LA DIVISIBILIDAD EN MANUALES PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Divisibility in textbooks for Computer Engineering students

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, Á.

Universidad de Jaén

Resumen

Las aplicaciones de la Teoría de Números a la Informática son relevantes. Para los estudios de Ingeniería Informática, hemos escogido tres universidades españolas y seleccionado siete manuales recomendados en las bibliografías del curso 2014-15, con contenidos de divisibilidad. Hemos realizado un análisis didáctico, mediante el marco del enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática, acerca del concepto de máximo común divisor, algoritmos de cálculo y sus aplicaciones a la Informática. Concluimos que existe una evolución en el tratamiento de los textos hacia una menor abstracción, más aplicaciones y más presencia del lenguaje de programación.

Palabras clave: *Teoría de Números, manuales universitarios, análisis didáctico, situaciones-problemas, lenguajes*

Abstract

Numbers Theory has many applications for the Computation Sciences. We have chosen, for the Computer Engineering Degree, three Spanish universities and seven textbooks recommended in their 2014-2015 year bibliography, with divisibility contents. We carry out Didactic Analysis, using the theoretical framework of the onto-semiotic approach to Mathematical Education, about the greatest common divisor concept and Euclidean Algorithms, and its applications. We conclude that there is a change in textbooks, referred to less abstraction, more applies and programming language used.

Keywords: *Numbers Theory, university textbooks, didactic analysis, problem-situations, languages*

INTRODUCCIÓN

La divisibilidad en los números enteros es un tema fundamental dentro de la Teoría de Números para un estudiante de Ingeniería Informática por sus múltiples aplicaciones en este campo. Entre estas podemos subrayar la representación de un número en los distintos sistemas de numeración y sus operaciones (el sistema binario es la base de la aritmética computacional y son también muy utilizados el octal y el hexadecimal). Asimismo, son muy importantes las aplicaciones de las congruencias para: asignar posiciones de memoria a ficheros de un ordenador a través de las funciones de dispersión, la generación de números pseudoaleatorios y los sistemas de cifrado basados en la Aritmética Modular, de entre los que cabe destacar la criptografía de clave pública.

Hay muchos algoritmos que usan números enteros y uno de los más utilizados es el Algoritmo de Euclides, que permite calcular el máximo común divisor de dos números enteros no nulos, de una forma más eficiente que a partir de la factorización en números primos. Sus aplicaciones son numerosas y facilitan el cálculo del inverso modulo n, la resolución de sistemas de congruencias a través del algoritmo chino del resto, o el estudio de las soluciones de ecuaciones diofánticas.

La relevancia de este tema se pone de manifiesto en el hecho de aparecer en los currículos de los Grados en Ingeniería Informática bajo descriptores como Matemática Discreta, Algorítmica Numérica o Aritmética entera y modular y sus aplicaciones a la Informática. Estos responden a las competencias descritas en el Anexo I de la resolución de 8 de junio de 2009, en la que se publica el

Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes de Ingeniería Informática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 431-440). Alicante: SEIEM.

Acuerdo del Consejo de Universidades por el que se establecieron las recomendaciones para la solicitud de títulos oficiales en el ámbito de la Ingeniería Informática y que fue publicada en el BOE número 187 de 4 de agosto de 2009.

El objetivo del trabajo es analizar el concepto de máximo común divisor y su cálculo, a través del Algoritmo de Euclides, junto con sus aplicaciones, en textos de Matemática Discreta o Álgebra, recomendados para los estudios de Ingeniería Informática, por tres universidades españolas, seleccionadas por ocupar los mejores puestos en el *Ranking Académico (de Shanghai) de las Universidades del Mundo de Ciencias de la Computación, 2014*, utilizando como herramientas las situaciones-problemas y lenguajes del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES

En este trabajo analizamos cómo abordan siete libros de texto universitarios recomendados para estudiantes del Grado de Informática, el concepto de máximo común divisor y dos algoritmos numéricos relacionados: el Algoritmo de Euclides y el extendido o Identidad de Bézout.

De la comparación entre los distintos manuales pretendemos obtener una amplia visión de las diferentes formas de abordar la temática estudiada y la adaptación que sufren estos contenidos por estar dirigidos a estudiantes del Grado de Informática, motivo por el cual las aplicaciones a la Informática tienen una especial relevancia. Estas son explicitadas en el estudio de las situaciones-problemas y los lenguajes, motivo por el que se han elegido estas dos entidades en este trabajo.

Corresponde, por último, a nuestro presente problema de investigación observar si existe una evolución en el tratamiento que realizan los manuales y determinar posibles tendencias.

Todas estas cuestiones nos han llevado a formular las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué elementos de las situaciones-problemas: situaciones de introducción y motivación, ejemplos, ejercicios…aparecen en los diferentes libros de texto?, ¿qué tipos de lenguaje aparecen en los libros de texto? Y, por último, ¿qué consecuencias didácticas se pueden extraer?

En lo que respecta a los antecedentes hemos tenido en cuenta, por una parte, trabajos de análisis de manuales como Ordóñez (2011), Gea (2012), Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) que utilizan también el EOS, en cuanto al desarrollo de las entidades primarias para hacerlas operativas en el estudio de manuales. También se ha tenido en cuenta la investigación de González-Ruiz, Ruiz-Hidalgo y Molina (2014), que analizan, desde otras perspectivas, manuales universitarios.

El análisis de manuales es un tema de gran interés en Didáctica de las Matemática como muestran los trabajos presentados en el XVIII Simposio de la SEIEM de 2014 y la inquietud mostrada al respecto por algunos miembros.

Los trabajos Ordóñez, Ordóñez y Contreras (2013 y 2014) muestran algunos resultados de dicho proyecto respecto del estudio de la Teoría de Números para informáticos

Por otra parte, Harel y Sowder (2007) se preguntan, "en vista del auge de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente en sistemas informáticos de álgebra…", sobre "el papel del álgebra simbólica en la reconceptualización de las matemáticas en general…." (p.20). Nuestro estudio, dado que analiza manuales para el Grado de Ingeniería Informática, está estrechamente relacionado con la influencia que tienen estas herramientas en el desarrollo de habilidades de los estudiantes, en la línea de lo que proponen estos autores.

MARCO TEÓRICO

Utilizamos como marco de referencia el EOS. En él "se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas. En concreto se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas" (Godino, Batanero y Font, 2009, p.) Con la intención de progresar en una ontología y semiótica de dichos objetos, a la vez que hacerlos operativos el EOS propone seis tipos de entidades primarias a tendiendo a la función que desempeñan en la actividad matemática: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones (Godino, 2002).

"Los seis tipos de entidades primarias postuladas amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerar las insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática. Las situaciones-problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción" (Godino, Batanero y Font, 2009, p. 7)

SELECCIÓN DE MANUALES

La muestra consta de siete textos recomendados en la bibliografía de asignaturas que contienen temas relacionados con el cálculo del máximo común divisor y sus aplicaciones a la Informática.

La selección de los textos ha sido muy cuidada y se ha estructurado en distintos niveles:

En primer lugar, buscamos criterios para la selección de las universidades en las que hicimos la búsqueda de contenidos y bibliografía. Optamos por el *Ranking Académico (de Shanghai) de las Universidades del Mundo de Ciencias de la Computación, 2014,* por su prestigio y porque en este año se comenzó nuestra investigación. En él, buscamos las universidades españolas que estaban mejor situadas en esta disciplina. La primera es la Universidad de Granada, en el puesto 43, y posteriormente la Universidad de Jaén (en el puesto 76-100) y la Universidad Politécnica de Madrid (en el puesto 101-150).

En segundo lugar, buscamos a través de sus páginas web, las guías académicas de los grados de Ingeniería Informática, publicadas en el curso 2014-15, para localizar las asignaturas que pudieran contener los temas de divisibilidad. Resumimos en la Tabla 1 los resultados de la exploración realizada y hemos marcado con (*) las asignaturas donde se localizaron los contenidos de Teoría de Números que son objeto de nuestro estudio.

Por último, consultamos y comparamos las bibliografías de cada materia e hicimos una selección de manuales, que hemos denominado [M1] hasta [M7] (referenciados en el Anexo I), de acuerdo a los siguientes criterios:

[M1] Es un texto común en las tres universidades. Escrito originalmente en inglés y traducido al castellano. Actualmente está en su quinta edición.

[M2] Se eligió por ser un libro recomendado por las universidades de Granada y la Politécnica de Madrid. La Universidad Politécnica de Madrid propone también una versión actualizada en inglés, de 2002, sin embargo, hemos optado por la que aparece en castellano pues es la recomendada en las dos bibliografías.

[M3] Es un manual clásico de Álgebra, en inglés, común en las universidades de Granada y Jaén.

[M4] Es un texto en español que aparece en la bibliografía de las universidades de Jaén y la Politécnica de Madrid. Hemos preferido analizar una versión más actual, que ha salido en 2015, y que corresponde a la tercera edición.

[M5] Es una copublicación de Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid y aparece recomendado por la Universidad de Jaén.

[M6] Aunque sólo aparece en la bibliografía de la Universidad de Jaén, dos de sus autores pertenecen a la Universidad del País Vasco y el tercero a la Escuela de Informática de Murcia.

[M7] Es un manual orientado a las prácticas con ordenador para Mathematica. Editado por el servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

La extensión de las bibliografías de cada guía docente es variable. La Universidad Politécnica de Madrid sólo recomienda en la guía de aprendizaje para el doble Grado [M1] y [M2] como bibliografía básica, y estos textos se incluyen también en una lista más extensa para el Grado de Ingeniería Informática. Sin embargo, la bibliografía que aparece en la Universidad de Granada para la doble titulación es muy diferente a la seleccionada para Informática. La Universidad de Jaén propone una bibliografía complementaria más extensa que nos ha permitido elegir los manuales [M5] y [M6], publicados por otras universidades españolas que, aunque no han sido sometidas a nuestra exploración, se hacen aquí presentes. La última columna de la Tabla 1 muestra la distribución, por universidades, de los textos seleccionados. Es importante señalar que esta bibliografía es la vigente durante este curso 2014-15.

Tabla 1. Contenidos y bibliografía

Universidades	Titulaciones	Asignaturas exploradas	Curso/ Semestre	Textos
Universidad de Granada	Grado de Ingeniería Informática	Algebra Lineal y Estructuras Matemáticas (*) Lógica y Métodos Discretos	1º/1º 1º/2º	M1, M2
	Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas	Lógica y Métodos Discretos Álgebra I (*) Álgebra II Álgebra III	1º/1º 2º/1º 3º/1º 4º/1º	M3
Universidad de Jaén	Grado de Ingeniería Informática	Matemática Discreta (*) Álgebra (*)	1º/1º 1º/2º	M1, M3, M4, M5, M6, M7
Universidad Politécnica de Madrid	Grado de Ingeniería Informática	Matemática Discreta I (*) Matemática Discreta II	1º/1º 2º/1º	M1, M2 y M4
	Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas	Matemática Discreta I (*) Matemática Discreta II	1º/1º 1º/2º	M1, M2

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

El análisis didáctico se ha realizado siguiendo las características metodológicas propias del marco teórico que marca nuestra investigación, el EOS, y según otras investigaciones como las tesis de Ordóñez (2011) y Gea (2012) o los trabajos de Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010). Por motivos de espacio, en esta comunicación presentamos una parte del estudio realizado que se corresponde con dos de las anteriores entidades y que son: situaciones y lenguaje dado que, además, se analizan en profundidad.

Dentro de la primera, nos fijamos en qué dominios se introducen el concepto de máximo común divisor y los Algoritmos de Euclides. Hemos reparado en los contenidos de cada libro pues, en ocasiones, era imprescindible conocer los temas previos para entender el tipo de definición o demostración elegida por el autor. Se han tenido aquí en cuenta: si se proporciona o no justificación de los conceptos o algoritmos, la forma de introducir las definiciones, se han analizado los ejemplos y el lugar que ocupan, y se han observado si contienen ejercicios o aplicaciones a la Informática.

En el caso del lenguaje, hemos categorizado los tipos de lenguaje y se han analizado aquellos que aparecen en cada texto universitario explicitando el que es dominante pues marca el tono general.

ANÁLISIS DIDÁCTICO Y RESULTADOS

La divisibilidad es un tema muy amplio para tratar en un curso con contenidos de Matemática Discreta. En este trabajo abordamos cuestiones relativas al cálculo del máximo común divisor, a través del Algoritmo de Euclides y el Algoritmo extendido de Euclides. Los conceptos y teoremas analizados en los manuales son los siguientes:

1. Definición de máximo común divisor. La definición más formal de máximo común divisor de a y b es: aquel elemento del dominio, d, verificando: i) d/a y d/b y ii) Si existe d' tal que d'/a y d'/b entonces d'/d. Según la definición, el máximo común divisor no es único y, en el caso de los enteros, hay dos y son d y –d, aunque, por convenio, se toma el positivo. En distintas aplicaciones a la Informática, como en las congruencias, nos podemos reducir en ocasiones a números positivos, por lo que si calculamos el máximo común divisor de dos números positivos, éste coincide con el mayor, con el orden natural, de los divisores comunes.

2. Teorema fundamental de la Aritmética. Este teorema prueba la descomposición en primos de un número no nulo y no unidad. A partir de ella, el máximo común divisor será el producto de "los primos comunes elevados al menor exponente". Para números grandes la factorización en primos es bastante complicada y por esto se busca un método más eficiente como el que proporciona el Algoritmo de Euclides.

3. *Algoritmo de la división.* Si a, b $\in$Z, b no nulo, entonces existen únicos enteros cociente, q, y resto, r, tales que $a = bq + r$, donde $0 \leq r < |b|$. Los restos son muy interesantes en el Álgebra Computacional tanto para la expresión de un número en distintos sistemas de numeración como para las aplicaciones de la Aritmética modular, y, como se ve en el teorema, son números positivos. Es por ello y debido a que la división entre números negativos es difícil para el estudiante, que en algunos textos este teorema se restringe al caso de b, un número positivo.

4. Algoritmo de Euclides. Como se puede ver en cualquier manual, el máximo común divisor de dos números no nulos se obtiene como el último resto no nulo de las distintas divisiones propuestas (M1, p. 164) En algunos textos se impone que los números sean positivos y empezar por el de mayor valor absoluto, pero esto no se requiere en el enunciado original. Sin embargo sí podemos considerar el caso en que uno de ellos es ya divisor del otro; es decir, el primer resto ya es cero.

5. Algoritmo extendido de Euclides o Identidad de Bézout. Demuestra que el máximo común divisor de dos números no nulos se puede escribir como combinación lineal de ellos. Este resultado es una consecuencia del anterior y despejando cada resto se obtiene de forma recurrente el resultado. Este teorema es muy importante por sus aplicaciones, por ejemplo, al cálculo de inversos de clases de restos (Ordóñez, Ordóñez y Contreras, 2013 y 2014)

Analizaremos si estos conceptos están presentes en todos los manuales expresándolo en la Tabla 2 con la numeración que aquí hemos fijado, del 1 al 5. En lo que se refiere a las entidades primarias objeto de estudio, exponemos las diferentes componentes consideradas en cada una de ellas:

Situaciones-problema

En esta entidad indagaremos:

1. Dominios de definición: Exploramos en qué dominios se introducen el concepto de máximo común divisor y algoritmos de Euclides; esto es, si se realizan para los enteros no nulos, enteros positivos, en el anillo de polinomios o ambientes más generales como: dominios de integridad (DI), dominios de ideales principales (DIP), dominios de factorización única (DFU) o dominios euclídeos (DE). Ha sido de ayuda en esta cuestión observar los contenidos de cada libro para entender el tipo de definición o demostración elegida por el autor.

2. Situación de introducción-motivación. Siguiendo investigaciones como Ordóñez (2011) se han tenido aquí muy en cuenta si se proporciona o no justificación de los conceptos o algoritmos y elementos favorecedores de un clima de motivación bien sea a través de datos históricos, aplicaciones o ejemplos.

3. Ejemplos. El uso de los ejemplos y su posición en el texto es muy importante en el análisis de las situaciones como muestran las investigaciones de Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), y Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010).

4. Ejercicios. Analizamos también si hay ejercicios propuestos y si se aporta resolución de los mismos. También buscamos si hay ejercicios orientados para resolver con ordenador.

5. Aplicaciones a la Informática. Son bastantes directas en este tema e importantes para los Grados donde se encuentran estos contenidos. Analizamos si se explicitan y en qué forma. En ocasiones aparecen como ejercicio o como parte básica en la teoría de códigos, claves de dominio público, etc.

En la Tabla 2 resumimos los resultados obtenidos en el análisis de los manuales respecto de las situaciones-problema. Incorporamos también el capítulo del libro en el que se desarrollan los contenidos estudiados para facilitar su búsqueda al lector que así lo desee.

Tabla 2. Situaciones-problema

Manuales	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
Capítulos	2	1	1, 6	1	1,8	6	11
Conceptos	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4	1,2,3,4,5
Dominios de definición	Enteros positivos	Enteros, luego sólo positivos	El más general DFU y DE	Enteros, luego sólo positivos	Enteros y luego en DFU, DIP y DE	En el anillo de polino-mios	Enteros no nulos
Introducción-motivación	Reseña histórica, ejemplos y aplica-ciones	Ejemplos y retros-pectiva	No	Reseña histórica, Ejemplos a veces	Reseña histórica	No	Al inicio del capí-tulo con las apli-caciones
Ejemplos	Antes y después	Antes y después	Casi ninguno, después	Muchos, después	Un ejemplo después	No	Sí, con Mathemati ca
Ejercicios	Sí, con resolu-cion. Comple-mentarios	Sí, con resolu-ción a ejercicios seleccio-nados	Sí, pero no numé-ricos, con resolu-ción	No los hay al final. Sí, muchos ejemplos	Sí, en cada sección	No	Sí, de exámenes y con aplica-ciones. Sin resolver
Aplicaciones Informáticas	Sí, am-plias	No	No	Alguna	No	No	Sí, en ejercicios

Lenguaje

En el estudio de los tipos de lenguaje, distinguimos entre el lenguaje de las Matemáticas que utilizamos y el lenguaje propio de programación. Sigue una clasificación dentro de cada categoría:

1. <u>El lenguaje de las Matemáticas</u>

1.1. Natural escrito: es el lenguaje común, con el que hablamos habitualmente. Se utiliza para acercarse a las cuestiones de la Matemática de una forma más simple y cercana.

1.2. Numérico: Es aquel en el que se utilizan números. En este tema de Teoría de Números deberá aparecer en ejemplos, ejercicios, etc.
1.3. Simbólico: Se utilizan los símbolos de la Matemática. Aparece en las notaciones, por ejemplo, para los divisores y las congruencias y también para el máximo común divisor.
1.4. Tabular: En ocasiones se recogen datos en una tabla. Es sabido que para un estudiante no está exenta de dificultades su lectura. A veces se utilizan tablas para recoger los cálculos de los algoritmos.
1.5. Gráfico: Corresponde con la utilización e interpretación de un gráfico.
1.6. Algorítmico: Con él expresamos mediante un número finito de pasos el conjunto de instrucciones que hay que realizar para obtener el resultado que se describe.
1.7. Axiomático: Según la Real Academia de la Lengua, en su acepción para las Matemáticas, "un axioma es cada uno de los principios fundamentales e indemostrables sobre los que se construye una teoría*"*. Así el lenguaje axiomático es el que se utiliza en la descripción de estos principios.
1.8. Inductivo o recurrente: Es el lenguaje que se establece en los distintos principios de inducción. En general, se demuestra para el primero y, supuesto para n, se demuestra para n+1. La construcción se hace a partir de los anteriores n-1, n-2,…
1.9. Deductivo o lógico: Utilizamos en él concatenaciones lógicas o razonamientos bien trabados. Aparecen operadores de la lógica matemática, cuantificadores, etc.

2. El lenguaje de programación

2.1. Código: Conjunto de instrucciones o texto desarrollado en lenguaje C, Pascal, lenguaje de Mathematica o Matlab, etc entre otros. Son las órdenes que sabe leer el ordenador para poder ejecutar lo que queremos.
2.2. Pseudocódigo: Conjunto de instrucciones de alto nivel para describir un programa o algoritmo. Se le llama también en computación falso lenguaje y utiliza las convenciones estructurales de un lenguaje de programación pero está diseñado para la lectura humana en lugar de la lectura mediante una máquina.

A continuación, la Tabla 3 recoge la presencia de los distintos tipos de lenguaje que hemos encontrado en los siete manuales. En la última fila hemos explicitado el lenguaje de programación encontrado. Dejamos la casilla en blanco cuando no se encuentra.

Tabla 3. Lenguaje

Manual	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
Natural escrito	x	x		x			x
Numérico	x	x		x	x	x	x
Simbólico	x	x	x	x	x	x	x
Tabular				x			
Algorítmico	x	x	x	x	x		x
Axiomático		x					
Inductivo	x	x	x	x	x	x	x
Deductivo	x	x	x	x	x	x	x
Programación	Pseudo-código			Pseudo-código			Mathe-matica

Para cada manual, es de especial interés destacar las siguientes consideraciones:

[M1]: En este texto se incide en la introducción y motivación de los conceptos y resultados, de forma que hay una mayor presencia del lenguaje natural escrito y ejemplos numéricos antes y después de cada cuestión, además de reseñas históricas y alusiones a las aplicaciones de lo que se expone. La definición del máximo común divisor no es la más formal por lo que el autor se restringe a los enteros positivos. En ellos, el orden para buscar el mayor de los divisores comunes coinciden con el orden natural, con lo que no se pierde la intuición del conocimiento previo del estudiante en este campo. La Algorítmica Numérica tiene un papel importante en el texto y esto se pone de manifiesto en que se proporciona el pseudocódigo para el Algoritmo de Euclides. Hay ejercicios para realizar con el ordenador y tienen un lugar muy destacado en este tema, las aplicaciones a la Informática, que se encuentran de forma notoria, como secciones del capítulo, tratándolas con profundidad en número y detalle.

[M2]: En este manual hay definiciones más formales que en el anterior, aunque luego se restringe el cálculo a los enteros positivos. La presencia de lenguaje natural escrito permite que el lenguaje deductivo, inductivo o algorítmico de la Matemática, más formales, no agobien al estudiante. Esto se refuerza también con el uso de bastantes ejemplos colocados antes y después de las definiciones formales. Destaca cómo enlaza los contenidos haciendo una retrospectiva de lo aprendido en párrafos como los siguientes:

- Hablando del concepto de ser divisor o múltiplo y la notación a divide a b, $a \mid b$, y su relación con la fracción $\frac{b}{a}$ comenta: "El lector estará sin duda familiarizado con las reglas para manipular fracciones;…" (p. 19)
- Respecto del Algoritmo de la división (p. 16), deduciendo la unicidad del resto dice "De niños aprendemos que al dividir 27 entre 6 el cociente es 4 y el resto es 3, (…) se nos dice que debemos tomar como resto el valor mínimo, de forma que "lo que sobra" sea lo menor posible (…) es consecuencia del Axioma del buen orden."
- Introduciendo la factorización en primos (p. 24), escribe: "Casi seguro que el lector está familiarizado con la idea de que cualquier entero positivo puede expresarse como producto de primos; por ejemplo…"

[M3]: Es un manual de Álgebra clásica como informa su título. Dedica dos capítulos: el primero dedicado a los números enteros en los que establece los conceptos 2, 3 y 5 para aplicarlos luego a congruencias y el capítulo 6 (Anillos y cuerpos) donde los conceptos se describen en los ambientes más generales. No hay motivación para los conceptos ni aplicaciones a la Informática. Es también notable la ausencia de ejercicios numéricos y lenguaje de programación. Este texto forma parte de la bibliografía complementaria en la Universidad de Jaén y en la del Doble Grado de Informática y Matemáticas de la Universidad de Granada.

[M4]: Este texto trata la Teoría de Números en el primer capítulo. Incluye numerosos ejemplos numéricos que recomienda haga el alumno, a modo de ejercicio, para adquirir destrezas. Utiliza el lenguaje tabular para ordenar los datos que va calculando. Como aplicación a la Informática ofrece pseudocódigos para el Algoritmo de Euclides y la factorización en primos.

[M5]: El libro dedica un primer capítulo de números y congruencias, un capitulo 6, sobre anillos e ideales, que facilita el estudio de anillos y factorización en el capítulo 8. En el primer tema, el concepto de máximo común divisor se establece para enteros no nulos pero se elige el positivo. Es el único texto de los analizados que, previo al estudio del Algoritmo, repara en el caso particular de que el primer resto sea cero; esto es, uno es múltiplo de otro. Suele haber un ejemplo de cada noción con poco lenguaje numérico y la última sección corresponde a reseñas históricas.

[M6]: Es el más formal y tiene poquísimos ejemplos numéricos, a pesar de su título Álgebra Abstracta Aplicada. Es grande el nivel de abstracción con el que se exponen los conceptos y algoritmos. Ofrece distintas aplicaciones a la Informática en otros capítulos pero no como elementos motivadores o consecuencia inmediata de los conceptos que se exponen. Todos los capítulos, menos éste, proponen ejercicios que vienen resueltos al final del texto.

[M7]: Este manual forma parte de la bibliografía básica de la Universidad de Jaén y ha sido editado para responder al programa de prácticas de la asignatura Matemática Discreta. Predomina el lenguaje de programación utilizado en el software *Mathematica*. Dispone de un resumen teórico y los ejemplos se resuelven con ordenador. Lo más significativo es que se implementan los algoritmos que se ven en clase (se adjuntan en cd), en el lenguaje de programación que dispone el programa, de forma que el estudiante de Informática pueda trasladarlos a cualquier otro lenguaje de programación. También se presentan funciones que tiene *Mathematica* incorporadas para resolver cocientes, restos, etc. y distintas cuestiones relacionadas con el tema.

CONCLUSIONES

El análisis del concepto de máximo común divisor, el Algoritmo de Euclides y el Algoritmo extendido de Euclides o Identidad de Bézout en manuales recomendados para los estudios de Ingeniería Informática, marcado como objetivo, ha revelado que estos conceptos aparecen en casi todos los manuales. La Tabla 2 nos indica la importancia de los contenidos en estas titulaciones.

Cabe destacar que en este tema tres manuales optan por incluir reseña histórica generalmente como introducción, con objeto de motivar, y, en otros casos, como sección al final del capítulo. Por otro lado, el uso de ejemplos previos a la definición formal aparece en los dos textos con más ejemplos numéricos (M1 y M2). El manual M4 presenta muchos ejemplos numéricos, posteriores a los algoritmos para que el alumno adquiera destrezas en los cálculos incluso es el único que utiliza el lenguaje tabular para recoger dichos cálculos.

Respecto del análisis de las aplicaciones a la Informática, que también figura como objetivo de esta investigación, ha resultado sorprendente que éstas se encuentran sólo en tres de los siete manuales analizados. Sólo en M1, el único recomendado por las tres universidades, las aplicaciones aparecen ampliamente desarrolladas, tanto de forma explícita como secciones de capítulo, como utilizándolas como elemento motivador en la introducción de definiciones o teoremas.

Los manuales con más aplicaciones a la Informática presentan dominios de definición más restrictivos (enteros positivos) y se distinguen de otros textos aconsejados para la doble titulación con Matemáticas, en la Universidad de Granada, en que los dominios de definición son más abstractos (DIP, DFU, DE) y necesitan mayor desarrollo teórico previo.

Los manuales más editados M1 (5ª edición) y M4 (3ª edición) son aquellos que presentan dominios de definición más restrictivos, mayor número de ejemplos numéricos, elementos motivadores y el lenguaje natural escrito para presentar al lector las cuestiones matemáticas de forma más cercana. Estos son también los que presentan pseudocódigos para implementar los algoritmos en el ordenador. Todo esto nos habla de un proceso de cambio en la adaptación de los contenidos de divisibilidad en el Grado de Informática y de que verdaderamente existe una evolución en el tratamiento de los mismos, desde desarrollos más formales (M3, M5 y M6) hacia otros más numéricos (M1, M2 y M4), que se pueden implementar utilizando lenguajes de programación.

Hay que tener en cuenta, que utilizando la entidad primaria del lenguaje, dentro del EOS, ha sido posible detectar nueve tipos distintos de tal lenguaje, poniendo de manifiesto la riqueza analítica de este marco teórico. Dado que el EOS es de naturaleza holística, hemos podido, no solo obtener una gran variedad de matices en el lenguaje, sino estudiar y comparar manuales muy diferentes a través de las situaciones-problemas.

Agradecimientos

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación EDU2012-32644.

Referencias

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384.

Gea, M. M. (2012). *Fundamentos para un estudio sobre la didáctica de la regresión y la correlación.* Tesis de Maestría. Universidad de Granada.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). La regresión en los textos de bachillerato de ciencias sociales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 365-364) Salamanca: SEIEM.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática.* Universidad de Granada. Recuperado el 10 de marzo de 2015 de: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 385-394). Salamanca: SEIEM.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Reston, VA: NCTM.

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Guitérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM.

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2014). Las hipótesis en Álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno con Mathematica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 493-502) Salamanca: SEIEM.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

Anexo I. Manuales analizados

[M1] Rosen, K.H. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. (5ª ed.) Madrid: Mc Graw- Hill.

[M2] Biggs, N.L. (1998). *Matemática Discreta*. Barcelona: Vicens Vives.

[M3] Cohn, P.M. (2000). *Classic Algebra*. England: Wiley and Sons.

[M4] García Merayo, F. (2015). *Matemática Discreta*. (3ª ed.) Madrid: Paraninfo.

[M5] Dorronso, J. y Hernández, E. (1996). *Números, grupos y anillos*. Madrid: Addison-Wesley y la Universidad Autónoma de Madrid.

[M6] Vera, A., Vera, F.J. y García M.A. (1992). *Álgebra Abstracta Aplicada*. Murcia: Antonio Vera López y otros.

[M7] García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C. y Ruiz, J.F. (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica*. Jaén: Universidad de Jaén.