¿CÓMO ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS COMPRENDEN EL APRENDIZAJE DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN?

How do prospective teachers understand students' learning progression related to the limit of a function?

Fernández, C.[a], Sánchez-Matamoros, G.[b], Callejo, M. L.[a] y Moreno, M.[a]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

En este estudio presentamos una investigación que tiene como objetivo generar información sobre cómo estudiantes para profesor de educación secundaria (EPS) comprenden el proceso de aprendizaje de las matemáticas. El contexto que hemos utilizado es la actividad de anticipar respuestas de los estudiantes de Bachillerato que reflejen diferentes niveles de desarrollo conceptual de la comprensión del concepto de límite de una función, como una actividad relevante vinculada a la competencia docente. Los resultados muestran dos formas distintas de considerar la comprensión del concepto de límite por parte de los EPS que tienen implicación sobre cómo anticipan las respuestas de los estudiantes y sobre las características de los problemas que plantean para apoyar el aprendizaje de la concepción dinámica de límite de los estudiantes.

Palabras clave: *Aprendizaje del estudiante para profesor, conocimiento sobre el aprendizaje matemático, competencia docente, mirar profesionalmente, concepto de límite funcional*

Abstract

In this study we present a research focused on generating information about how prospective secondary school teachers understand the process of learning mathematics. The context is a task in which prospective teachers have to anticipate responses of high school students that reflect different levels of conceptual understanding of the concept of limit of a function. This task could be considered a relevant activity related to teaching competence. Results show two different ways of considering students' understanding of the limit concept that have implications on how prospective teachers anticipate the responses of students and on the characteristics of the problems proposed by them to support students' learning of the dynamic conception of the limit.

Keywords: *Prospective secondary school mathematics teachers' learning, knowledge of mathematics learning, teaching skill, professional noticing, functional limit concept*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones centradas en la formación de futuros profesores de matemáticas destacan la importancia de la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls, 2014; Imre y Akkoç, 2012; Magiera, van den Kieboom y Moyer, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014). Ball, Thames y Phelps (2008) cuando caracterizaron el conocimiento de matemáticas para la enseñanza (MKT) expusieron que:

> Los profesores deben anticipar lo que los estudiantes probablemente piensen y aquello en que tengan dificultades. Cuando escojan un ejemplo, los profesores necesitan predecir lo que los estudiantes pueden considerar interesante y motivador. Cuando escojan una tarea, los profesores necesitan anticipar lo que los estudiantes harán y si ellos encontrarán la tarea fácil o difícil. […]. Cada una de

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2015). ¿Cómo estudiantes para profesor comprenden el aprendizaje de límite de una función? En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 249-257). Alicante: SEIEM.

> estas tareas requiere una interacción específica entre el conocimiento de matemáticas y la familiaridad con el estudiante y su pensamiento matemático (p. 401).

Esta caracterización subraya la importancia de que el profesor anticipe e interprete lo que los estudiantes pueden hacer cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos para poder ayudarles a progresar en su aprendizaje (Norton, McCloskey y Hudson, 2011). La habilidad del profesor de anticipar posibles respuestas de los estudiantes a los problemas reflejando diferentes niveles de desarrollo conceptual, es una característica de la competencia docente (Ball et al., 2008; Stein, Engle, Smith y Hughes, 2008). Este reconocimiento ha hecho que se convierta en un objetivo de investigación en la formación de profesores. Desde la perspectiva del aprendizaje de los estudiantes para profesor, esta situación plantea cuestiones relativas a la relación entre su conocimiento de matemáticas y su conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de ESO y Bachillerato.

En este estudio, nos centraremos en caracterizar esta competencia docente en relación al concepto de límite de una función. Luego nuestro estudio se apoya por una parte en las investigaciones sobre el conocimiento necesario para la enseñanza (Ball et al., 2008) y por otra parte en la comprensión del concepto de límite. Nuestra hipótesis de trabajo es que no es suficiente conocer las matemáticas que configuran la idea de límite para ser capaz de reconocer diferentes niveles de desarrollo de la comprensión del límite. En otras palabras, esta investigación intenta aportar evidencias de la necesaria consideración del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes (Knowledge of Content and Students, KCS) como un dominio del conocimiento de matemáticas para enseñar (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) (Ball et al., 2008).

Una síntesis de las características de la comprensión del concepto de límite

La comprensión del límite de una función real de variable real es un aspecto importante para los estudiantes de bachillerato (Tall, 1992). Diferentes investigaciones indican que el concepto de límite es una noción difícil, y que muchas veces la idea de aproximación a un número es el primer contacto que tienen los estudiantes con este concepto a través de la noción dinámica de límite (Cornu, 1991). La concepción dinámica (Blázquez y Ortega, 2002) puede ser definida como: "Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se debiera escribir $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada"

Está manera de dar sentido a la idea de límite influye en la comprensión de la concepción métrica:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 \; tal\,que \, \forall x,\; 0 < |x-a| < \partial \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

Cottrill y sus colegas (1996) indican que la dificultad de los estudiantes para comprender la definición métrica del límite puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de su concepción dinámica. Estos autores indican que relacionar la coordinación de los dos procesos de aproximación con la cuantificación derivada de la concepción métrica hace el concepto de límite difícil para muchos estudiantes. Desde este punto de vista, para que los estudiantes superen esta insuficiencia, deben coordinar un proceso de aproximación en el dominio con un proceso de aproximación en el rango a través de la función considerando diferentes modos de representación.

En este estudio nos centramos en caracterizar cómo los estudiantes para profesor de secundaria anticipan respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre el límite de una función reflejando distintos niveles de desarrollo conceptual de este concepto. La pregunta a investigar es:

> ¿Cómo los estudiantes para profesor de secundaria (EPS) anticipan posibles respuestas de los estudiantes de bachillerato a cuestiones sobre el límite de una función presentados en distintos modos de representación que reflejen diferentes niveles de desarrollo conceptual de este concepto?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes del estudio fueron 25 EPS matriculados en el Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria con una sólida formación matemática (matemáticos, físicos, ingenieros y arquitectos). Los EPS estaban matriculados en una asignatura que tenía como un objetivo: aprender a identificar evidencias de la comprensión de estudiantes de educación secundaria. Uno de los tópicos fue el concepto de límite. Como tarea inicial para centrar la reflexión sobre la relación entre conocimiento de matemáticas y conocimiento de matemáticas de los estudiantes de bachillerato, como componentes del conocimiento de matemáticas para enseñar (MKT), se pidió a los EPS una tarea de anticipación de respuestas de estudiantes a tres problemas sobre el límite de funciones.

La tarea

La tarea constaba de 3 problemas relacionados con el concepto de límite de una función en un punto, tomados de libros de texto de bachillerato, y tres preguntas para reflexionar sobre la comprensión de los estudiantes (Figura 1).

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1
b) x tiende a 2

Problema 2
Sean las tablas

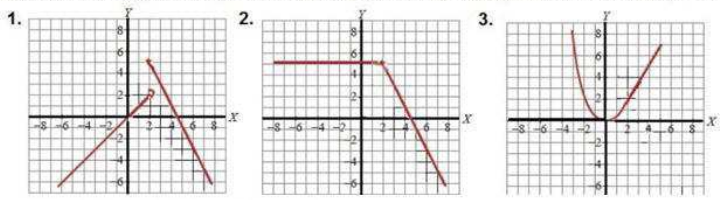
x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

b) ¿a qué valor se acercan
1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Problema 3
Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas



a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

A) Indica que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 1° de Bachillerato, en cada problema, para indicarte que ha comprendido el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

B) Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 1° de Bachillerato, en cada problema, para que muestre que tiene ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

*C) Como profesor de estos alumnos **propón tareas concretas:***
- *para **confirmar** que María **ha alcanzado el objetivo de aprendizaje** pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*
- *para **que** Pedro **alcance el objetivo de aprendizaje** pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*

Figura 1. Tarea propuesta a los EPS

El objetivo de las preguntas A y B era que los EPS generaran respuestas hipotéticas que reflejaran diferentes niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes de primero de Bachillerato. El objetivo de la pregunta C era que los estudiantes para profesor propusieran nuevos problemas que ayudaran a los estudiantes de Bachillerato a avanzar en su comprensión. Para la resolución de la tarea se les proporcionó un documento teórico con la definición de la concepción dinámica de límite y los elementos matemáticos que la conforman (Pons, Valls y Llinares, 2012): (i) Función, (ii) Aproximación lateral por la derecha y por la izquierda (en el dominio, y en el rango, tanto si son coincidentes como si no lo son), y (iii) Coordinación, a través de la función, de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango considerando distintos modos de representación (gráfico, algebraico y numérico). Los datos de esta investigación son las respuestas que los EPS, distribuidos en cinco grupos, dieron a las preguntas A, B y C planteadas en la tarea.

Análisis

Mediante un proceso inductivo, generamos semejanzas y diferencias en la manera en la que los cinco grupos de EPS concebían lo que podían ser evidencias de diferentes niveles de comprensión del concepto del límite en estudiantes de Bachillerato lo que nos permitió inferir información sobre cómo los futuros profesores consideraban que los estudiantes de primero de Bachillerato comprendían el concepto de límite de una función en un punto.

RESULTADOS

La sección de resultados está organizada en dos apartados que muestran dos formas distintas de considerar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto por parte de los EPS: la comprensión como una dicotomía "todo o nada" y la comprensión como progresión.

La comprensión como dicotomía: todo/nada

Algunos EPS consideraban que los estudiantes de bachillerato comprendían el concepto de límite si eran capaces de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango, tanto si eran coincidentes como si no, en los distintos modos de representación. Por otra parte, consideraban que cuando los alumnos de bachillerato no comprendían adecuadamente el concepto de límite de una función en un punto solo eran capaces de considerar aproximaciones laterales si la función estaba definida en el punto, sin utilizar la idea de coordinación. Las respuestas eran resoluciones incorrectas en todos los modos de representación. En esta categoría incluimos a los grupos G2, G3 y G5.

Por ejemplo, los EPS del grupo G2 consideraron como evidencia de la comprensión del límite de una función en un punto que los estudiantes de bachillerato fueran capaces de coordinar los valores de la x en los distintos intervalos de definición y los valores de la $f(x)$. Esta coordinación se manifestaba en el modo algebraico y gráfico a través del reconocimiento de las ramas de la función en los distintos intervalos y el establecimiento del límite de la función por coincidencia o no de los límites laterales (Figura 2). La respuesta que anticipan a los problemas 1 y 3 la justifican con los elementos matemáticos que forman parte de la concepción dinámica de límite diciendo:

> [María] Demuestra tener el concepto de función al utilizarlo correctamente a lo largo del ejercicio. Entenderíamos que no comprende el concepto si en el ejemplo eligiese siempre la misma rama o equivocadas. La idea de aproximación lateral en el dominio se corresponde con el hecho que selecciona adecuadamente la rama de la función. La idea de aproximación en el rango se demuestra cuando sustituye en el límite por la aproximación de la variable independiente. Demuestra coordinar cuando es capaz de establecer según la rama el valor del límite. Finalmente demuestra que entiende el concepto de límite y su existencia si comprueba la coincidencia de las aproximaciones calculadas en el rango.

En esta respuesta los EPS del grupo G2 subrayan el papel de la comprensión de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango en los puntos en los que cambia la definición de la función (algebraico en el P1 y gráfico en el P3).

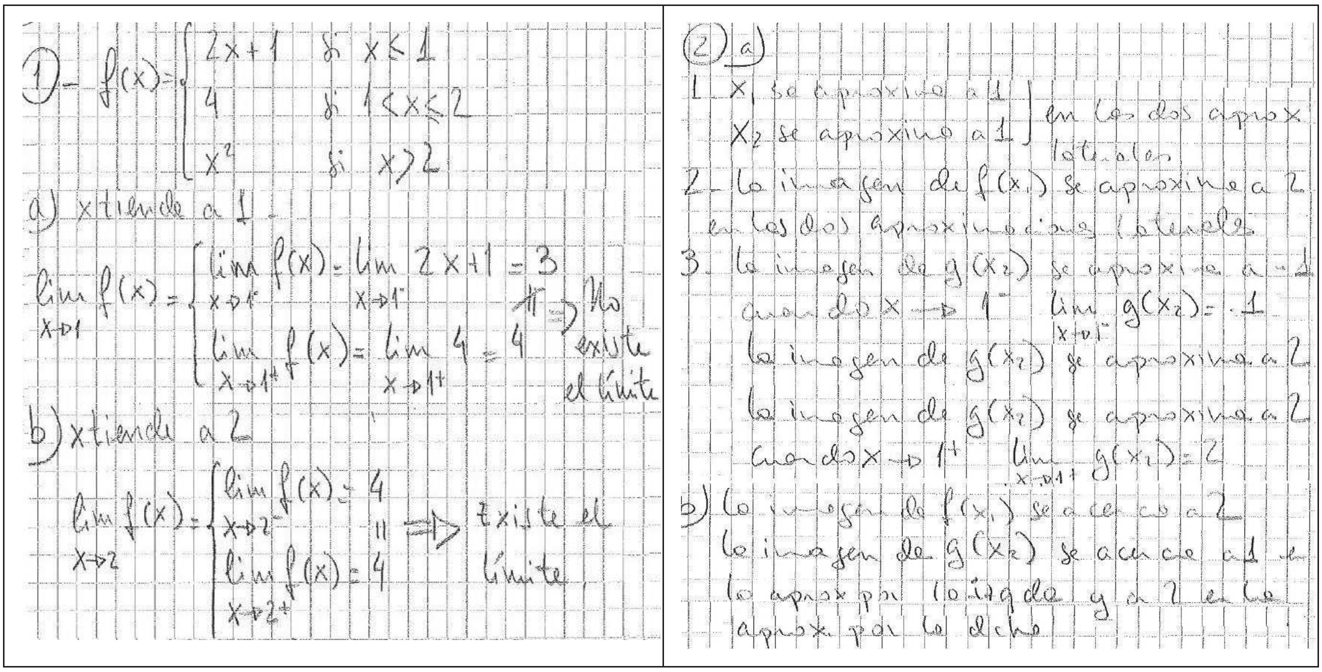


Figura 2. Respuesta anticipada de G2 al problema 1 y 2 para un estudiante que evidencia comprender el concepto de límite de una función

Esta característica de la manera de entender la comprensión del concepto de límite viene apoyada por la forma en la que consideran la idea de aproximación en el modo numérico. La respuesta anticipada en modo numérico (problema 2, Figura 2) la justifican indicando:

> [María] Demuestra que entiende la idea de función si asocia correctamente cada dominio de las dos funciones presentes con su rango y entiende que la función viene representada numéricamente en forma de tabla y sabe superar la dificultad del orden que se utiliza en el enunciado. Entendemos que presenta una idea correcta de aproximación lateral por la derecha y por la izquierda porque resuelve correctamente el apartado 2a1 y en el rango cuando resuelve satisfactoriamente el apartado 2a3.

Para estos EPS la coordinación en los tres modos de representación es esencial para la comprensión del concepto de límite, de ahí que sus decisiones de acción incidan en ello. Así, en sus propuestas de problemas dirigidos a ayudar a los estudiantes a mejorar su comprensión de este concepto, consideran los mismos problemas propuestos (problemas 1 y 3) pero añadiendo un apartado que conlleva un cambio de modo de representación, pasar del algebraico al gráfico (en el problema 1) y pasar del gráfico al algebraico (en el problema 3):

> Como tarea adicional se le pedirá que representen la gráfica como pendiente a la función por partes compuestas por tramos de funciones elementales (afín, parábola) y señale dónde se encuentran los límites pedidos si existen de esta forma. Le proponemos que cambie el método de representación.

De manera coherente, estos EPS del grupo G2 consideraban que los estudiantes de Bachillerato que no comprendían el concepto de límite de una función en un punto, sólo realizaban aproximaciones laterales donde estaba definida la función en el punto, como se pone de manifiesto cuando dicen: “no entiende que la variable independiente se aproxima a un punto pero que nunca se alcanza”, y asociaban el límite al valor de la función en el punto. Y, en modo numérico, que el estudiante de Bachillerato no fuera capaz de establecer las aproximaciones laterales (no las calcula). En consecuencia, las decisiones de acción que proponen están encaminadas a que los estudiantes establezcan aproximaciones para llegar a coordinar y resolver los problemas de forma correcta:

> Que realicen una tabla para que perciban el salto entre las ramas de la función definida por partes y con ello entiendan el concepto de aproximación lateral.

Los grupos de EPS incluidos en esta categoría asociaban la idea de comprender el concepto de límite a realizar correctamente las actividades previstas y la no comprensión a no usar los elementos matemáticos relevantes de aproximaciones laterales y coordinación en los distintos modos de representación.

La comprensión como progresión

Otros grupos de EPS, los grupos G1 y G4, consideraron que la comprensión del concepto del límite de una función en un punto por parte de los estudiantes de bachillerato era progresiva, y que el estudiante que comprendía la concepción dinámica era capaz de usar la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en una situación nueva, distinta de las planteadas en las actividades iniciales. Asimismo, el alumno que no tenía una comprensión adecuada era capaz de coordinar en uno de los modos de representación aunque tenía dificultades en alguno de los otros modos de representación. Por ejemplo, el grupo G1 consideraba que los estudiantes de bachillerato que comprendían el concepto de límite de una función en un punto podían coordinar las aproximaciones a la x en los distintos intervalos con los valores de la función $f(x)$, en el modo algebraico y gráfico, reconociendo las ramas de la función en los distintos intervalos; y en el modo numérico realizando las aproximaciones laterales en el dominio y en el rango (Figura 3). Por ejemplo, lo justifican en el modo gráfico, indicando:

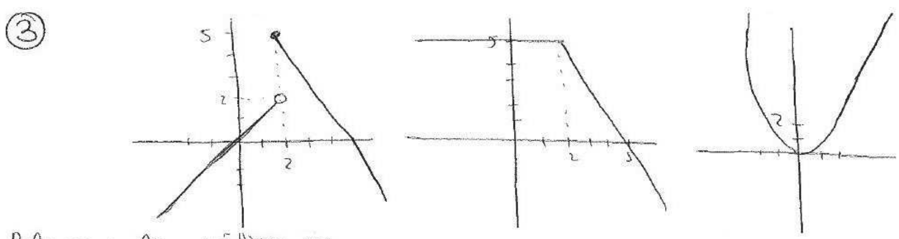
> [María] Comprende la idea de función ya que sabe extraer de la representación gráfica toda la información. Al acercarse a 2 por ambos lados demuestra la idea de aproximación lateral (dominio) y al ver su valor en el rango. Por último, los coordina perfectamente ya que ha explicado correctamente su relación.

Estos EPS consideran que como consecuencia se les deberían proponer tareas que supusieran hacer uso de la coordinación en el dominio y en el rango en situaciones nuevas para ellos. Esta idea se pone de manifiesto en los dos problemas que proponen (Figura 4). En una tarea se les pedía que a partir de ciertas condiciones analíticas vinculadas con la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, encontraran la gráfica de la función (propuesta 2). Para resolver esta tarea el estudiante de bachillerato debe invertir los procesos realizados para construir el significado de límite y atender a todos los datos para hacer la representación gráfica pedida. En el otro problema (propuesta 1) los EPS introducen una función definida a trozos con salto infinito (Figura 4).

Este grupo de EPS vinculan la no comprensión a que los estudiantes de bachillerato coordinen las aproximaciones laterales en el dominio y en el rango en modo numérico, pero no sean capaces de realizarlas en modo algebraico y gráfico. De esta manera, en el problema propuesto para ayudarles a progresar en su comprensión señalan una gradación para determinar el límite de una función en modo gráfico, pidiendo a los estudiantes que hagan en primer lugar una tabla de valores que les permita hacer la gráfica de la función, y a partir de ella determinen a qué valor se acerca $f(x)$ indicando explícitamente cuando x se aproxima por la derecha y por la izquierda (Figura 5).

La manera en la que los EPS anticipan lo que podrían ser evidencias de diferentes niveles de desarrollo conceptual de la idea de limite, y las tareas que sugieren para apoyar este desarrollo, subrayan aspectos que ponen de manifiesto la progresión paulatina en la trayectoria de lo que significa llegar a comprender la concepción dinámica de límite. En particular esta visión se concreta cuando admiten que los estudiantes podrían ser capaces de realizar correctamente algunas actividades aunque no en todos los modos de representación (reflejando la posibilidad de realizar coordinaciones de las aproximaciones en algún modo de representación particular), y cuando sugieren usar actividades que introduzcan los saltos infinitos o actividades en las que los estudiantes deben que inferir información sobre la gráfica de la función a partir de la información del límite dada en forma analítica, lo que desde nuestro punto de vista supone un nuevo paso en la consolidación de la comprensión del límite de una función en un punto.

③



Relaciono las gráficas con

a) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ c) $\nexists \lim_{x \to 2}$

Cada gráfica representa una función distinta, y observamos que en la 1ª gráfica hay un salto cuando nos acercamos a 2 por la derecha o por la izquierda, por lo que concluimos que no existe el límite de la función cuando $x=2$.

Ahora comprobamos qué sucede en las otras dos gráficas cuando nos acercamos a 2 por la derecha o por la izquierda y observamos su valor en cada caso.

La segunda el valor de la función es 5 por ambos lados por lo que el límite es 5.

Por descarte la última su límite es 2 cuando $x=2$ y lo comprobamos.

Figura 3. Respuesta anticipada de G1 al problema 3 para un estudiante que ha alcanzado el objetivo

*Propuesta 1

Dada la siguiente función a trozos,

$$f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < -2 \\ 0, & -2 < x \leq 0 \\ 1/x, & x > 0. \end{cases}$$

Calcula el límite cuando $x=-2$ y $x=0$

*Propuesta 2

Dados los siguientes casos, realiza la gráfica correspondiente a cada uno de ellos.

a) No existe el límite cuando $x=2$

b) Su límite cuando $x=2$ es 14.

Figura 4. Decisión de acción (pregunta C) propuesta por el grupo G1 para el estudiante que ha alcanzado el objetivo de aprendizaje

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Haz una tabla de valores para x y $f(x)$, por ejemplo:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

b) Represéntalo gráficamente.

c) ¿A qué valor se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a 0 por la derecha y por la izquierda?

(Pista: fíjate en la tabla y en la gráfica).

Figura 5. Decisión de acción (pregunta C) propuesta por el grupo G1 para el estudiante que no ha alcanzado el objetivo de aprendizaje

CONCLUSIONES

En este estudio presentamos una investigación que tiene como objetivo generar información sobre cómo estudiantes para profesor de educación secundaria comprenden el proceso de aprendizaje de las matemáticas. El contexto utilizado es el de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, para lo cual hemos propuesto a los EPS una actividad de anticipar respuestas de los estudiantes de bachillerato que reflejen distintos niveles de desarrollo conceptual de la comprensión de dicho concepto, como actividad relevante vinculada a la competencia docente. Los resultados muestran dos formas de considerar la comprensión del concepto de límite por parte de los EPS.

Tres grupos de EPS consideraron que la comprensión del concepto de límite de una función en un punto estaba relacionada con el hecho de ser capaz de realizar aproximaciones en el dominio y en el rango, y coordinaciones en los diferentes modos de representación. Lo que también se puso de manifiesto en las características de los problemas que proponían para consolidar la comprensión del estudiante (Pedro). Además, estos EPS vincularon una comprensión no adecuada de la concepción dinámica de límite con ser capaz de realizar aproximaciones laterales únicamente por la derecha o por la izquierda (en la rama donde estaba definido el valor de la función en el punto). Por lo tanto, esta manera de concebir el aprendizaje del concepto de límite de una función se vincula, por una parte, con la idea de ser capaz de resolver los problemas propuestos de manera adecuada y, consolidar el conocimiento mediante la realización de problemas que inciden en los mismos elementos y relaciones. Mientras que, una comprensión inadecuada del concepto de límite, se vinculaba a no resolver correctamente los problemas planteados en los diferentes modos de representación. Los EPS evidenciaban una manera de comprender el aprendizaje del límite que consideramos dicotómica (“todo o nada") que se refleja en las actividades de anticipar respuestas de los estudiantes de bachillerato y en las actividades planteadas para proponer nuevos problemas que apoyen el aprendizaje de sus alumnos, las cuales evidencian diferente desarrollo conceptual.

Por otra parte, dos grupos de EPS consideraron que la comprensión del concepto de límite de una función en un punto es progresiva. Esta idea se evidencia cuando: (i) consideran que la consolidación de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto está relacionada con ser capaz de usar la idea de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en una situación nueva para el estudiante y (ii) vinculan una comprensión no adecuada de la concepción dinámica de límite con ser capaz de realizar aproximaciones laterales y coordinaciones en algún modo de representación. Esta manera de comprender el aprendizaje de la concepción dinámica del concepto de limite les permitía proponer problemas para apoyar el aprendizaje de los alumnos que reflejaban, en cierta medida, el potencial de considerar la manera en la que los estudiantes podían ir estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos que definen el concepto de manera paulatina, en diferentes modos de representación. Además, se subraya la manera en la que los estudiantes pueden llegar a construir el significado del concepto cuando es usado en nuevos contextos que pueden exigir la reflexión de los estudiantes sobre las acciones de coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango a través de la función.

Estas dos maneras de comprender el aprendizaje ponen de manifiesto las concepciones de los EPS que nos indicarían el valor otorgado al conocimiento sobre el aprendizaje que es el contenido del programa de formación. En este sentido, la manera de comprender el aprendizaje como "todo-o-nada" y "como un proceso progresivo" ponen de manifiesto las referencias a través de las cuales se desarrolla el proceso de aprendizaje de los EPS. Los resultados de esta investigación subrayan el desafío al que nos enfrentamos los formadores de profesores de matemáticas al tener que crear entornos de aprendizaje en los programas de formación que permitan a los EPS superar ciertas concepciones sobre el aprendizaje, por ejemplo, del tipo “todo o nada”, al mismo tiempo que aprenden lo relativo al "conocimiento de matemáticas y los estudiantes".

Reconocimientos

El estudio ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 y EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2015/115 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: Recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 57-79.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* 67–83.

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G. y Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.153-166). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Imre, S. y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 207-226.

Magiera, M., van den Kieboom, L. y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 93-113.

Norton, A., McCloskey, A. y Hudson, R. A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 305-325.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa y otros (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education,* doi: 10.1007/s10763-014-9544-y.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. y Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). Nueva York: Macmillan.