EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON TABLETAS A TRAVÉS DEL PROCESO DE MODELIZACIÓN

Learning the quadratic function with tablets through the modelling process

Ortega, M. y Puig, L.

Universitat de València

Resumen

Analizamos cualitativamente la implementación de un modelo de enseñanza y aprendizaje diseñado para trabajar la función cuadrática con tabletas a través de la modelización matemática de un fenómeno de la vida real en un grupo de 1º de bachillerato. El fenómeno estudiado es la relación entre el tiempo y la altura de una pelota dejada caer desde una cierta altura considerando solo el primer salto. El análisis de los datos revela que la realización de un estudio previo de las propiedades cualitativas del fenómeno y los conocimientos previos de los estudiantes, son clave en la elección de la función usada como modelo así como también en la interpretación de los resultados en términos del fenómeno. También se observa que los estudiantes presentan concepciones arraigadas sobre el concepto de altura.

Palabras clave: *Modelización matemática, resolución de problemas, funciones, datos reales, tabletas*

Abstract

We analyse qualitatively the implementation of a teaching and learning model designed to work on the quadratic function with tablets through the mathematical modelling of a real-life phenomenon in a group of 11th grade students. The phenomenon studied is the relation between the time and the height of a ball when it is dropped from a certain height considering only the first jump. The analysis of the data reveals that a previous study of the qualitative properties of this phenomenon and the students' previous knowledge are key elements when they have to choose the function used as a model and they interpret the results in terms of the phenomenon. We also observe that the students have a rooted idea about the concept of height.

Keywords: *Mathematical modelling, problem solving, functions, real data, tablets*

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones en educación matemática coinciden en señalar la importancia de introducir la modelización en la enseñanza para mostrar la relación entre las matemáticas y el mundo real (Sol, Giménez y Rosich, 2011). Sin embargo, la incorporación a las aulas de esta forma de concebir la enseñanza sigue siendo un asunto pendiente debido, entre otros, a la falta de recursos y material de soporte para el profesorado y a la necesidad de un cambio de modelo en la gestión de las actividades en la enseñanza (Burkhardt y Pollack, 2006; Antonius, Haines, Jensen, Niss y Burkhardt, 2007).

Por otro lado, el incremento en el uso de las nuevas tecnologías está cambiando todo aquello que nos rodea y, en consecuencia, la forma en la que se concibe la enseñanza y el aprendizaje. Por ello, es importante la incorporación de estas herramientas en el aula ya que, como señalan Burkhardt y Pollack (2006), cualquier curso de modelización en el que no se utilicen este tipo de recursos estará alejado de la realidad de los estudiantes.

Ortega, M. y Puig, L. (2015). El aprendizaje de la función cuadrática con tabletas a través del proceso de modelización. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 451-458). Alicante: SEIEM.

Desde hace unos años, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València se está trabajando en el diseño y en la experimentación de materiales de enseñanza centrados en el estudio del proceso de modelización con ayuda de nuevas tecnologías, combinadas con una metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas y cuyo principal objetivo es generar recursos para el profesorado (Puig y Monzó, 2013). Los trabajos estudian las familias de funciones y el significado de los parámetros involucrados en ellas a través del uso de diferentes entornos de aprendizaje (ordenadores, calculadoras gráficas…). Poco se sabe aún sobre el estudio de las familias de funciones mediante el uso de tabletas y de las posibilidades que ofrecen sus aplicaciones. Este es el principal punto de interés de nuestro estudio, que consistirá en la elaboración de una situación de enseñanza para trabajar la función cuadrática a través de la modelización matemática y el uso de tabletas. Además, en el diseño también se incluye el uso de datos reales; se tiene en cuenta lo que señalan Monzó y Puig (2011) sobre las observaciones que aparecen en el documento de discusión para el ICMI Study *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* del uso de datos reales en el dominio del manejo de las expresiones algebraicas por parte de los estudiantes (Stacey et al., 2000).

Por tanto, la originalidad de nuestra investigación se basa en la combinación del uso de la modelización para trabajar las familias de funciones y la obtención y manejo de datos reales mediante el uso de tabletas.

MARCO TEÓRICO

En este estudio de carácter empírico, adoptamos el marco teórico y metodológico de los Modelos Teóricos Locales (MTL), desarrollado por Filloy, Rojano y Puig (2008), que pretende dar cuenta de fenómenos que se producen en situaciones de enseñanza y aprendizaje, que se conciben como situaciones de comunicación y de producción de sentido en las que intervienen tres personajes esenciales: el estudiante, el profesor y las matemáticas. Esto hace que se deban contemplar los siguientes elementos: la enseñanza, los sujetos que aprenden, los conceptos matemáticos involucrados y la comunicación establecida. Desde la perspectiva de los MTL, esto se traduce en constituir un modelo a partir de cuatro componentes: de competencia, de actuación, de enseñanza y de comunicación (Puig, 2006). En este marco desempeña un papel central la idea de que lo que se elabora tanto para organizar una investigación, como para organizar los resultados de esta, es un Modelo Teórico Local.

Así pues, desde esta perspectiva, consideramos que un proceso de modelización es aquel por el cual se establece, de forma explícita o implícita, una relación entre alguna idea matemática y una situación real (Blomhøj y Jensen, 2003). Analíticamente es posible describir todo proceso siguiendo el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) que se muestra en la Figura 1.

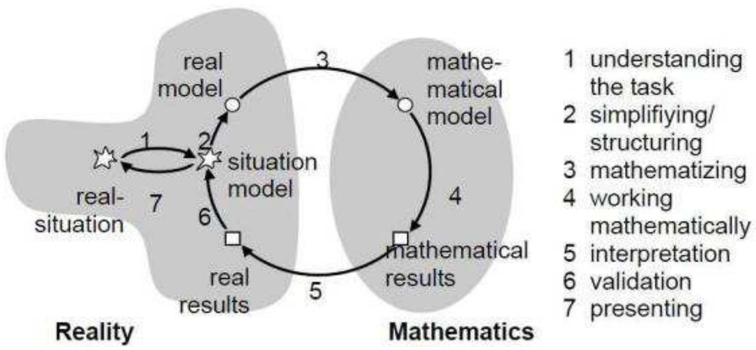

Figura 1. Ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007)

Desde nuestro punto de vista, es esencial tener en cuenta la investigación existente en resolución de problemas, puesto que entendemos el proceso de modelización como un caso particular de proceso de resolución de problemas.

En particular, Schoenfeld (1985), después de analizar las actuaciones de resolutores reales, establece que en todo proceso de resolución de problemas intervienen cuatro componentes: heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias. En Puig (1996), se afirma que un buen gestor, el gestor instruido, es aquel que conoce tanto los mecanismos generales de gestión como los específicos del tipo de problema o de proceso de resolución en el que está embarcado.

Para los problemas de modelización, Puig y Monzó (2013), argumentan que el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones es un elemento clave en la gestión del proceso, por lo que se incluye explícitamente en el diseño del modelo de enseñanza.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La finalidad del estudio es analizar cómo influyen el análisis cualitativo del fenómeno y de las familias de funciones así como los conocimientos previos de los estudiantes en el aprendizaje de la función cuadrática. Para esto, diseñamos e implementamos un modelo de enseñanza que combina el uso de datos reales con tabletas a través de la modelización matemática.

Nos planteamos como objetivos de investigación:

(a) Analizar en qué fases del ciclo de modelización influye el análisis cualitativo realizado y los conocimientos previos de los estudiantes.

(b) Realizar una exploración de las actuaciones de los estudiantes cuando trabajan con un modelo de enseñanza con estas características.

MATERIALES Y METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Población y contexto

La población de este estudio estaba formada por un grupo natural de 16 estudiantes de primer curso de bachillerato que no se habían enfrentado antes a la resolución de tareas de modelización. Poseían conocimientos sobre las diferentes familias de funciones y el significado de los parámetros adquiridos en cursos previos con el uso de nuevas tecnologías.

Diseño del experimento de enseñanza

El estudio realizado consistió en diseñar e implementar un modelo de enseñanza para trabajar la función cuadrática a través de la modelización matemática y el uso de tabletas caracterizado por la inclusión de elementos de gestión del proceso de modelización y el uso de datos reales obtenidos directamente en el aula con tabletas.

El fenómeno que se plantea que estudien matemáticamente es la relación entre el tiempo y la altura de una pelota dejada caer desde una cierta altura, restringiendo el modelo al primer salto, esto es, desde el momento en que toca el suelo por primera vez hasta que lo vuelve a tocar. Considerando el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007), la situación real ya se da simplificada ya que se especifican las magnitudes que se deben estudiar, el tiempo y la altura.

El experimento se llevó a cabo en tres sesiones de las cuales dos se dedicaron a la implementación del modelo de enseñanza y una a la realización de entrevistas. Durante las sesiones dedicadas a la enseñanza, los estudiantes trabajaron por parejas ya que, según Schoenfeld (1985), esto favorece la verbalización de lo que hacen, piensan o desean hacer.

En la primera sesión, se les administró una ficha en la que se presentaba el fenómeno que debían estudiar y un catálogo de preguntas donde los estudiantes tenían que usar sus conocimientos previos sobre las propiedades cualitativas de las familias de funciones y el significado de los parámetros para responder. Entre estas, se les pidió que realizaran un esbozo de la gráfica de la función que pensaban que modelizaría el fenómeno, que eligieran la familia de funciones que mejor se ajustaba a esta de las de una lista dada y que justificaran su elección. Al final se pidió que simularan el fenómeno estudiado y que lo grabaran mediante Video Physics® (fotografía izquierda, Figura 2): esto les permitió obtener un conjunto de puntos cuyas coordenadas mostraban el tiempo y la altura a la que se encontraba la pelota en cada instante.

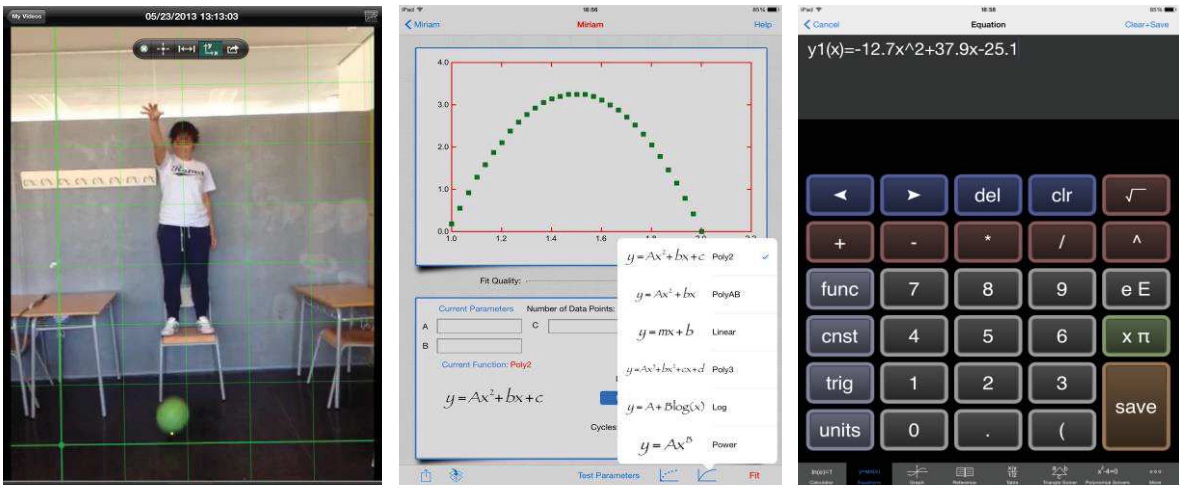

Figura 2. Secuencia de capturas de pantalla de Video Physics®, Data Analysis® y Free GraCalc®

En la segunda sesión, los estudiantes introdujeron dichos puntos en la aplicación Data Analysis® para elegir la función que mejor ajustaba a éstos (fotografía central, Figura 2) y obtener así un modelo del fenómeno. Además, se les administró una segunda ficha con preguntas relativas al cálculo del dominio de la función (preguntas 5 y 6, Figura 3) y a la interpretación de los datos en relación con el fenómeno estudiado con el objetivo, no solo de que los alumnos analizaran sus propiedades con mayor profundidad, sino también de que validaran la adecuación del modelo escogido (pregunta 7, Figura 3). En concreto, en la pregunta 5 se les pedía que calcularan algunas imágenes de la función cuyos valores para x estaban fuera del dominio y que explicaran si pensaban que las imágenes obtenidas mostraban lo que verdaderamente ocurría, con la finalidad de que se dieran cuenta de que la función de regresión no representa a la función que modeliza el fenómeno en todo el dominio, sino solamente en el intervalo para el que se ha definido; en este caso, durante el primer salto.

Para responder a estas cuestiones, usaron la aplicación Free GraCalc® (fotografía derecha, Figura 2), cuyo funcionamiento es similar al de una calculadora gráfica.

Para finalizar, en la última sesión se seleccionaron las parejas que participaron en el estudio de casos atendiendo a los resultados obtenidos del análisis de sus actuaciones en las dos sesiones anteriores relativos a los objetivos del estudio. A estos se les realizó una entrevista de diagnóstico con la finalidad de detectar el origen de los resultados obtenidos y en la que también incorporamos elementos de enseñanza. Esto último se hizo en base a lo que Roth y Radford (2011) comentan sobre la importancia de trabajar en la zona de desarrollo próximo del estudiante, yendo más allá de lo que Freudenthal (1983) denomina “proceso de reinvención guiada”, con el objetivo de guiar a los alumnos, a partir de preguntas y sugerencias, hacia la adquisición de conocimientos relacionados con el significado de los parámetros y las concepciones relacionadas con el concepto de altura observadas en las respuestas de los estudiantes y que detallamos en el siguiente apartado.

Cabe destacar que la elección de las aplicaciones usadas en el experimento se debió al hecho de ser gratuitas o de bajo coste con la finalidad de facilitar su futura incorporación a las aulas.

5. a. ¿A qué altura se encuentra la pelota cuando x = 0,76? f(0,76) = ___

b. ¿Y cuándo x = 1,1? f(1,1) = __________

c. ¿Y cuándo x = 0,11? f(0,11) = __________

d. ¿Y cuándo x = 100? f(100) = __________

6. a. En general, ¿crees que las respuestas obtenidas en la pregunta anterior muestran lo que verdaderamente ocurre? ¿Por qué?

b. ¿Qué datos no se ajustan a lo que esperabas? ¿Por qué?

7. a. ¿Para qué valores de x (tiempo) la pelota golpea el suelo? Explica cómo has obtenido el resultado.

b. ¿Para qué valores de x (tiempo) la pelota alcanza su máxima altura? Explica cómo has obtenido el resultado.

Figura 3. Preguntas de la ficha posterior al experimento

Recolección y análisis de datos

Las características del marco teórico-metodológico de los Modelos Teóricos Locales comportan que la metodología con la que se organiza la investigación tenga como componente esencial la descripción de las actuaciones de los alumnos y la selección de casos que se estudian mediante la realización de entrevistas que, habitualmente, son con enseñanza. Nosotros analizamos los datos dados de las fichas, de las tabletas y de las entrevistas.

Por un lado, se analizaron las respuestas de las fichas y los datos de las tabletas (lugar donde fijan el eje de las x en Video Physics®, ajuste de la función escogida, etc.) realizando una reconstrucción racional, esto es, una narración de las conductas y los comportamientos de los estudiantes con el objetivo de dotar de sentido el conjunto del texto (Puig, 1996) y, por consiguiente, de elaborar un catálogo de observaciones relativas a aquellas actuaciones relacionadas con los objetivos planteados en el estudio. Para ello, además se tuvieron en cuenta las observaciones realizadas en clase y recogidas en una memoria después de cada sesión. Se analizaron los datos por parejas y también por resultado relevantes.

Por otro lado, se analizan las entrevistas realizando la transcripción de las intervenciones y una reconstrucción racional, incluyendo comentarios sobre las actuaciones tanto de estudiantes como de investigador y reacciones observadas en las grabaciones, fundamentales para la total comprensión e interpretación de los datos. El análisis de las entrevistas se realizó también pareja por pareja y por resultados, centrándonos en estudiar la influencia del análisis cualitativo y de otros elementos en el modelo.

RESULTADOS

En primer lugar, incluimos los resultados que muestran la influencia del análisis cualitativo y de los conocimientos de los estudiantes en la elección del modelo matemático y durante la interpretación de los datos en términos del fenómeno, primer objetivo del trabajo. Por otro lado, mostramos las concepciones que estos presentan sobre el concepto de altura como resultado de explorar sus actuaciones cuando trabajan con el modelo de enseñanza diseñado.

Influencia del análisis cualitativo previo y de los conocimientos de los estudiantes en la elección de la función usada como modelo

En la Figura 4 se muestra un fragmento de entrevista en el que podemos observar la influencia del análisis cualitativo en la elección del modelo ya que al preguntar a los estudiantes en qué se basaron para escoger la función $f(x)=ax^2+bx+c$, responden haciendo alusión al esbozo que realizan en la primera ficha, "el dibujo". Además, también utilizan sus conocimientos sobre las familias de funciones para relacionar la gráfica de la función con su expresión algebraica al explicar que "como el dibujo era una parábola, sabíamos que *x* llevaba un cuadrado".

I:	[...] ¿por qué escogisteis esta función? [$f(x)=ax^2+bx+c$]
E1:	Al final encontramos que esa era la más coherente.
I:	Y, ¿en qué os basasteis para responder?
E1:	Pues, como el dibujo era una parábola, sabíamos que *x* llevaba un cuadrado.

Figura 4. Ejemplo de fragmento de entrevista

Por otro lado, los conocimientos previos de los estudiantes sobre el significado de los parámetros son otro elemento clave en la elección del modelo. En la Figura 5 vemos que, al preguntar por qué eligen la función $f(x)=ax^2+bx$ como la que mejor modeliza el fenómeno, explican que "como [la gráfica de la función] empieza en (0,0) no tenemos c", utilizando sus conocimientos sobre el significado de los parámetros para especificar por qué eligen $f(x)=ax^2+bx$ y no $f(x)=ax^2+bx+c$. A la hora de justificar su respuesta se ven forzados a dar un significado al resto de parámetros de la familia ya que explican que "la a indica el eje de las y y la b el de las x", cosa que corresponde a una primera interpretación de los parámetros sin demasiada reflexión, como ellos mismos afirman durante la posterior entrevista.

3. Explica por qué has hecho esta elección.

"Porque la *a* indica el eje de las *y* y la *b* el de las *x* y como [la gráfica de la función] empieza en (0,0) no tenemos *c*."

Figura 5. Ejemplo de respuesta ficha previa al experimento

Influencia del análisis cualitativo previo y de los conocimientos de los estudiantes en la interpretación del modelo en términos del fenómeno

En la Figura 6 podemos observar que los estudiantes explican que la pelota alcanza su máxima altura "en el punto intermedio entre los dos tiempos anteriores ya que es un lugar aproximado donde se encontraría el vértice de la parábola", utilizando sus conocimientos sobre las propiedades cualitativas de la función para relacionar la máxima altura de la pelota con el punto más alto de la función. Además, se basan en la gráfica del estudio cualitativo para afirmar que el vértice es el punto más alto de esta por ser una parábola convexa.

7.b. ¿Para qué valores de *x* (tiempo) la pelota alcanza su máxima altura? Explica cómo has obtenido el resultado.

"1,5. El punto intermedio entre los dos tiempos anteriores [tiempos en los que la pelota golpea el suelo] ya que es un lugar aproximado donde se encontraría el vértice de la parábola."

Figura 6. Ejemplo de respuesta ficha posterior al experimento

Las concepciones sobre el concepto de altura

Como resultado de realizar una exploración de las actuaciones de los estudiantes cuando trabajan con el modelo de enseñanza presentado, encontramos una fuerte tendencia a considerar que la altura por encima del nivel del suelo es positiva y cero exactamente en el suelo, hecho que depende de dónde se fije el eje de abscisas en el programa Video Physics®.

Esto se puede observar en la respuesta que dan los estudiantes a la pregunta 6 (Figura 7) donde, después de encontrar que algunas imágenes de la función (ver pregunta 5) cuyos valores se encuentran fuera del dominio dan valores negativos, concluyen que “la altura en este caso no puede ser negativa ya que la pelota no atraviesa el suelo”, considerando que la referencia tomada es el suelo y que los valores negativos corresponden a niveles inferiores a este.

5. Responde las siguientes cuestiones. **a. ¿A qué altura se encuentra la pelota cuando $x = 0{,}76$? $f(0{,}76)$ =** “-3,541646” **b. ¿Y cuándo $x = 1{,}1$? $f(1{,}1)$ =** “1,28226” **c. ¿Y cuándo $x = 0{,}11$? $f(0{,}11)$ =** “-20,8487” **d. ¿Y cuándo $x = 100$? $f(100)$ =** “-121909,3”	**6.a. En general, ¿crees que las respuestas obtenidas en la pregunta 5 muestran lo que verdaderamente ocurre? ¿Por qué?** “No, porque la altura en este caso no puede ser negativa ya que la pelota no atraviesa el suelo, sino que rebota, y por tanto la y no debería ser negativa.”

Figura 7. Ejemplo respuesta ficha posterior al experimento

CONCLUSIONES

Hemos diseñado e implementado un modelo de enseñanza para trabajar la función cuadrática a través de la modelización matemática y el uso de datos reales, obtenidos y procesados con aplicaciones para tabletas.

Respecto al objetivo de analizar en qué fases del ciclo de modelización influye el análisis cualitativo realizado y los conocimientos previos de los estudiantes, hemos constatado que, tal como afirman Puig y Monzó (2013), estos elementos, que forman parte del componente de enseñanza del MTL, son cruciales a lo largo de todo el proceso de modelización. En particular, son clave en la elección de la función usada como modelo y en la interpretación de ésta en términos del fenómeno, principal aportación de nuestro estudio.

Respecto al segundo objetivo, observamos una tendencia a considerar que la altura no puede tomar valores negativos cuando se trabaja por encima del nivel del suelo, probablemente como consecuencia de que habitualmente se considera éste como referencia y de que no se cede la responsabilidad de su elección al alumno, por lo que sería conveniente plantear un mayor número de situaciones en el aula en las que se tuvieran en cuenta estos aspectos.

Como implicaciones futuras, se tendrán en cuenta los resultados obtenidos, que forman parte del componente de actuación del MTL, para la mejora del diseño del modelo de enseñanza y la posterior elaboración de modelos análogos para trabajar otras familias de funciones distintas así como el significado de los parámetros con el uso de tabletas, incluyendo el análisis cualitativo como elemento clave para guiar a los estudiantes. Además, se contempla la posibilidad de analizar en qué fases del proceso de modelización influyen las características de la herramienta tecnológica y las posibles consecuencias en el aprendizaje de las familias de funciones.

Agradecimientos

La investigación ha sido financiada por el Proyecto EDU2012-35638 y por la ayuda para contratos predoctorales BES-2013-063826 del Ministerio de Economía y Competitividad

Referencias

Antonius, S., Haines, C., Jensen, T. H., Niss, M. y Burkhardt, H. (2007). Classroom activities and the teacher. En P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 295-308). Nueva York: Springer.

Blomhoj, M. y Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modeling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *22*(3), 123-139.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Horwood Publishing.

Burkhardt, H. y Pollack, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: Reflections on past developments and the future. *ZDM-Mathematics Education*, *38*(2), 178-195.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meaning*. Utrecht: OW & OC.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008*). Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Nueva York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel Publishing.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 107-126). Huesca: SEIEM.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35). México DF: Trillas.

Roth, W. M. y Radford, L. (2011). *A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning*. Nueva York: Springer.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Sol, M., Giménez, J. y Rosich, N. (2011). Trayectorias modelizadoras en la ESO. *Modelling in Science Education and Learning*, *4*, 329-343.

Stacey, K., Carlson, D., Drouhard, J.-P. Fearnley-Sander, D., Fujii, T. … y Chick, H. (2000). Discussion Document for the 12th ICMI Study: The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, *48*, 6-13.