UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA EL CONCEPTO DE RECTA TANGENTE

A genetic decomposition for the concept of tangent line

Orts, A.[a], Llinares, S.[b] y Boigues, F. J.[c]
[a]IES Guadassuar (Valencia), [b]Universidad Alicante, [c]Universidad Politécnica Valencia

Resumen

Presentamos una descomposición genética del concepto de recta tangente vista como una trayectoria hipotética de aprendizaje. Para generar esta descomposición genética se ha realizado un análisis histórico de la génesis del concepto, un análisis de libros de texto de Bachillerato, una síntesis de los resultados de las investigaciones sobre la comprensión de la recta tangente y hemos tenido en cuenta los resultados de un cuestionario respondido por alumnos de Bachillerato. La descomposición genética integra las perspectivas analítica local y geométrica como medio para favorecer la tematización del esquema de recta tangente.

Palabras clave: *compresión matemática, recta tangente, descomposición genética*

Abstract

We present a genetic decomposition of the concept of tangent line view as a hypothetical learning trajectory. To generate this genetic decomposition we performed a historical analysis of the genesis of the concept, analyzed different high school mathematics textbooks, conducted a synthesis of the findings of research on understanding the tangent line, and designed a questionnaire that was completed by high school students in a pilot study. The genetic decomposition generated considers the analytical and geometrical perspectives as a means to promote the thematization of the schema of tangent line.

Keywords: *mathematical understanding, tangent line, genetic decomposition.*

INTRODUCCIÓN

La recta tangente es un concepto que permite interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y ser considerada como la recta que mejor aproxima localmente una función. Desde esta perspectiva, en el desarrollo del concepto de recta tangente interviene el concepto de límite, derivada, monotonía o curvatura de una función y los procesos de aproximación a una curva (Robles, Del Castillo y Font, 2010). El concepto de recta tangente a una gráfica de una función puede ser representado en varios sistemas de representación que en cierta medida favorecen su comprensión compartimentalizada. Artigue (1991) señala que una recta tangente en un punto puede ser concebida como una línea que pasa por el punto pero no corta la curva alrededor de ese punto, como una línea que tiene una doble intersección con la curva en dicho punto, como una línea que pasa por dos puntos infinitamente cercanos al punto de la curva, etc. Estas perspectivas pueden coexistir en la mente de un matemático, pero no resulta igual para un estudiante. Las investigaciones indican la existencia de perfiles de estudiantes que pueden usar significados más próximos a la idea de recta tangente procedente del análisis o desde sus propiedades geométricas (Biza, Zacharides, 2010; Vivier, 2013). En la comprensión del concepto de recta tangente, las investigaciones indican que el conocimiento previo de los estudiantes sobre la tangente a un círculo influye en el desarrollo de una comprensión más general de recta tangente a una curva. Este hecho hace que resulte desafiante para los estudiantes considerar la idea de recta tangente a una curva en un punto de inflexión, la recta tangente que coincide con la gráfica de la función y la recta tangente en un punto cúspide (Biza, Christou, y Zachariades, 2008; Castela, 1995).

Orts, A., Llinares, S. y Boigues, F. J. (2015). Una descomposición genética para el concepto de recta tangente. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 459-467). Alicante: SEIEM.

Esta situación plantea la necesidad de comprender mejor la manera en la que los estudiantes construyen el significado de recta tangente teniendo en cuenta los aspectos que las investigaciones previas han mostrado como desafiantes, así como estudiar cómo determinadas secuencias de actividades pueden ayudarles a complementar los significados desde las perspectivas analíticas y geométricas. Se pretende analizar cómo los estudiantes pueden lograr una compresión que vaya más allá de la mera manipulación algorítmica ya que a veces, los estudiantes son capaces de obtener la ecuación de la recta tangente a una curva pero sin evidencias de estar entendiendo lo que es la recta tangente. La investigación planteada tiene como objetivo describir trayectorias de aprendizaje de la recta tangente a una curva generadas en un experimento de enseñanza diseñado ad hoc. Desde la teoría APOS (Arnon et al., 2014), el diseño de un experimento de enseñanza debe estar articulado alrededor de una hipótesis sobre el proceso de construcción de los significados que adopta la forma de una Descomposición Genética del Concepto (DGC) recta tangente. Se trata del conjunto de construcciones mentales que un estudiante debería desarrollar para alcanzar la comprensión de un concepto matemático. Esta descomposición no tiene porqué ser única sino que es una forma en la que un estudiante puede aprender dicho concepto. Los resultados de la primera fase de la investigación que ha permitido generar una DGC del concepto de recta tangente a una curva son lo que se presentan aquí.

MARCO TEÓRICO

Dubinsky (1991) extiende la abstracción reflexiva de Piaget al pensamiento matemático avanzado. La abstracción reflexiva permite la construcción de objetos cognitivos denominados acciones, procesos, objetos y esquemas. Son considerados formas de conocer junto a mecanismos constructivos (interiorización, encapsulación, tematización) mediante los cuales los estudiantes realizan las construcciones mentales. Así, una acción sería cualquier manipulación física o mental que realiza un individuo sobre elementos matemáticos. En la medida en que una acción se repite y se reflexiona sobre ella se tiende a interiorizar la acción, en un proceso que ya es concebido como algo interno al sujeto en contraposición a la acción que es considerada externa a él. El individuo puede realizar otras acciones con los procesos y actuar con una cierta tendencia a considerarlo globalmente y, por tanto, a ser consciente de esas transformaciones sobre los procesos. En este caso, decimos que el individuo ha encapsulado el proceso en un objeto. Con una concepción a nivel de objeto, el individuo debe ser capaz de volver al proceso que ha originado el objeto (desencapsular) y realizar las transformaciones apropiadas. Por último, los procesos y objetos pueden organizarse de una manera estructurada para formar un esquema. Cuando un estudiante se enfrenta a un problema matemático evoca un esquema o parte de él para resolverlo (Arnon et al, 2014, García, Llinares, y Sánchez-Matamoros, 2011). En este proceso de construcción de los significados, algunas veces es posible identificar obstáculos epistemológicos y cuyo origen lo podemos encontrar en la historia de las ideas matemáticas (Brousseau, 1983). La noción de obstáculo ayuda a identificar las dificultades en el proceso de aprendizaje y permite, por tanto, el diseño de estrategias que mejoren dicho proceso.

MÉTODO

Metodológicamente, para la generación de una descomposición genética de la recta tangente desde la perspectiva APOS (Arnon et al, 2014) debemos considerar:

- los resultados de las investigaciones previas,
- el análisis epistemológico del concepto,
- análisis de los libros de texto, y
- los resultados de un estudio piloto.

Una síntesis de las investigaciones previas

Algunas investigaciones destacan la influencia negativa que ejerce la idea de tangente a una circunferencia. Biza y colaboradores (Biza, Christou y Zachariades, 2008; Biza, Nardi y Zacharides, 2009; Biza y Zacharides, 2010) identifican tres grupos de estudiantes: los que consideran que la recta tangente toca pero no corta (geométrico global); los que aplican propiedades geométricas de forma local (intermedio local), y los que consideran la recta tangente como límite de las rectas secantes (analítico local). Por otra parte, Vivier (2010) señala que los estudiantes inicialmente construyen dos concepciones geométricas: recta que toca en un punto la circunferencia (C1) y recta perpendicular al radio de la circunferencia (C2). Posteriormente construyen los significados analíticos: límite de rectas secantes en un punto de la curva (C3) y recta que pasa por el punto de tangencia con pendiente la derivada (C4). Este autor indica que parece existir una desconexión entre las concepciones geométricas y analíticas. Además, el uso del término secante parece que genera problemas en los estudiantes. Finalmente, se ha subrayado que el tránsito entre la concepción global (euclídea) a la concepción local (leibniziana) se realiza a través de la convención matemática (Canul, Dolores y Martinez-Sierra, 2011). En este sentido, los resultados de estas investigaciones aportan características de la manera en la que los estudiantes llegan a comprender el concepto de recta tangente, las transiciones necesarias y los obstáculos que deben superar.

Análisis epistemológico del concepto

La Historia de las Matemáticas (Ausejo, 1992; Collette, 1991; Rey Pastor y Babini, 1997) señala dos grandes corrientes en la forma de tratar la recta tangente. Una que arranca en Arquímedes y a través de Roberval o Torricelli llega a Newton, en la que Arquímedes utiliza la dirección instantánea del movimiento para definir la recta tangente. La segunda, que partiendo de Euclides y Apolonio, llega a Descartes y Fermat y desemboca en Leibniz, en la que Descartes presenta la recta tangente como límite de las rectas secantes. En la primera etapa hacen sus aportaciones Euclides, Arquímedes y Apolonio siendo sus concepciones radicalmente diferentes marcando las dos tendencias que se van a seguir posteriormente. Arquímedes piensa en la recta tangente como la dirección instantánea del movimiento. En cambio, Euclides y Apolonio tienen una concepción más estática, como recta de mínimo contacto con una cónica (toca pero no corta). Esta vertiente desembocaría en la concepción geométrica de autores como Descartes, Fermat, Barrow y Leibniz, como límite de rectas secantes, mientras que la caracterización iniciada por Arquímedes podemos reconocerla también en los trabajos de Torricelli, Roberval y Newton. Por otra parte, identificamos una tercera concepción vinculada a la manera que tiene Leibniz de concebir una curva como formada por infinitos segmentos. Al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente.

Análisis de libros de texto

Se ha llevado a cabo un análisis de libros de texto de Bachillerato usados en la actualidad en las asignaturas de Matemáticas I y II y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II de cuatro editoriales españolas: Anaya, SM, Santillana y Bruño. El análisis se ha centrado en cuatro dimensiones:

1) el contexto general o descripción de los libros;

2) un análisis de contenido, entendido como el modo de organizar el concepto a lo largo del texto. Además de la estructura en que se presentan las ideas, se consideran los siguientes aspectos relativos al análisis conceptual: el tipo de definición que se utiliza (formal o intuitiva), el tipo de registro semiótico usado y el tipo de ejercicios y problemas resueltos y propuestos. Junto a este análisis conceptual se incluye también un análisis fenomenológico (referido a los fenómenos que dan origen a la introducción del concepto, en concreto, si se mueven en un campo específico de las matemáticas o tienen que ver con otras ciencias) y un análisis estructural (relación con otros contenidos);

3) un análisis didáctico, en el que nos preguntamos si se busca crear un objeto de conocimiento o solo dotar al alumno de una herramienta de cálculo y

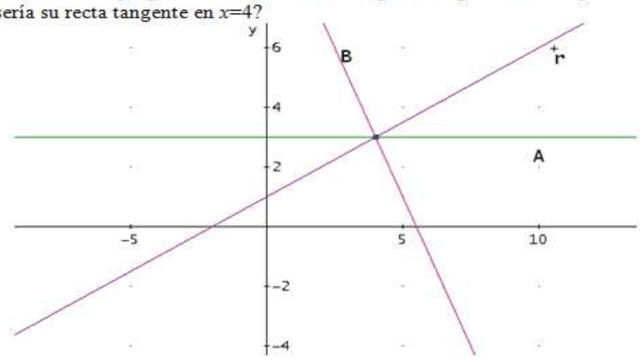
4) el significado institucional histórico, que se refiere a la concepción dominante a la que hace referencia.

Análisis de las respuestas a un cuestionario

Para identificar los elementos cognitivos que los estudiantes movilizaban en la resolución de problemas relacionados con la recta tangente, se diseñó un cuestionario formado por 8 ítems. Los ítems (Figura 1) incidían en

- aspectos gráficos: identificar la recta tangente a una curva en un punto extremo o en un punto de inflexión o en un punto anguloso o identificar la recta tangente a otra recta,
- aspectos analítico-algebraicos: hallar la recta tangente de funciones concretas en puntos determinados, y
- aspectos analítico-numéricos: obtener una aproximación del valor de una función en un punto a partir de la recta tangente a dicha función en un punto cercano

Q.5 La función r que presentamos es una recta que tiene por ecuación $y = x/2+1$, ¿Cuál sería su recta tangente en $x=4$?



Solución:	i) A	ii) B	iii) r	iv) Ninguna de las anteriores
Grado de Seguridad en la respuesta:	0	1	2	
Justificación:				

Q.7 Una determinada función $f(x)$ pasa por el punto (1,2). Además se sabe que su derivada en x=1 vale 3, es decir, $f'(1)=3$, obtén de manera aproximada el valor de $f(1'027)$. Esboza un gráfico que explique tu respuesta.

Solución justificada:				
Grado de Seguridad en la respuesta:	0	1	2	

Figura 1. Ejemplos de ítems usados en el cuestionario

Para su diseño se revisaron diferentes cuestionarios de estudios previos (Tall, 1987; Tall y Vinner, 1981). Además, tuvimos en cuenta la dificultad de los estudiantes en proporcionar una definición de recta tangente al recurrir a descripciones basadas en la tangente a un círculo, en generar rectas tangentes en puntos angulosos, y en puntos de inflexión o en curvas que se confunden localmente con su tangente (Castela, 1995). Consideramos las tres concepciones identificadas en el análisis epistemológico: (i) Concepción euclídea (válida solo para las cónicas): la recta tangente toca la curva sin cortarla, la roza sin atravesarla; (ii) la Concepción cartesiana: la recta tangente como límite de las rectas secantes; y (iii) la Concepción leibniziana: la curva está formada por infinitos segmentos. Prolongando el segmento en el que se encuentra el punto considerado obtenemos la recta tangente.

El cuestionario fue contestado por 24 alumnos de Bachillerato de 1º y 2º después de la introducción del concepto. Los estudiantes de 1º habían recibido instrucción previa si bien era la primera vez que estudiaban la recta tangente. En cambio, los estudiantes de 2º ya habían estudiado este concepto en los dos cursos.

El currículo introduce el concepto de recta tangente como la recta que toca a la circunferencia en un punto desde una perspectiva geométrica en 1º de ESO, en contraposición a la cuerda que une dos puntos de ella o a la recta exterior a la circunferencia, es decir, la concepción euclídea. En Bachillerato y tras introducir el concepto de derivada se estudia la recta tangente a una función desde el punto de vista del Análisis Matemático (aquí es donde aparecen los problemas al querer extender el concepto de recta tangente a una circunferencia a cualquier curva).

RESULTADOS

Sobre el análisis de los libros de texto

El tratamiento de la noción de recta tangente realizado en los diferentes textos actuales es similar. Los textos usan la concepción cartesiana para introducir el concepto de recta tangente a un arco de cónica (Figura 2). Siguen de manera especial el texto del grupo Cero de 1982 donde se introducía el concepto de recta tangente a una curva, tanto numéricamente como gráficamente, a partir de la tasa de variación media y de las pendientes de las rectas secantes. Solo en los textos de segundo curso de la editorial SM aparece una aplicación de la recta tangente como mejor aproximación lineal a una función en un punto.

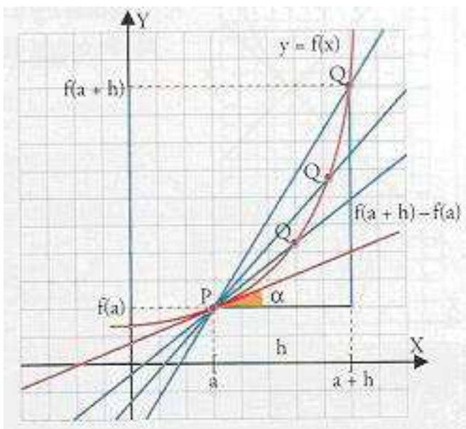


Figura 2. Modelo canónico (Ed. Bruño: Matemáticas I, pág. 51)

Globalmente los textos no proporcionan una definición clara de recta tangente a una función en un punto considerándola como límite de las secantes y no plantean la extensión a recta tangente a cualquier curva. La introducción utilizada en estos textos no permite superar esta dificultad pues plantean un modelo canónico en el que la función empleada es muy similar a un arco de cónica. Esta situación tiene raíces históricas. Esto es, se reproduce el problema al que tuvieron que enfrentarse Descartes y Fermat: la concepción euclídea únicamente es válida para las cónicas pero no para el creciente número de curvas que se iban conociendo en el siglo XVII. En este sentido, solamente la editorial SM propone funciones como $f(x)= x^3$ en la que se remarca explícitamente que la recta tangente en el punto $x=0$ puede cortar a la gráfica de la función, e incluyendo funciones como f(x)= |x| en la que no existe recta tangente en el punto de abscisa $x=0$.

Además, como señalan Ortega y Sierra (1998, p. 98), en el proceso de aproximación de la recta tangente por las rectas secantes, "parece que [...] la Comunidad Matemática sabe hallar la tangente a cualquier curva y distingue tangente de secante. Esto no es así, ya que salvo en las cónicas, no se dispone de ningún criterio para decidir si una recta es tangente a la curva o no. Entonces, ¿cómo interpretar que la derivada en el punto x=p es la pendiente de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto (p, f(p))? ¿no debiéramos definir, previamente, el concepto de recta tangente a la curva en dicho punto?". Sierpinska (1985) señala también las dificultades respecto a la aproximación de las rectas secantes a la tangente, pues cuando los estudiantes llegan al punto de tangencia, encuentran que no hay más que un solo punto, pero por un punto pueden pasar muchas rectas. Siguiendo a Vivier (2010), no se puede usar un concepto, como el de recta tangente, que no ha sido previamente construido; se trabaja con la noción de tangente pero dicha noción aún no tiene su definición matemática.

Es por ello, que en nuestra propuesta de descomposición genética introducimos la recta tangente a partir de la concepción leibniziana (Elemento E1, tabla 1), definición, por otro lado, utilizada ya por el marqués de l'Hôpital, para posteriormente relacionar dicha concepción con la cartesiana, pues parece obvio que los estudiantes tienen muchas dificultades para entender el concepto de recta tangente a partir de la concepción cartesiana. Cuando se caracteriza la recta tangente como aquella recta hacia la que tienden las rectas secantes (Elemento E2, tabla 1), la recta límite es ya un objeto conocido. Ahora es posible interpretar geométricamente la derivada como la pendiente de la recta tangente pues esta ya ha sido definida y estudiada con anterioridad (Elemento E1RE2, E03R04, tabla 1). Llegados a este punto, introducimos la ecuación de la recta tangente a una función en un punto (Elemento E3, tabla 1).

Sobre el cuestionario

Una mayoría de estudiantes reflejan una concepción euclídea de la recta tangente que supuso un obstáculo para construir la concepción cartesiana. En este sentido, si bien son capaces de calcular la recta tangente a una curva en un punto de forma algorítmica, tienen dificultades para identificar la recta tangente a una curva en un punto de inflexión, en un punto anguloso o la recta tangente a una recta, además de las dificultades en usar la idea de recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función en un punto en un contexto de resolución de problemas.

Generación de una DGC Recta Tangente

Como consecuencia del análisis epistemológico, el análisis de los libros de texto y los resultados del cuestionario piloto, generamos una descomposición genética (Tabla 1) entendida como una trayectoria hipotética de aprendizaje como hipótesis previa para el diseño de un experimento de enseñanza. La propuesta de descomposición genética se inicia con el concepto de recta tangente a partir de la concepción leibniziana (recta tangente como mejor aproximación lineal a la curva) para posteriormente estudiar la concepción cartesiana (recta tangente como límite de recta secantes) estableciendo la relación entre ambas como un medio para introducir la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, en vez de introducir directamente la recta tangente a partir de la concepción cartesiana que es la aproximación habitual en los libros de texto.

Tabla 1. Descomposición genética de recta tangente

Elementos matemáticos y relaciones		Pre-requisitos
E0		
	E01	Reconocimiento como acción de puntos de una recta y de una función a partir de su abscisa a nivel gráfico y analítico
	E02	Conocer como acción el concepto de pendiente de una recta a partir de dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) (Cálculo): $$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
	E03	Conocer como proceso el concepto de pendiente de una recta como medida de la razón de crecimiento de dicha recta
	E04	Conocer como proceso la idea de recta (forma analítica): Identificar y hallar puntos de una recta
	E05	Conocer como objeto la idea de recta: Ecuación punto-pendiente de una recta: $$y-y_0= m(x-x_0)$$
	E06	Conocer como proceso el límite como tendencia
	E07	Conocer como proceso el concepto de derivada de una función en un punto: $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
	E08	Conocer como objeto el concepto función derivada
E1		Linealidad local de una función en un punto
	E11	Acción de aplicar varios zoom sobre una función en un determinado punto
	E12	Interiorización de la acción E11 en un proceso
	E13	El objeto de concebir, localmente, la función como un segmento cuya prolongación se definiría como recta tangente (mejor aproximación lineal)
E2		Sucesión de rectas secantes
	E21	Acción de crear rectas secantes manteniendo un punto fijo y acercando otro punto al fijo
	E22	Interiorización de la acción de crear rectas secantes (E21) en un proceso
	E23	Encapsulación como objeto de la idea de recta secante
E1RE2		Conocer como proceso la identificación de la recta tangente (E1) con la tendencia limite de E2
	E03RE04	Conocer como proceso la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto tangencia (pendiente de la recta tangente): $$\lim_{x_1\to x_0}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$
E3		Recta tangente como objeto: $y-y_0= f'(x_0)(x-x_0)$
	E31	Acción de hallar la ecuación de la recta tangente
	E32	Interiorizar la acción de determinar la ecuación de la recta tangente
	E33	Encapsular como objeto la idea de recta tangente, relación modo gráfico y analítico (ecuación)
E4		Tematización del esquema de Recta tangente

E_i = Elementos matemáticos; E_i R E_j = Relaciones entre elementos

CONCLUSIONES

La descomposición genética de la recta tangente se apoya en unos pre-requisitos y considera tres componentes y su relación como medio para construir la tematización del concepto: la linealidad local de una función, sucesión de rectas tangentes, y recta tangente. Las relaciones entre los modos de representación analítica y gráfica son los medios conjeturados para que los estudiantes interioricen los procesos para generar formas de conocer la recta tangente como objeto. El uso de la recta tangente (reconocimiento gráfico y cálculo de la ecuación) en condiciones especiales como puntos angulosos y en curvas en las que se confundan parcialmente con la gráfica de la función, permite estar en condiciones de favorecer la tematización del esquema de recta tangente. Esta descomposición genética permite fundamentar la toma de decisiones en el diseño de experimentos de enseñanza que nos permitan describir diferentes trayectorias de aprendizaje. Además la descomposición genética que hemos detallado puede ser de utilidad para diseñar laboratorios virtuales que permitan la experimentación. En este contexto, programas como Geogebra pueden implementar herramientas tales como el zoom o crear una sucesión de rectas tangentes que ayudarían a realizar acciones y facilitar que los alumnos construyan los elementos cognitivos del esquema de recta tangente.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in Mathematics Education.* New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer.

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

Ausejo, E. (1992). Las *matemáticas en el siglo XVII* (revista nº 17 en Historia de la Ciencia y de la Técnica). Akal. Torrejón de Ardoz.

Biza, I., Christou, C. y Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10(1), 53-70.*

Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the learning of Mathematics, 29(3),* 31-36.

Biza, I y Zacharides, T. (2010). First year Mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior 29,* 218-229.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2)*, 165-198.

Canul, E., Dolores. C. y Martínez-Sierra (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 14(2)*, 173-202.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 7-47.

Collette, J. (1991). *Historia de las matemáticas* (2 vol.). Madrid: Siglo XXI.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathemathical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterized thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1023-1045.

Ortega, T. y Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *32*, 87-115.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1997). *Historia de la Matemática* (2 vol.). Barcelona: Gedisa.

Robles, M. G., Del Castillo, A. G. y Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida: SEIEM.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 6(1).

Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. En J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME international conference* (Vol. 3, pp. 69-75). Montreal, Canada: PME.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics. 12, 151-169.*

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 15, 173-199.