

CONTRIBUCIONES DE LA INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL PARA EL DISEÑO, GESTIÓN Y EVALUACIÓN DE BUENAS PRÁCTICAS

Contributions of research on early childhood mathematical education for the design, management and evaluation of good practices

Alsina, A.

Universidad de Girona

Resumen

Se presenta el panorama de la investigación en educación matemática infantil a partir de las contribuciones en la SEIEM y en el grupo IEMI. Esta revisión sirve de base para plantear algunos elementos que se deberían considerar en el diseño, la gestión y la evaluación de buenas prácticas matemáticas en las aulas de Educación Infantil, sustentados principalmente en las aportaciones de la Educación Matemática Realista y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos. Para el diseño se consideran los contextos de aprendizaje y los conocimientos matemáticos; para la gestión se aportan algunas ideas clave acerca del trabajo de los contenidos a través de los procesos matemáticos, que se ejemplifican con un ejemplo; y para la evaluación se presenta un instrumento para analizar la presencia de los procesos matemáticos en las prácticas de aula.

Palabras clave: *investigación en educación matemática infantil, prácticas matemáticas, contextos de aprendizaje, conocimientos matemáticos, evaluación de prácticas matemáticas.*

Abstract

An overview of research on childhood mathematics education is presented here on the basis of the contributions made by SEIEM and the IEMI group. This review serves as a basis for presenting some elements that should be considered in the design, management and evaluation of good mathematical practices in preschool classrooms, principally supported by the contributions of the Realistic Mathematics Education approach and the National Council of Teachers of Mathematics of the United States. The design part takes into consideration learning contexts and mathematical knowledge; the management section highlights some key ideas for working on content through mathematical processes, which are illustrated with a example; and for the evaluation aspect, an instrument is presented which analyses the presence of mathematical processes in classroom practices.

Keywords: *research on early childhood mathematics education, mathematics practice, learning contexts, mathematical knowledge, evaluation of mathematical practices.*

INTRODUCCIÓN

Diversos estudios bibliométricos realizados en España en los últimos tiempos han puesto de manifiesto que la investigación en educación matemática infantil ha tenido tradicionalmente una presencia escasa en nuestro país respecto a la realizada en otras etapas educativas. Así, por ejemplo, Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal (2011), a partir de un análisis temático de la investigación en educación matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM, señalan la importancia de los trabajos que se refieren a la Educación Secundaria. En este mismo estudio se concluye que la Educación Primaria, la Formación Profesional y el título de Grado Universitario aparecen en segundo lugar de importancia, y destacan la reducida cantidad de documentos que se refieren a la etapa de Educación Infantil. Los trabajos que no se refieren a ningún nivel educativo específico representan también una proporción importante de la totalidad de trabajos (ver Figura 1):

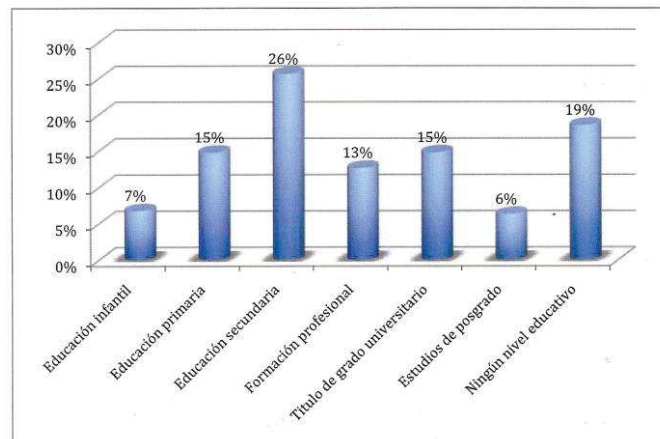


Figura 1. Porcentaje de trabajos por niveles educativos en la SEIEM entre 1997 y 2008 (Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal, 2011)

También Sierra y Gascón (2011), a partir de la revisión de algunas de las investigaciones más relevantes en Didáctica de las Matemáticas de la Educación Infantil y Primaria, concluyen que las relativas a la Educación Elemental son escasas, y especialmente escasas las de Educación Infantil dentro de la SEIEM.

Alsina (2013) sugiere que esta tendencia se empieza a modificar a partir del año 2011, en el que se produce un punto de inflexión como consecuencia, sobre todo, de la creación del Grupo de Investigación IEMI. En el trabajo de Alsina, además de las investigaciones recogidas en las diferentes Actas de los Simposios de la SEIEM, se analizan también los trabajos presentados en los seminarios intermedios de los diferentes grupos de investigación de la SEIEM desde 2005 hasta 2012, ya que en el marco de estos diferentes grupos también hay algunas investigaciones centradas en la etapa de Educación Infantil, sobre todo en el caso del I Seminario del Grupo de Investigación IEMI celebrado en marzo de 2012 en la Universidad Complutense de Madrid.

En síntesis, Alsina (2013) señala la escasa producción de investigaciones sobre Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil en la SEIEM desde 1997 hasta 2010, y el cambio de tendencia que se ha producido a partir de 2011, que ha supuesto el inicio de un cuerpo de investigaciones sobre educación matemática infantil cada vez más cohesionado, que se sustenta en el análisis del contenido matemático que aparece en los trabajos revisados. Desde este criterio de interpretación se aprecia que hasta el momento los trabajos se centran sobre todo en tres temas:

- La formación inicial de maestros de Educación Infantil: este campo de investigación se trata, en algunas ocasiones, desde un enfoque didáctico concreto como por ejemplo la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) o la Educación Matemática Realista (EMR); en otros trabajos se aportan datos a partir de

diferentes métodos de formación activa, como por ejemplo el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) o el Aprendizaje Colaborativo; se analizan también los referentes internacionales a nivel curricular (NCTM, 2003); experiencias de formación interdisciplinarias; prácticas externas y Trabajos de Final de Grado; etc.

- La adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático infantil: la mayoría de los estudios se centran, hasta el momento, en la numeración y el cálculo, lo cual tiene su explicación ya que, de acuerdo con la NCTM (2003), es uno de los bloques con mayor peso en esta etapa educativa. Cabe destacar que algunos de los trabajos clasificados dentro de este bloque se fundamentan ya en un enfoque didáctico concreto, como por ejemplo los realizados desde la perspectiva de la TAD o la EMR.
- Existe un tercer grupo de trabajos que analizan algunos recursos o contextos de aprendizaje para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático como los contextos de vida cotidiana, los juegos, los cuentos, los gráficos, etc.

En los distintos seminarios intermedios del Grupo IEMI de la SEIEM que se han celebrado posteriormente (Valladolid, 2014; Lugo, 2016) se ha ido reforzando esta categorización, y el número de trabajos presentados ha ido aumentando. Parece, pues, que aunque queda mucho por hacer, la investigación en educación matemática infantil en nuestro país se va consolidando paulatinamente. Como indica Alsina (2013), para seguir avanzando será necesario ir dando mayor coherencia a este campo de investigación a partir de los postulados expuestos por Sierra y Gascón (2011):

Si pretendemos tomar en consideración el contenido de los trabajos y, en especial, el tipo y la naturaleza de los problemas didácticos que éstos formulan y abordan, entonces deberemos situarnos necesariamente en un enfoque didáctico concreto y elaborar criterios con ayuda de las herramientas teóricas y metodológicas que dicho enfoque nos proporciona. Creemos que sólo así será posible valorar y comparar adecuadamente el alcance y las limitaciones de los diferentes trabajos de investigación y potenciar el necesario diálogo y desarrollo mutuo, que no necesariamente integración, de los enfoques teóricos en didáctica de las matemáticas que sustentan los trabajos en cuestión (p. 153).

En definitiva, pues, las líneas para seguir avanzando están marcadas, y pasan necesariamente por realizar estudios que se sustenten en un determinado enfoque teórico, una metodología de investigación concreta y un contenido claro que se aborde desde un enfoque didáctico concreto.

Considerando estos aspectos, en los siguientes apartados se aportan algunas contribuciones de la investigación en educación matemática infantil sustentadas principalmente en la EMR (Freudenthal, 1971) y las aportaciones acerca del conocimiento matemático del NCTM (2003) para el diseño, gestión y evaluación de buenas prácticas.

EL DISEÑO DE BUENAS PRÁCTICAS EN EL AULA DE EDUCACIÓN INFANTIL

El término “buena práctica” ha sido objeto de un amplio debate en el ámbito de la investigación en educación matemática, y también ha generado discusión en el contexto de la educación matemática infantil. A modo de ejemplo, el NCTM (2003, p. 17) señala que “una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender; y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien”. De forma más concreta, consideran tres elementos en el marco del “Principio de Enseñanza” de las matemáticas:

- La eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los alumnos son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas. En este sentido, el profesorado debería tener diferentes tipos de conocimientos (disciplinares, didácticos, etc.)

- Una enseñanza eficaz requiere un entorno en aprendizaje que apoye y estimule. Se trata, en definitiva, de plantear propuestas educativas o tareas matemáticas útiles para introducir nociones matemáticas importantes y para retar e implicar intelectualmente a los alumnos. La toma de decisiones respecto al tipo de propuestas o tareas debe acompañarse con decisiones acerca de la gestión de dichas tareas.
- Una enseñanza eficaz requiere tratar continuamente de mejorar. En otras palabras, las buenas prácticas surgen de la observación y reflexión sistemática de la propia práctica.

En definitiva, según estos planteamientos, se trata de que el profesorado conozca y entienda profundamente las matemáticas que enseña y que sea capaz de hacer uso de este conocimiento con flexibilidad.

Para concretar las características de una buena práctica matemática, Planas y Alsina (2014) retoman los siete principios clásicos de la enseñanza de las matemáticas elaborados por el matemático inglés John Perry y sintetizados en Price (1986, p. 114) y, a modo de decálogo, los completan con tres principios más, ubicados al final de la lista:

- Tener en cuenta la motivación y los intereses del alumnado.
- Basar lo abstracto en la experiencia concreta para promover la comprensión.
- Emplear actividades que supongan el uso de la mano y el ojo, y no solo de la oreja, en conjunción con el cerebro, así como de los métodos gráficos.
- Adoptar métodos experimentales y heurísticos: experimento, estimación, aproximación, observación, inducción, intuición, sentido común, etc.
- Retrasar el rigor lógico y la preocupación inicial por los fundamentos, y restringir los elementos deductivos formales, admitiendo diversas formas de demostración.
- Simplificar, ensanchar y unificar la materia-disciplina de las matemáticas, e ignorar las divisiones artificiales tradicionales.
- Correlacionar las matemáticas con la ciencia y el trabajo de laboratorio, y relacionar las matemáticas con la vida y sus aplicaciones.
- Recordar la necesidad de incorporar el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos en los momentos posteriores a la experiencia concreta.
- Introducir formas de validación de la práctica matemática que no hayan surgido de la implicación del alumnado en las actividades propuestas.
- Generar motivación e interés en el alumnado por problemas matemáticos.

Añaden los tres últimos principios con la intención de cerrar “mejor” el círculo, retomando cuestiones y prácticas matemáticas de importancia que podrían no ser incorporadas en el desarrollo del currículo si solo se tuvieran en cuenta la motivación y los intereses del alumnado o si se retrasara tanto el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos que, finalmente, no se volviera a ellos.

Todavía en relación a la concreción de buenas prácticas en educación matemática desde una perspectiva genérica, en el manual *De los Principios a la Acción* (NCTM, 2015) se mencionan ocho prácticas basadas en investigaciones:

- Establecimiento de metas matemáticas basadas en el aprendizaje.
- Implementación de tareas que promuevan el razonamiento y la resolución de problemas.

- Uso y vinculación de las representaciones matemáticas.
- Favorecimiento del discurso matemático significativo.
- Planteamiento de preguntas deliberadas.
- Elaboración de la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual.
- Favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas.
- Obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes.

El NCTM considera que las ocho prácticas anteriores constituyen “un conjunto de acciones muy recomendables para todos los docentes, asesores pedagógicos y especialistas en matemáticas, así como para todo el personal administrativo de escuelas y distritos y cada uno de los líderes políticos y responsables de políticas” (NCTM, 2015).

Desde la perspectiva de la educación matemática infantil también ha habido intentos de concreción de lo que se entiende por buena práctica matemática en estas primeras edades. Así, por ejemplo, en la declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la Educación Infantil de la Asociación Nacional para la Educación Infantil y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NAEYC y NCTM, 2013), se indican algunos aspectos que se deberían considerar en las prácticas de aula:

- Potenciar el interés natural de los niños en las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social.
- Aprovechar las experiencias y conocimientos previos de los niños, incluidos los familiares, lingüísticos, culturales y los de su comunidad, sus aproximaciones individuales al aprendizaje; y sus conocimientos informales.
- Basar los currículos de matemáticas y las prácticas docentes en el conocimiento sobre el desarrollo cognitivo, lingüístico, físico, social y emocional, de los niños.
- Utilizar currículos y prácticas docentes que fortalezcan los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas.
- Asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales.
- Facilitar que los niños interactúen de forma continuada y profunda con las ideas matemáticas clave.
- Integrar las matemáticas con otras actividades y otras actividades con las matemáticas.
- Proporcionar tiempo suficiente, materiales, y apoyo del profesor para que los niños se impliquen en el juego, un contexto en el que explorar y manipular ideas matemáticas con vivo interés.
- Introducir activamente conceptos matemáticos, métodos y lenguaje a través de una variedad de experiencias y estrategias de enseñanza apropiadas.
- Apoyar el aprendizaje mediante la evaluación continua y reflexiva del conocimiento, destrezas y estrategias de todos los niños.

A partir de los planteamientos anteriores, Alsina (en prensa) sugiere que el diseño de buenas prácticas en el aula debe considerar dos grandes aspectos: los contextos de aprendizaje y los conocimientos matemáticos.

Los contextos de aprendizaje

La investigación contemporánea sobre medidas educativas eficaces para mejorar el rendimiento en matemáticas subraya la necesidad de considerar las siguientes medidas (EACEA P9 Eurydice, 2011):

- Atención a las diferentes necesidades del alumnado: adaptarse a las diferentes necesidades de aprendizaje de los alumnos, en lo referente a su disposición hacia el aprendizaje, su interés y su perfil individual de aprendizaje, incide positivamente sobre el rendimiento y la implicación en matemáticas.
- Hincapié en la importancia de las matemáticas: los métodos de enseñanza deberían partir de “grandes temas” y temas multidisciplinares que permitan establecer conexiones con la vida cotidiana y con otras asignaturas.
- Intervención temprana: los primeros años de escolarización constituyen la base de los futuros aprendizajes en matemáticas, y la identificación de dificultades puede evitar que los niños desarrollen estrategias inadecuadas.
- Factores motivacionales: el profesorado necesita establecer y comunicar a sus alumnos unas expectativas de aprendizaje elevadas y fomentar la participación activa de todos ellos.
- Aumento de la participación de las familias: debe animarse a los padres a que ayuden a aprender y a disfrutar con las matemáticas.

A partir de estos planteamientos, parece que para lograr cada vez mejores rendimientos es necesario trasladar el currículo de matemáticas a la práctica de aula; aplicar diversos enfoques didácticos para dar respuesta a las necesidades de todos los alumnos; usar de forma eficaz los métodos de evaluación; establecer objetivos y hacer un seguimiento de la eficacia de los programas de apoyo; aumentar la motivación y la implicación de los alumnos a través de iniciativas específicas; ampliar el repertorio didáctico del profesorado y fomentar la flexibilidad; promover políticas basadas en la evidencia; y, por supuesto, trabajar los contenidos a través de los procesos matemáticos.

Desde esta perspectiva, Alsina (2010) plantea que para favorecer la alfabetización matemática en las primeras edades es preciso partir de contextos de aprendizaje significativos y ajustados a las necesidades de los alumnos. Haciendo un símil con la pirámide de la alimentación, plantea la “Pirámide de la Educación Matemática” en la que se indica de forma sencilla el tipo de recursos necesarios para desarrollar el pensamiento matemático y su frecuencia de uso más recomendable (figura 2).

Como en el caso de la pirámide alimentaria, no descarta ningún recurso, sólo informa sobre la conveniencia de restringir algunos de ellos a un uso ocasional y, por eso, puede ser una herramienta útil para el profesorado preocupado por hacer de su metodología una garantía de educación matemática.



Figura 2. Pirámide de la Educación Matemática (Alsina, 2010)

En la base están los recursos que necesitan todos alumnos y que, por lo tanto, se podrían y deberían “consumir” diariamente: las situaciones problemáticas y los retos que surgen en la vida cotidiana de cada día, la observación y el análisis de los elementos matemáticos del entorno, la manipulación con materiales diversos, y los juegos, entendidos como la resolución de situaciones problemáticas. Después aparecen los que deben “tomarse” alternativamente varias veces a la semana, como los recursos literarios y los recursos tecnológicos. Por último, en la cúspide, se encuentran los recursos que deberían usarse de forma ocasional, concretamente los cuadernos de actividades. Sin embargo, los cuadernos continúan ejerciendo un control considerable en el diseño y el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil (Lacasta y Wilhelmi, 2008), por lo que en realidad, en la práctica diaria de muchos docentes este organigrama está invertido: en la base están los libros de texto, mientras que la matematización del entorno, el uso de materiales manipulativos, juegos, etc. “se consumen muy poco”. En nutrición, la inversión de la pirámide conlleva problemas de salud, como por ejemplo la obesidad. En educación matemática, la inversión del organigrama piramidal conlleva también graves problemas como los aprendizajes poco significativos, la desmotivación, la falta de comprensión, etc.

Parece necesario, pues, repensar qué tipo de actividades se ofrecen a los alumnos de las primeras edades. En este sentido, Alsina (en prensa), propone diversas fases para el diseño de buenas prácticas en el aula. Estas fases, como se verá, se inspiran principalmente en los postulados de la EMR (Freudenthal, 1991), y tienen en cuenta los distintos tipos de conocimientos matemáticos planteados por la NCTM (2003): los contenidos y los procesos matemáticos.

Los conocimientos matemáticos

Desde el punto de vista de Alsina (en prensa), el diseño de buenas prácticas que fomenten la alfabetización matemática en las primeras edades requiere considerar las siguientes fases de trabajo:

Fase 1: Matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje

En esta fase todavía no intervienen los alumnos. Consiste en analizar y establecer los contenidos matemáticos (de números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y

probabilidad) que se pueden trabajar en el contexto de aprendizaje y determinar a través de qué procesos se trabajan.

| | Resolución de problemas | Razonamiento y demostración | Comunicación | Conexiones | Representación |
|----------------------------------|-------------------------|-----------------------------|--------------|------------|----------------|
| Números y operaciones | | | | | |
| Álgebra | | | | | |
| Geometría | | | | | |
| Medida | | | | | |
| Análisis de datos y probabilidad | | | | | |

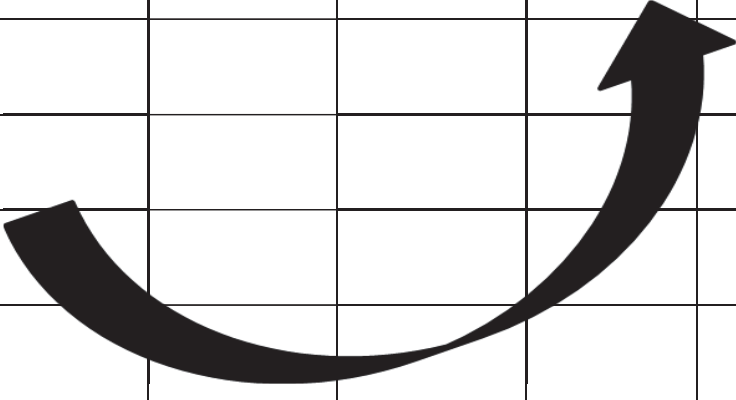


Figura 3. Relación cartesiana entre contenidos y procesos matemáticos

Partir de este enfoque globalizado del conocimiento matemático ya desde las primeras edades, en la que todo está integrado, nos parece especialmente significativo, dado que cuando los alumnos usan las relaciones existentes en los contenidos matemáticos, en los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

Fase 2. Trabajo previo en el aula

Cualquier actividad formativa requiere partir de los conocimientos previos de los alumnos, puesto que si la distancia entre lo que el alumno sabe y lo que se planifica que aprenda es demasiado grande, el aprendizaje difícilmente va a producirse. Y en el caso que se produzca, será un aprendizaje desconectado del resto, puesto que no será posible realizar ningún tipo de vínculo.

Desde este punto de vista, una vez determinado el contexto de enseñanza-aprendizaje se inicia un diálogo con los alumnos para recoger sus conocimientos previos y experiencias. Existen diversos recursos posibles para hacer emerger los conocimientos previos, aunque uno de los más adecuados son las buenas preguntas. En los procesos de interacción, diálogo y negociación, las buenas preguntas se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos, ya que pueden hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores (Mercer, 2001).

En el marco de este diálogo, entre todos se pacta el material para trabajar en contexto y documentar el trabajo que va a realizarse durante el transcurso de la actividad: una cámara digital para poder documentar en contexto, o bien otros materiales que sean necesarios para llevar a cabo la actividad: una cinta métrica, una calculadora, una libreta para anotar los descubrimientos o para representar una idea matemática, etc.

Fase 3: Trabajo en contexto

En esta fase es cuando se desarrolla la actividad matemática en el contexto de enseñanza-aprendizaje establecido, y la práctica docente del maestro debería favorecer que los alumnos usen y

comprendan las matemáticas en dicho contexto. Para ello, como se detallará en el apartado correspondiente a la gestión de actividades matemáticas competenciales, el maestro debería provocar situaciones que inviten a los alumnos a pensar, indagar, argumentar, razonar, descubrir, comprobar, comunicar, conectar, modelar o bien representar ideas matemáticas. Así, pues, durante la realización de la actividad competencial es recomendable que el maestro intervenga haciendo preguntas, más que dando explicaciones.

Otro elemento interesante a considerar es la documentación de la actividad. Aunque no se trata de un requisito imprescindible, la documentación a través de fotografías, vídeo, anotaciones en el diario del maestro, etc. pueden tener un papel muy importante: en primer lugar, pueden servir para llevar a cabo procesos de reflexión acerca de la propia actividad que permitan mejorar actividades posteriores; en segundo lugar, pueden servir a los propios alumnos para observar y ser conscientes de su propia práctica; en tercer lugar, pueden servir para comunicar el trabajo realizado a las familias; y finalmente, también puede ser útiles para mostrar a la comunidad el trabajo que se realiza a través, por ejemplo, de presentaciones en el blog de la escuela.

Fase 4. Trabajo posterior en el aula

Esta fase es fundamental para que los alumnos compartan los conocimientos adquiridos en contexto, consiguiendo de esta forma fomentar la coconstrucción de nuevo conocimiento matemático a través del andamiaje colectivo así como la consolidación de aprendizajes ya adquiridos previamente.

Para lograr estas finalidades, de nuevo es aconsejable establecer un diálogo con los alumnos para que comuniquen lo que han aprendido, procurando en todo momento que utilicen un lenguaje matemático adecuado. Además, para interiorizar los aprendizajes adquiridos en contexto, puede resultar muy eficaz que los alumnos representen gráficamente el trabajo realizado.

Fase 5. Formalización de los aprendizajes adquiridos

Una de las finalidades de las matemáticas es representar de manera simbólica las situaciones concretas de la realidad que nos rodea. Por esta razón, una actividad matemática competencial debería finalizar, a medida que avanzan las posibilidades de representación de los alumnos, con la formalización de los aprendizajes matemáticos adquiridos.

Desde esta perspectiva, los alumnos deben ir adquiriendo progresivamente herramientas que les permitan formalizar los aprendizajes a través del lenguaje escrito en general, y el lenguaje algebraico en particular.

En el diagrama siguiente se representan esquemáticamente las diferentes fases que debería contemplar una buena práctica matemática:



Figura 4. Fases de una actividad matemática competencial (Alsina, en prensa)

Como puede apreciarse, se trata de una secuencia continua de fases en un flujo circular. Ello significa que, una vez finalizada la actividad, el alumno dispondrá de un nuevo aprendizaje que va a servirle de base para emprender un nuevo ciclo. En esta nueva secuencia se planificarán otros aprendizajes para que, desde lo concreto, el alumno pueda conectar con lo formal interiorizado en una práctica matemática anterior, aumentando de esta forma la comprensión del conocimiento matemático.

LA GESTIÓN DE BUENAS PRÁCTICAS EN EL AULA

Diversos estudios han puesto de manifiesto que la práctica docente del maestro determina el aprendizaje que realizan los alumnos. En este sentido, parece evidente que el tipo de gestión de una buena práctica que contemple el ciclo de fases descrito en el apartado anterior requiere un maestro que participe activamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Alsina (en prensa), sugiere que esta participación debería contemplar algunos aspectos básicos como por ejemplo plantear retos a los alumnos que despierten su curiosidad; formular buenas preguntas que lleven a razonar sobre lo que se ha hecho y justificar los resultados; fomentar la comunicación y el uso de lenguaje matemático cada vez más preciso en el aula; tener presente la importancia de la representación; conectar los conocimientos matemáticos entre ellos, etc. En otras palabras, se deberían trabajar de forma explícita los procesos matemáticos descritos por el NCTM (2003): resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación.

Desde este prisma, a continuación se ofrece una síntesis de ideas clave en relación al trabajo sistemático de los procesos matemáticos que pueden servir de orientación para una gestión eficaz de buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil (para una revisión en profundidad, puede consultarse NCTM, 2003; Alsina, 2011, 2014).

Resolución de problemas

La resolución de problemas permite preguntar y responder preguntas dentro de las matemáticas y con las matemáticas (Niss, 2002). Si bien existe un consenso en este sentido, no parece existir el mismo grado de acuerdo respecto al significado y el uso de los problemas en el aula. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la resolución de problemas que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) construir nuevo conocimiento matemático por medio de la resolución de problemas; b) resolver problemas que surgen de las matemáticas y en otros contextos; c) aplicar y adaptar una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas; y d) controlar y reflexionar sobre el proceso de resolver problemas matemáticos.
- Una situación problemática es una situación nueva de la que no se conoce de antemano el método de resolución. Deben distinguirse de los ejercicios de aplicación, en los que se conoce de antemano el método de resolución y sirven principalmente para poner en práctica un conocimiento previamente aprendido.
- La resolución de problemas se puede entender como el marco de aplicación de los diferentes bloques de contenido matemático. Además de considerar los problemas según el contenido, también se pueden interpretar en base al tipo de enunciado (visual o verbal), la finalidad (aprender una estrategia, aplicar una técnica, etc.), o bien la respuesta (abierta, cerrada).
- Se aprende a resolver problemas haciendo, manipulando, simulando, discutiendo, compartiendo, imaginando, observando, visualizando, etc. En el proceso de resolución se tendría que permitir que cada niño utilice la estrategia que se ajuste mejor a sus posibilidades: un dibujo, un esquema, el cálculo mental, la manipulación de un determinado material, etc.
- Una posible secuencia de tipos de problemas en las primeras edades es la siguiente (Alsina, 2006): situaciones reales; situaciones dramatizadas; situaciones manipulativas; una parte del enunciado con material y la otra parte verbal; situaciones gráficas, con imágenes e ilustraciones; enunciado oral-respuesta oral; enunciado oral-respuesta gráfica; enunciado gráfico-respuesta gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta oral o gráfica; introducción al enunciado escrito y la respuesta escrita. Se trata, en definitiva, de partir de lo concreto (situaciones reales) para avanzar progresivamente a lo simbólico (lenguaje escrito).

Razonamiento y prueba

El trabajo sistemático del razonamiento y la prueba es fundamental en todas las edades para que los niños aprendan desde pequeños a razonar (argumentar, explicar, justificar) y probar (en las primeras edades comprobar, más que validar o demostrar) sus acciones y proposiciones, puesto que es el camino necesario para comprender el verdadero significado de las matemáticas. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes al razonamiento y la prueba que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer el razonamiento y la prueba como aspectos fundamentales de las matemáticas; b) formular e investigar conjeturas matemáticas; c) desarrollar y evaluar argumentos y pruebas matemáticas; y d) escoger y usar varios tipos de razonamiento y métodos de prueba.
- En las primeras edades el razonamiento es sobre todo informal y se refiere a la capacidad de explicar, argumentar o justificar las acciones realizadas y las proposiciones, mientras que la prueba implica comprobar el resultado de dichas acciones y proposiciones. Desde este prisma, razonar y comprobar implica argumentar las afirmaciones que se hacen (“¿por qué piensas que es verdad?”); descubrir (“¿qué piensas que pasará ahora?”); justificar proposiciones (“¿por qué funciona esto?”); y hacer razonamientos inductivos, basados en la propia experiencia.

- A medida que los niños avanzan en la escolaridad deberían interiorizar otros tipos de razonamiento propios de las matemáticas: el razonamiento algebraico, por ejemplo al argumentar que el patrón de dos series de cubos “azul-verde” y “rojo-amarillo” es el mismo, y representarlo; el razonamiento geométrico, que se puede iniciar describiendo y comparando propiedades geométricas elementales de formas geométricas que no están físicamente presentes; o los razonamientos estadístico y probabilístico, que en las primeras edades se puede fomentar a través de tareas que impliquen la recogida y organización de datos, la comparación, etc.
- Los proyectos pueden favorecer el razonamiento y la prueba, junto a otras prácticas como las situaciones de experimentación y juego, en contraposición a otras prácticas docentes más descontextualizadas, poco significativas y a menudo orientadas a la adquisición de técnicas y símbolos a través de la repetición y la práctica.
- Una gestión de las prácticas matemáticas que favorezca el razonamiento y la prueba implica plantear buenas preguntas, más que dar explicaciones; favorecer la interacción y el contraste; e incentivar la indagación y el aprendizaje autónomo con la guía del adulto.

La comunicación

Nadie niega que la matemática sea, entre otras cosas, un lenguaje universal que permite comunicarse. Así, pues, los niños que tienen oportunidades y se sienten motivados y apoyados para hablar, escribir, leer y escuchar en las clases de matemáticas se benefician doblemente: comunican para aprender matemáticas y aprenden a comunicar matemáticamente. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay cuatro aspectos referentes a la comunicación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) organizar y consolidar el pensamiento matemático a través de la comunicación; b) comunicar el pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, maestros y otras personas; c) analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los otros; y d) usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas con precisión.
- El lenguaje oral y escrito son herramientas imprescindibles (y previas al lenguaje simbólico) para desarrollar y comunicar el pensamiento matemático, ya que favorecen la comprensión del conocimiento y la estructuración del pensamiento.
- La comunicación se tiene que distinguir de la información: informar implica transmitir en sentido unidireccional desde un emisor hacia un receptor; en cambio comunicar implica interactuar en sentido bidireccional dos o más personas.
- El trabajo sistemático de la comunicación en el aula de matemáticas requiere integrar los procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los contenidos matemáticos y su gestión, puesto que los niños a menudo interpretan las normas establecidas de maneras diferentes, y muy a menudo también estas interpretaciones difieren de las que los maestros esperan.
- A nivel curricular se insiste en la necesidad de plantear buenas preguntas para favorecer la comunicación, sin embargo ha habido escasas aportaciones sobre qué características debería tener una buena pregunta, qué tipos de preguntas se tendrían que formular y cómo se tendrían que formular para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático. Las buenas preguntas para enseñar matemáticas, de acuerdo con Sullivan y Lilburn (2002), tienen tres características: a) más que recordar un hecho o reproducir una acción, requieren

comprensión de la tarea, aplicación de técnicas y estrategias y análisis y síntesis de los conceptos implicados; b) permiten que los niños aprendan respondiendo preguntas, y que los maestros aprendan a partir de las respuestas de los niños; y c) permiten diversas respuestas aceptables.

Las conexiones

Se refieren a las relaciones entre los diferentes bloques de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (intradisciplinariedad); las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento (interdisciplinariedad); y las relaciones de las matemáticas con el entorno que nos rodea. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a las conexiones que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas; b) comprender cómo las ideas matemáticas se interconectan y construyen una sobre otras para producir un todo coherente; c) reconocer y aplicar las matemáticas en contextos no matemáticos.
- Las conexiones entre los diferentes bloques de contenido matemático ponen de manifiesto que las matemáticas no son una colección fragmentada de bloques de contenido, aunque con frecuencia se dividen y presentan así, sino que constituyen un campo integrado de conocimiento. Hay unas mismas estructuras matemáticas que se repiten: identificar (definir o reconocer); relacionar (comparar); y operar (transformar), lo único que varía es el tipo de contenido.
- Las conexiones entre los contenidos y los procesos matemáticos evidencian que no son conocimientos independientes de una misma disciplina sino que se interrelacionan, se retroalimentan para favorecer la competencia matemática.
- Las conexiones entre las matemáticas y las otras áreas de conocimiento ponen de manifiesto la relevancia de trabajar las matemáticas en conexión con el arte, por ejemplo, trabajando las matemáticas a partir de pinturas y esculturas; con la música, trabajando a partir de canciones; con la psicomotricidad, trabajando aspectos diversos relativos a la orientación y la estructuración espacial, etc.
- Las conexiones entre las matemáticas y el entorno evidencian que el uso de contextos de vida cotidiana puede contribuir a comprender el papel social de las matemáticas, al fomentar el uso de las matemáticas en contextos no exclusivamente escolares.

La representación

Las representaciones se refieren a las formas de representar las ideas y procedimientos matemáticos, como por ejemplo imágenes, materiales concretos, tablas, gráficos, números, letras, entre otras. Muchas de las representaciones que existen actualmente son el resultado de una construcción cultural, que llevó muchos años determinar. Cuando los niños comprenden las representaciones matemáticas que se les presenta y además tienen oportunidades de crear otras, mejoran su capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. La representación es, pues, un proceso indispensable para poder aprender. Si no hay representación del conocimiento no hay aprendizaje. Algunas ideas clave que deberían considerarse son:

- Hay tres aspectos referentes a la representación que se deberían trabajar en el aula (NCTM, 2003): a) crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas; b) seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver

problemas; y c) usar representaciones por modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

- La representación de las ideas y procedimientos matemáticos puede tener formas diversas en las primeras edades, por ejemplo a través de objetos físicos (una pieza con forma de triángulo), el lenguaje natural (la palabra “triángulo”), dibujos (triángulos de diferentes características), y símbolos convencionales (un triángulo equilátero).
- El desarrollo progresivo de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos va de lo concreto a lo abstracto (Freudenthal, 1991). En este sentido, se respeta y favorece su proceso de adquisición cuando se fomenta por ejemplo que las primeras representaciones sean concretas, a partir de objetos o dibujos y usando el lenguaje natural; posteriormente pictóricas, usando tablas o diagramas; y finalmente convencionales, usando símbolos abstractos.
- La adquisición progresiva de la representación de las ideas y procedimientos matemáticos aumenta la capacidad para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. En otras palabras, permite hacer modelos e interpretar la realidad. Un modelo es, pues, una representación ideal de un aspecto concreto de la realidad usada con finalidades de interpretación.
- Pueden usarse distintos tipos de modelos: a) modelos manipulables (materiales físicos con los que trabajan los niños, como por ejemplo una regleta que representa el número cinco); b) modelos ejemplificadores o simuladores (por ejemplo el dibujo de un itinerario que puede hacer un niño, o en términos más complejos, el plano esquemático de la red del metro de una gran ciudad).

UN EJEMPLO DE BUENA PRÁCTICA EN EDUCACIÓN INFANTIL

Se muestra la propuesta “Rotondas”, que incluye varias tareas. Esta actividad se desarrolló en la Escuela Balandrau (Girona), en el aula de 5-6 años de la maestra Fátima Dalmau, responsable de la implementación y documentación.

Alrededor de la escuela Balandrau hay varias rotondas, y desde el patio se ven circular los vehículos que pasan. Ello genera gran curiosidad a los alumnos, por lo que se establece un diálogo en el aula sobre los tipos de vehículos que pasan por la rotonda (coches, camiones, furgonetas, bicicletas, *skaters*, tractores, etc.). En el marco de este diálogo se pregunta a los alumnos qué vehículos circulan con mayor frecuencia por la rotonda, de manera que la primera tarea consiste en contar los vehículos que pasan durante una cantidad determinada de tiempo.



Figuras 5-6. Recuento del número de vehículo que pasan por la rotonda

Los alumnos, por grupos, van contabilizando los diferentes tipos de vehículos que circulan por la rotonda: coches, motos, bicicletas, etc. Cada grupo se responsabiliza de un tipo de transporte y va registrando los datos (marcando una cruz o un palito cada vez que pasa un vehículo). Los datos recogidos se ponen en común en una tabla:



Figura 7. Frecuencias absolutas del número de vehículos que pasan por la rotonda

Una vez recogidos y organizados los datos en la tabla, se propone una nueva tarea a los alumnos que consiste en representar los datos obtenidos usando materiales. Cada grupo de trabajo puede escoger libremente el material a partir del cual considera que es mejor representar los datos obtenidos: piezas de madera, etc.



Figuras 8-10. Representación horizontal con piezas de madera

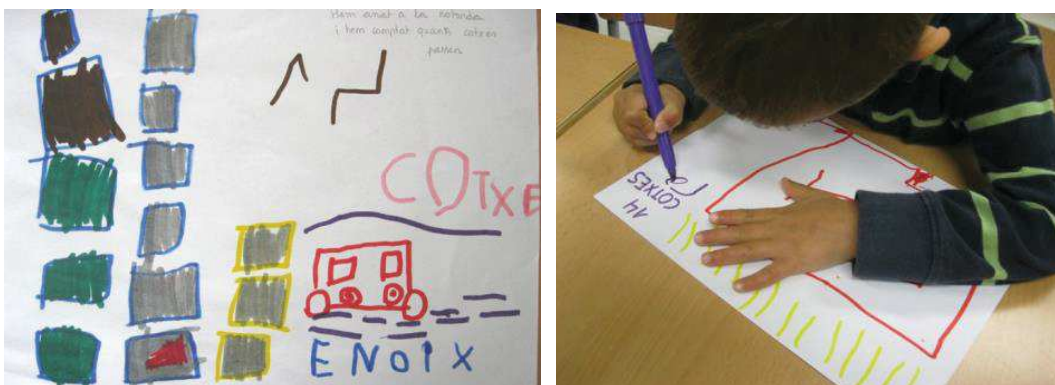


Figuras 11-12. Representación vertical con piezas de madera



Figuras 13-14. Representación con otros materiales

Posteriormente se invita a los alumnos a representar en el papel los datos obtenidos:



Figuras 15-16. Representaciones en el papel

Una vez finalizada la representación se hace una puesta en común. La maestra formula preguntas y los alumnos van interviniendo para explicar lo que han aprendido.

En síntesis, considerando la fundamentación teórica descrita y las fases para el diseño de una buena práctica matemática, en la propuesta anterior se realiza una planificación previa de los contenidos a trabajar en el contexto de aprendizaje (numeración y estadística principalmente) y se decide a través de qué procesos se van a trabajar (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación). Ello conlleva que durante toda la secuencia se lleve a cabo un tipo de gestión que prioriza el planteamiento de preguntas más que las explicaciones; la coconstrucción y reconstrucción de conocimientos matemáticos a partir de la interacción, la negociación y el diálogo; la representación de las ideas matemáticas usando diferentes recursos; etc.

El hecho de plantear la propuesta a partir de un interés natural de los niños en un contexto de su vida cotidiana puede haber contribuido, entre otros aspectos, a propiciar el interés por las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social.

LA EVALUACIÓN DE BUENAS PRÁCTICAS EN EL AULA

La evaluación de prácticas docentes que incorporen los procesos matemáticos de forma sistemática como herramientas para trabajar los diferentes contenidos requiere elaborar indicadores de referencia que permitan analizar la presencia (o no) de los procesos en dichas prácticas. Desde este punto de vista, Coronata (2014) y Alsina y Coronata (2014) han elaborado y analizado la validez de un instrumento de evaluación que incluye cinco categorías que se corresponden con los cinco procesos indicados por el NCTM (2003). El diseño, construcción y validación del instrumento contempló seis fases: 1) análisis histórico-epistemológico de los procesos matemáticos y sus

significados; 2) estudio de investigaciones sobre los procesos matemáticos en las prácticas docentes del profesorado de Educación Infantil; 3) análisis del tratamiento otorgado a los procesos matemáticos en el currículo; 4) construcción de la versión piloto del instrumento; 5) revisión mediante el juicio de expertos; y 6) construcción de la versión final del instrumento. Las fases 1, 2 y 3 consideran la revisión de literatura e investigaciones que permiten diseñar el instrumento, mientras que las fases 4, 5 y 6 se relacionan específicamente con la construcción y validación del instrumento.

Posteriormente se ha analizado la fiabilidad del instrumento (Maurandi, Alsina y Coronata, en revisión). La presencia de cada indicador se mide con una escala tipo Likert que va de 1 (ausencia) a 5 (presencia):

Tabla 1. Pauta de evaluación de la presencia de los procesos matemáticos en la práctica docente

| 1. Indicadores de RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| Plantea situaciones problemáticas usando diferentes tipos de apoyo (oral, concreto, pictórico). | | | | | |
| Contextualiza las situaciones problemáticas a la vida cotidiana de los alumnos. | | | | | |
| Propone situaciones problemáticas de diversos tipos. | | | | | |
| Realiza preguntas que generan la investigación y exploración para solucionar al problema. | | | | | |
| Permite a los niños la utilización de material concreto y/o pictórico con apoyo oral para la resolución de problemas. | | | | | |
| Mantiene a los niños comprometidos con el proceso de resolución de problemas. | | | | | |
| Promueve la discusión en torno a las estrategias de resolución de problemas y los resultados. | | | | | |
| 2. Indicadores de RAZONAMIENTO Y PRUEBA: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Invita a hacer conjeturas. | | | | | |
| Permite que los propios alumnos descubran, analicen y propongan diversas vías de resolución. | | | | | |
| Pide a los alumnos que expliquen, justifiquen o argumenten las estrategias o técnicas que utilizaron durante la resolución. | | | | | |
| Plantea interrogantes para que los alumnos argumenten sus respuestas. | | | | | |
| Promueve que los alumnos comprueben conjeturas de la vida cotidiana. | | | | | |
| Promueve el apoyo del razonamiento matemático. | | | | | |
| Entrega retroalimentación con material concreto permitiendo el pensamiento divergente. | | | | | |
| 3. Indicadores de CONEXIONES: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Considera las experiencias matemáticas cotidianas de los alumnos para avanzar hacia las matemáticas más formales. | | | | | |
| Realiza conexiones entre diversos contenidos matemáticos. | | | | | |

| | | | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| Desarrolla actividades matemáticas vinculadas a contextos musicales. | | | | | |
| Trabaja las matemáticas vinculándolas con la literatura infantil. | | | | | |
| Relaciona las matemáticas con la expresión artística. | | | | | |
| Genera conocimiento matemático a través de contextos vinculados a la psicomotricidad. | | | | | |
| Promueve que los alumnos apliquen el conocimiento matemático a las situaciones de la vida cotidiana. | | | | | |
| 4. Indicadores de COMUNICACIÓN: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Promueve con mayor énfasis la comunicación en el aula que la entrega de información unidireccional. | | | | | |
| Favorece la interacción con otros para aprender y comprender las ideas matemáticas. | | | | | |
| Impulsa el intercambio de ideas matemáticas a través del lenguaje oral, gesticular, gráfico, concreto y /o simbólico. | | | | | |
| Pide al niño explicitar con lenguaje matemático adecuado sus estrategias y respuestas. | | | | | |
| Incentiva en los alumnos el respeto por la forma de pensar y de exponer sus puntos de vista en torno al contenido matemático. | | | | | |
| Fomenta la escucha atenta de los puntos de vista de los demás. | | | | | |
| Interviene mayoritariamente a través de preguntas, más que a través de explicaciones. | | | | | |
| 5. Indicadores de REPRESENTACIÓN: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Pide a los niños que hablen, escuchen y reflexionen sobre las matemáticas para avanzar hacia la representación simbólica. | | | | | |
| Utiliza materiales concretos como recursos para representar ideas matemáticas. | | | | | |
| Utiliza modelos ejemplificadores (esquemas, entre otros) para mostrar maneras de resolver situaciones problemáticas. | | | | | |
| Trabaja en los niños las representaciones concretas (dibujos, etc.). | | | | | |
| Trabaja en los niños las representaciones pictóricas (signos, etc.). | | | | | |
| Trabaja en los niños las representaciones simbólicas (notación convencional). | | | | | |
| Muestra un trabajo bidireccional (de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto a lo concreto). | | | | | |

Para realizar el análisis, se realizan 95 entrevistas a maestros. Los datos obtenidos se han analizado con el paquete estadístico de R Core Team (2014) R versión 3.1.0 sobre una plataforma i686-pc-linux-gnu (32-bit). Se ha empleado el paquete psych (Revelle, 2015) para el cálculo del coeficiente alfa de Cronbach.

Tabla 2. Alfas de Cronbach estandarizadas para los procesos matemáticos

| Proceso matemático | alfa-std |
|-------------------------|----------|
| Resolución de problemas | 0.86 |
| Razonamiento y prueba | 0.88 |
| Conexiones | 0.82 |
| Comunicación | 0.81 |
| Representación | 0.79 |

El coeficiente alfa de Cronbach, basado en puntuaciones estandarizadas, más bajo obtenido corresponde al quinto proceso “Representación”, con un valor de 0.79 que según el criterio de George y Mallery (2006), se puede valorar como una consistencia interna aceptable. En general, siguiendo los parámetros de estos mismos autores, la valoración media de la consistencia interna es buena.

Estos valores de los coeficientes de alfa de Cronbach obtenidos permiten afirmar que todos los ítems están relacionados significativamente con aquellos contruidos para evaluar la misma faceta del factor, por lo que forman parte del mismo constructo. Así, pues, en estas circunstancias el cuestionario descrito constituye una herramienta base para medir la presencia o ausencia de los procesos matemáticos en la práctica docente.

Referencias

- Alsina, Á. (2006). *Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.
- Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á. (2011). *Aprender a usar les matemàtiques. Els processos matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil*. Vic: Eumo Editorial.
- Alsina, Á. (2013). Early Childhood Mathematics Education: Research, Curriculum, and Educational Practice. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 100-153.
- Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números* 86, 5-28.
- Alsina, Á. (en prensa). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Epsilon*.
- Alsina, Á. y Coronata, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 21-34.
- Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria*. Girona: Universidad de Girona. Tesis Doctoral
- EACEA P9 Eurydice (2011). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Madrid: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- George, D. y Mallery, P. (2006). *Spss for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 13.0 Update* (6ª ed.). Boston: Pearson Education, Inc.
- Gómez, P., Cañadas, M.C., Bracho, R., Restrepo, A.M. y Aristizábal, G. (2011). Análisis temático de la investigación en Educación Matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 371-382). Ciudad Real: SEIEM.
- Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2008). Juanito tiene cero naranjas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 403-414). Badajoz: SEIEM.
- Maurandi, A., Alsina, Á. y Coronata, C. (en revisión). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación.
- Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes*. Barcelona: Paidós.
- NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la educación infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 1-23.
- NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.
- Planas, N. y Alsina, A. (2014). Epílogo. En N. Planas y A. Alsina (2009), *Educación matemática y buenas prácticas* (pp. 265-272). Barcelona: Graó (2ª edición).
- Price, M.H. (1986). The Perry Movement in school mathematics. En M. H. Price (Ed.), *The development of the secondary curriculum* (pp. 7-27). Londres: Croom Helm.
- R Core Team (2014). *R: A language and environment for statistical computing*. Viena: R Foundation for Statistical Computing. Recuperado de: <http://www.R-project.org>.
- Revelle, W. (2015). *Psych: Procedures for Personality and Psychological Research*. Evanston, Illinois: Northwestern University. Recuperado de: <http://CRAN.R-project.org/package=psych>
- Sierra, T.A. y Gascón, J. (2011). Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 125-163). Ciudad Real: SEIEM.
- Sullivan, P. y Lilburn, P. (2002). *Good questions for Math Teaching*. Australia: Oxford University Press.