadrados

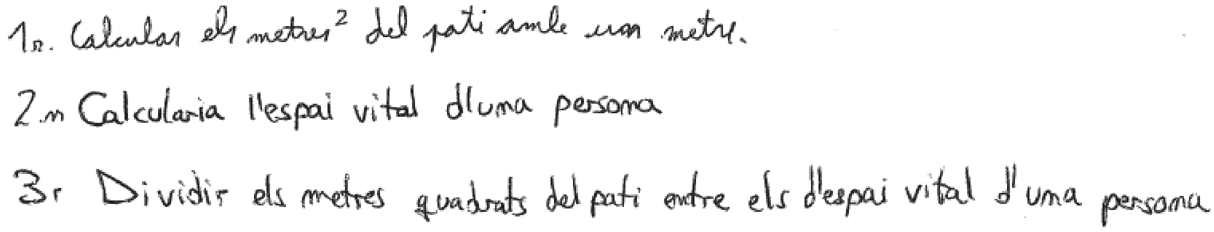
Quitando todo aquello que impida la estancia de personas quedan aproximadamente 4.000 cuadrados suponiendo que quepan 6 personas por cuadrado 24.000 personas.

Teniendo en cuenta que en otras celebraciones somos aprox. 1000 personas y caben muchas mas.

1 cuadrado $\simeq$ 1m²

Figura 2. Resolución del problema A realizada por un equipo del grupo E1

Las resoluciones del grupo E1 al primer problema contrastan significativamente con las del grupo E2 ya que éstos usaron menos la noción de densidad en ambas tareas y solo dos equipos consideraron el espacio hábil (comparar Figura 1 y Figura 3).



1r. Calcular els metres² del pati amb un metre.

2n Calcularia l'espai vital d'una persona

3r Dividir els metres quadrats del pati entre els d'espai vital d'una persona

Figura 3. Resolución del problema A realizada por un equipo del grupo E2

Respecto a los **procedimientos,** los más utilizados son los de cálculo de áreas. Estos pueden realizarse a partir de mediciones (experimentales in situ o mediante herramientas digitales como google maps), a partir de descomposiciones en figuras geométricas simples para usar después fórmulas conocidas, las estimaciones -como estimar el área de una baldosa o la proporción de área inhábil-, y las operaciones aritméticas necesarias para transformar los datos recogidos en resultados. Las mediciones in situ aparecen solo en la resolución del problema A pero es interesante apreciar las diferencias entre las resoluciones de ambos grupos: todos los equipos del grupo E1 realizan sus mediciones con metro salvo uno de ellos que averigua el área a partir del recuento de baldosas (Figura 2). Sin embargo, en el grupo E2 encontramos dos ejemplos de procedimientos alternativos:

uno de los equipos obvia el cálculo del área ya que distribuyen a los asistentes en la vertical y en la horizontal del patio y otro propone aproximar el área del patio usando sus pasos.

En el problema B el cálculo del área se realiza en todos los casos a partir de mediciones realizadas con las herramientas de Google Earth. En la resolución de este problema encontramos procedimientos distintos para hallar el área de la zona arbolada: mientras que algunos equipos calculan el área no ocupada por árboles (Figura 6), otros hacen estimaciones como la que observamos en la Figura 4.

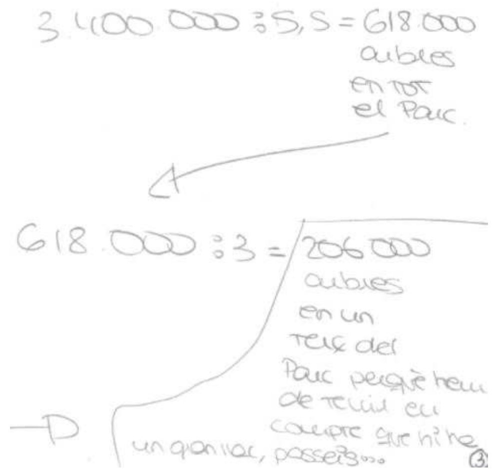


Figura. 4. Resolución del problema B hecha por un equipo del grupo E2

Hemos encontrado diferencias en los procedimientos aritméticos utilizados por equipos con sistemas conceptuales equivalentes. En concreto, algunos de los alumnos que razonan a partir de la densidad hallan el número de personas (problema A) o de árboles (problema B) multiplicando ésta por el área útil (Figura 5).

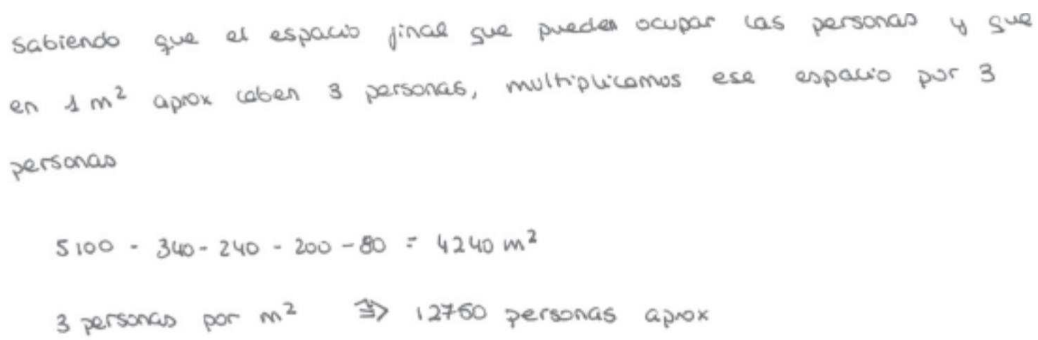


Figura 5. Resolución del problema A realizada por un equipo del grupo E1

Este procedimiento es utilizado por 4 de los 7 equipos del grupo E1 en el problema A pero sólo lo utilizan 2 de los 6 equipos del grupo E2. Otro procedimiento para hallar el número total partir de la densidad es el uso de reglas de tres o el razonamiento a partir de la equivalencia de fracciones, ambos son minoritarios en el problema A (sólo un equipo del grupo E1, Figura 1) y aparecen en 3 resoluciones del problema B (Figura 6).

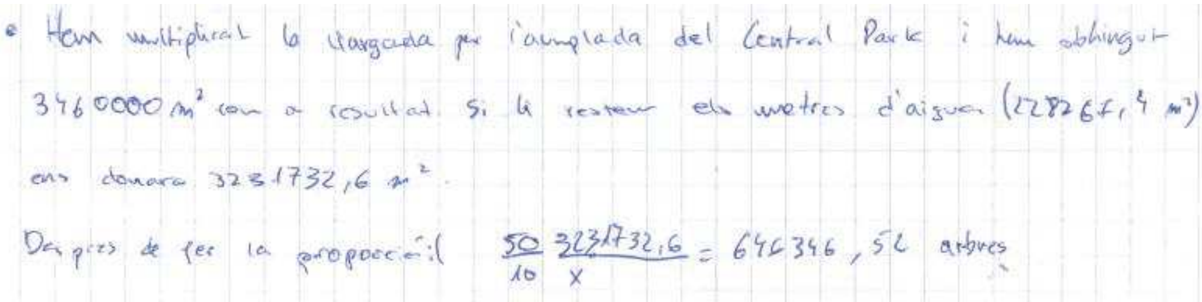


Figura 6. Resolución al problema B realizada por un equipo del grupo E2

Los alumnos que utilizan sistemas conceptuales relativos a iteraciones de la unidad razonan a partir de área ocupada por una persona o por un árbol y obtienen la cantidad total dividiendo el área del recinto por el área de la unidad (Figura 3).

Al fijarnos en los **lenguajes** utilizados por unos y otros en los dos problemas observamos las diferencias más importantes entre ambos grupos: algunos alumnos del grupo E1 (que, recordemos, ya tenían experiencia en la resolución de problemas de modelización) usan notación pre-algebraica que les permite obtener fórmulas que pueden ser generalizables (2 de los 7 equipos del grupo E1 en el problema A, Figura 8). Sin embargo, en el grupo E2 no encontramos lenguaje pre-algebraico de este tipo (aunque sí usan lenguaje algebraico para razonar, por ejemplo, a través de la equivalencia de fracciones, como en la Figura 6).

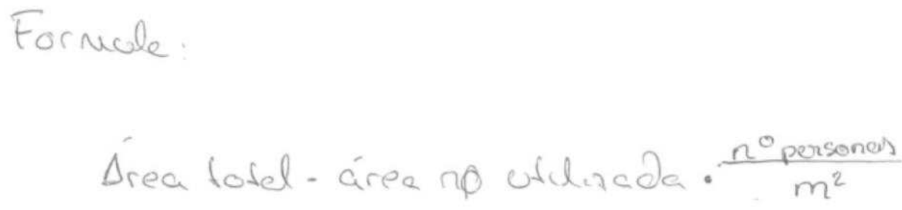


Figura 8. Resolución al problema A realizada por un equipo del grupo E1

El lenguaje literal es utilizado por todos los equipos en las resoluciones de ambos problemas pero se utiliza de forma exclusiva en 5 de las 12 resoluciones del problema B mientras que sólo uno de los equipos del grupo E1 resuelve el problema A usando únicamente lenguaje literal (véase Figura 2). En el resto de resoluciones combinan el lenguaje literal con el aritmético y, en algunos casos, con el gráfico.

La Tabla 4 muestra el tipo de lenguajes detectados para cada problema. Los números indicados con asterisco en esta tabla corresponden a un uso del lenguaje algebraico que no permite generalizaciones.

Tabla 4. Resumen de los lenguajes utilizados en las resoluciones

	Literal (exclusivo)		Uso de gráficos		Lenguaje aritmético		Lenguaje (pre-) algebraico	
	E1	E2	E1	E2	E1	E2	E1	E2
A	1	0	3	2	4	6	2	0
B	4	1	2	0	3	4	2*	2*

Se observan dos tipos de gráficos en las resoluciones: los que sirven solo para recoger los datos de mediciones –con distintos niveles de detalle– (Figura 9a) y los que ayudan a entender cómo se está midiendo (Figura 9b) o calculando.

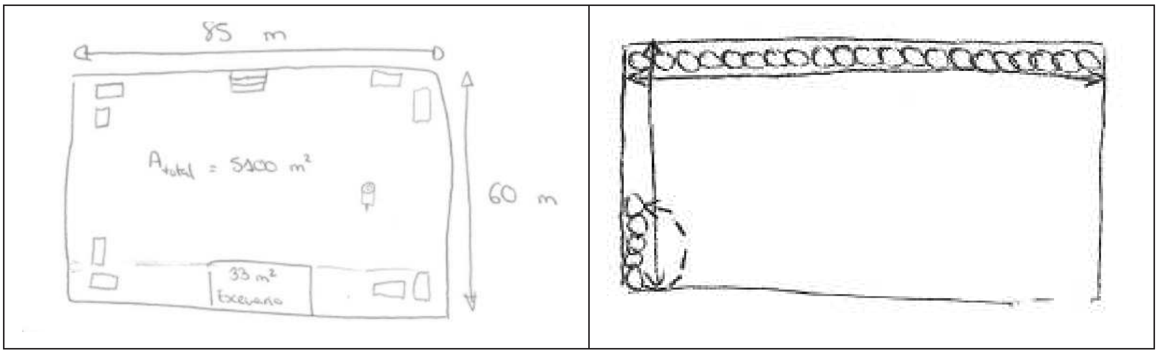


Figura 9. (a) Resolución al problema A realizado por un equipo del grupo E1, (b) Resolución al problema A realizado por un equipo del grupo E2

CONCLUSIONES

Tal y como se estudia en Gallart et al. (2015b) el ciclo de modelización proporciona una herramienta para evaluar la actuación de los estudiantes al enfrentarse a una tarea de modelización identificando las competencias que se activan en cada una de las fases durante el proceso de resolución. La herramienta de caracterización que aportamos en este estudio, elaborada a partir de la definición de modelo matemático de Lesh y Harel (2003) y basada en determinar los sistemas conceptuales, procedimientos y tipos de lenguaje usados por los alumnos, *complementa la anterior ya* que puede permitir al profesor evaluar los conceptos, procedimientos y lenguajes utilizados para resolver los PEGC, como ejemplo de tarea de modelización.

A partir del análisis realizado podemos observar que la resolución de los problemas de Fermi exige a los alumnos la elaboración de modelos que contienen un alto nivel de detalle. Consideramos que la herramienta presentada puede ser útil en otro tipo de actividades de modelización y que puede establecer un punto de partida para elaborar pautas de evaluación de modelos matemáticos producidos por los alumnos o para establecer una pauta para preparar la fase de anticipación de la actividad por parte del profesorado.

Al analizar la caracterización de los modelos matemáticos recogidos en nuestras experiencias de aula observamos diferencias que pueden relacionarse con el aprendizaje de los procesos de modelización. En estudios previos hemos analizado las propuestas de resolución de PEGC (Albarracín y Gorgorió, 2013; 2014). La herramienta propuesta en esta comunicación supone un paso más en la dirección de caracterizar, no solo las estrategias iniciales, sino los productos finales de la resolución. En concreto, el nivel de descripción alcanzado nos permite detectar diferencias que muestran que los alumnos con experiencia en modelización tienden a plantear modelos basados en conceptos más complejos, utilizando procesos de medida más rigurosos y lenguajes matemáticamente más elaborados, como son las representaciones algebraicas que permiten la generalización de los modelos. Observamos también que hay diferencias entre las resoluciones de ambos problemas en lo referente a los sistemas conceptuales utilizados, esto pude deberse a que el concepto de densidad es más natural al trabajar con una masa de personas que se desplazan que no con una masa estática de árboles. Aún así, consideramos que la herramienta propuesta tiene un margen de mejora, especialmente en lo referido a los gráficos y lenguajes utilizados y que las producciones gráficas de los alumnos merecen una visión más concreta de la que hemos desarrollado en este estudio.

Agradecimientos

Este artículo es fruto de una investigación llevada a cabo en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-35638 y EDU2013-4683-R que han recibido soporte económico del Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME), 16*(3), 289–315.

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79–96.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331–364.

Blum, W. (2003). Icme study 14: Applications and modelling in mathematics education—discussion document. *Educational studies in mathematics, 51,* 149–171.

Blum, W. y Borromeo Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(1), 45–58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86–95.

Efthimiou, C. J. y Llewellyn, R. A. (2007). Cinema, Fermi problems and general education. *Physics education, 42*(3), 253–261.

Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

Gallart C., Ferrando I. y García-Raffi, L. M. (2015a). El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria. *SUMA,* en prensa.

Gallart C., Ferrando I. y García-Raffi, L. M. (2015b). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *Números, 88,* 93-103.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2), 157–189.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. E. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–645). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

OECD. (2014). *PISA 2012 results: Creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (Volume V)*. Paris, Francia: OECD Publishing.

Presmeg, N. (1997). Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning. En L. D. English, (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pp. 267–279). Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en Cálculo y Medida.* Madrid, España: Síntesis.

Wessels, H. M. (2014). Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(9), 22–40.