FORMAS DE CONSTRUIR EL CONCEPTO DE FUNCIÓN INTEGRAL: DOS ESTUDIOS DE CASO

Ways to build the concept of integral function: two case studies

Aranda, C.[a] y Callejo, M. L.[b]

[a]I.E.S. Número 3 La Vila Joiosa, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Este trabajo forma parte de otro más amplio sobre la integral definida. El objetivo del estudio que se presenta es caracterizar cómo estudiantes de Bachillerato construyen el concepto de función integral en el contexto de un experimento de enseñanza diseñado según una trayectoria hipotética de aprendizaje y utilizando applets. De los quince estudiantes que participaron en el experimento de enseñanza se han seleccionado dos parejas que se encuentran en distintos momentos del proceso de abstracción reflexiva (proyección y reflexión) para hacer un estudio de casos. Los resultados indican dos características: identificar la relación entre un extremo de un intervalo y el valor del área bajo una recta en dicho intervalo, que es una forma de covariación simple; y ver la covariación compleja de las tres cantidades que varían simultáneamente y que intervienen en el concepto de función integral, es decir, la variable x, x ∈ [a, b], una función f(t), t ∈ [a, x] y la función integral $F(x) \; = \int_a^x f(t)$*, en casos sencillos.*

Palabras clave: *función integral, experimento de enseñanza, trayectoria hipotética de aprendizaje, razonamiento covariacional*

Abstract

This study is part of a research focused on the definite integral. The aim is to characterize how high school students build the integral function concept in the context of a teaching experiment designed according to a hypothetical learning trajectory and using applets. It has been chosen two couples of students that have participated and shown different moments of reflective abstraction, to do a study of cases. Our results indicated two characteristics: identifying the relationship between a bound of an interval and the value of the area under a straight line belonging to this interval, which is a way of a simple covariation; and identifying the complex covariation of the three quantities which vary simultaneously and which are involved in the concept of the integral function, that is to say, the variable x, x ∈ [a, b], a function f(t), t ∈ [a, x] and the integral function $F(x) \; = \int_a^x f(t)$*,in simple cases.*

Keywords: *integral function, teaching experiment, hypothetical learning trajectory, covariational reasoning*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje del Cálculo ha sido objeto de debate e investigación en las últimas décadas (Azcárate, Camacho-Machín, González y Moreno, 2015). Algunas investigaciones han puesto de relieve la importancia del *razonamiento covariacional* para comprender los conceptos fundamentales del Cálculo como límite, función derivada o función integral. Este tipo de razonamiento ha sido definido como *"las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables mientras se atiende a las formas en que cambian unas en relación a otras*" (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu, 2002, p. 354). En el caso de la función integral Kouropatov y Dreyfus (2014) entienden que para comprender su significado es necesario considerar

Aranda, C. y Callejo, M. L. (2016). Formas de construir el concepto de función integral: Dos estudios de caso. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 147-156). Málaga: SEIEM.

simultáneamente tres objetos matemáticos: x, $f(t)$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, con $x \in [a, b]$ y $t \in [a, x]$, y entender cómo varía f en función de t y cómo varía F en función de x, es decir, la variación de la integral definida cuando x recorre el intervalo $[a, b]$, para lo cual es necesario el *razonamiento covariacional complejo*, pues hay que considerar cómo cambia cada uno de los objetos implicados en relación a los otros dos. En el caso en que solo se ponen en relación dos variables se habla de *razonamiento covariacional simple*.

Por otra parte se subraya la importancia de la comprensión conceptual de los conceptos del Cálculo, más allá de la manipulación simbólica. Para ello se propone proporcionar contextos de aprendizaje donde se trabaje simultáneamente con distintos tipos de representaciones con el apoyo de la tecnología (Hong y Thomas, 1997). Berry y Nyman (2003) investigaron sobre la relación entre el gráfico de la derivada de una función y el de la función. Sus resultados manifestaron que al comienzo de la actividad los estudiantes mostraban una visión algebraica del Cálculo y tuvieron dificultad para relacionar la gráfica de una función derivada y la función original, pero el uso de la tecnología permitió desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Cálculo. Camacho, Depool y Santos-Trigo, (2010) mostraron que la utilización de actividades programadas con las utilidades que ofrecen las tecnologías permiten un cierto progreso en el uso de aspectos gráficos y numéricos del concepto de integral definida, sin embargo, aunque Camacho y Depool (2003) encontraron que algunos alumnos manejaban varias representaciones semióticas, la mayoría tendían a utilizar un único sistema de representación.

El trabajo que aquí presentamos forma parte de otro más amplio sobre la construcción del concepto de integral definida. Nos centraremos en la parte de la construcción de la función integral. Nuestro objetivo es:

> Caracterizar cómo estudiantes de Bachillerato construyen el concepto de función integral en el contexto de un experimento de enseñanza utilizando *applets*.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco teórico para analizar cómo estudiantes de Bachillerato construyen la función integral es el *mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto* (Simon et al., 2004). Este mecanismo trata de describir la construcción de un nuevo concepto intentando operativizar la "transposición a un plano superior" y la "reconstrucción" a las que hace referencia Piaget para explicar el proceso de abstracción. Para ello ofrece "lentes teóricas" con el fin de analizar los conocimientos disponibles de los estudiantes y cómo los utilizan para construir nuevos conceptos.

Tzur y Simon (2004) han identificado dos fases en la elaboración de un nuevo concepto: la de *participación*, entendida como el proceso donde el alumno abstrae una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto producido, y la de *anticipación* que se refiere al uso de la regularidad abstraída en situaciones distintas a las que se llevó a cabo la abstracción. Roig (2008) ha identificado tres momentos en la fase de participación: *proyección*, *reflexión* y *anticipación local*. En el de *proyección* los alumnos construyen un conjunto de registros o unidades de experiencia, en el de *reflexión* abstraen la regularidad a partir de la información procedente del conjunto de registros, y en la de *anticipación local* aplican la regularidad identificada (la concepción matemática que organiza la situación) a nuevos casos particulares. Roig considera, en términos del mecanismo *reflexión sobre la relación actividad-efecto*, que "las acciones propias de la fase de proyección están anidadas en la coordinación de información que caracteriza la reflexión" (2008, p. 228), pues se produce en forma paralela a la generación de casos particulares.

Por otra parte los experimentos de enseñanza constructivista (Gravemeijer, 2004) contemplan Ciclos de Enseñanza de las Matemáticas (Simon, 1995) que comprenden: el conocimiento del profesor, las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* y la evaluación del conocimiento de los estudiantes; la evaluación proporciona nuevo conocimiento al profesor y cierra un ciclo de enseñanza. Para generar una trayectoria hipotética de aprendizaje es necesario conocer los conceptos previos de los estudiantes y tener presente los objetivos de aprendizaje, las tareas matemáticas que se usan para fomentar el aprendizaje y las hipótesis sobre el proceso de aprendizaje en el contexto de un conjunto particular de tareas. Estos dos últimos puntos son interdependientes y ahí entra en juego la manera en que se caracteriza el *mecanismo reflexión sobre la relación actividad-efecto*, porque se plantea la necesidad de seleccionar aquellas tareas que, desde las *actividades* disponibles para los alumnos, sean la base del aprendizaje pretendido (Simon y Tzur, 2004).

Para favorecer la construcción de los conceptos del Cálculo se propone el uso de la tecnología como instrumento de mediación semiótica (Ferrara, Pratt y Robutti, 2006), para representar estos conceptos en forma numérica, gráfica y algebraica. Estas representaciones no son meras ilustraciones de los conceptos, pues la tecnología permite "actuar" sobre ellas. Entre estas tecnologías se encuentra el uso de *applets* diseñados ad hoc, que se manejan con facilidad y realizan tareas específicas como por ejemplo visualizar una función y su función integral simultáneamente de forma que moviéndose sobre el gráfico de la función se va generando el gráfico de la función integral; la gráfica de la función integral se construye así de forma dinámica lo que permite constatar la relación entre una función y su función integral. Al mismo tiempo pueden aparecer en pantalla las coordenadas del punto que se "mueve" sobre el gráfico de la función y la expresión analítica de la función y su función integral.

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 15 estudiantes de 2º de Bachillerato (17-18 años) de la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud que participaron en un experimento de enseñanza. Se formaron 6 parejas y un trío agrupados por similar nivel académico. Estos alumnos habían estudiado en 1er curso el concepto de límite de una función en un punto con un enfoque procedimental y en 2º curso el concepto de derivada usando *applets* diseñados *ad hoc*. El papel de la profesora fue guiar a los estudiantes, aclarar dudas y moderar una puesta en común de cada sesión. Aquí presentamos dos estudios de caso de estudiantes que se encuentran en distintos momentos de la fase de participación.

La secuencia didáctica del experimento de enseñanza plantea el estudio de la integral definida a partir del cálculo del área de una superficie bajo una curva (Turégano, 1998) y se articula de la siguiente manera:

1. Cálculo del área del círculo por el método de "agotamiento".
2. Aproximación del área de superficies bajo una curva mediante suma de áreas de rectángulos.
3. Diferencia entre área bajo una curva en un intervalo e integral definida de la función definida por la curva en dicho intervalo: Definición de la integral definida.
4. Propiedades de la integral.
5. Introducción de la función integral, del teorema fundamental del Cálculo y la regla de Barrow.

En esta comunicación nos centramos en la introducción de la función integral. Los estudiantes resolvieron dos tareas que se presentan más adelante, a las que podían responder con la ayuda de *applets* diseñados ad hoc.

Trayectoria hipotética de aprendizaje de la construcción del concepto de función integral

La Figura 1 muestra la trayectoria hipotética de aprendizaje de la construcción de la función integral en relación a los momentos de la fase de participación. Nuestra hipótesis es que los estudiantes, tras familiarizarse con un applet dando valores a los parámetros *m*, pendiente, y *n*, ordenada en el origen de una recta de ecuación $y=mx+n$, y calcular el área bajo la recta en un intervalo fijo $[a,\ t]$, experimentarán variando el extremo *t* del intervalo en casos particulares (con funciones constantes, lineales y afines), para obtener la función que expresa el valor del área bajo la recta. Esto les permitirá *relacionar* una función y su función integral e *inferir* que la función integral de una función representada por una recta es una función polinómica de grado 1 ó 2, *coordinando* así las representaciones geométricas (gráficas de las rectas y de la función integral) y algebraicas de una función y su función integral (ecuaciones de las rectas y de su función integral). Esto les permitirá aplicar las regularidades observadas a nuevas situaciones.

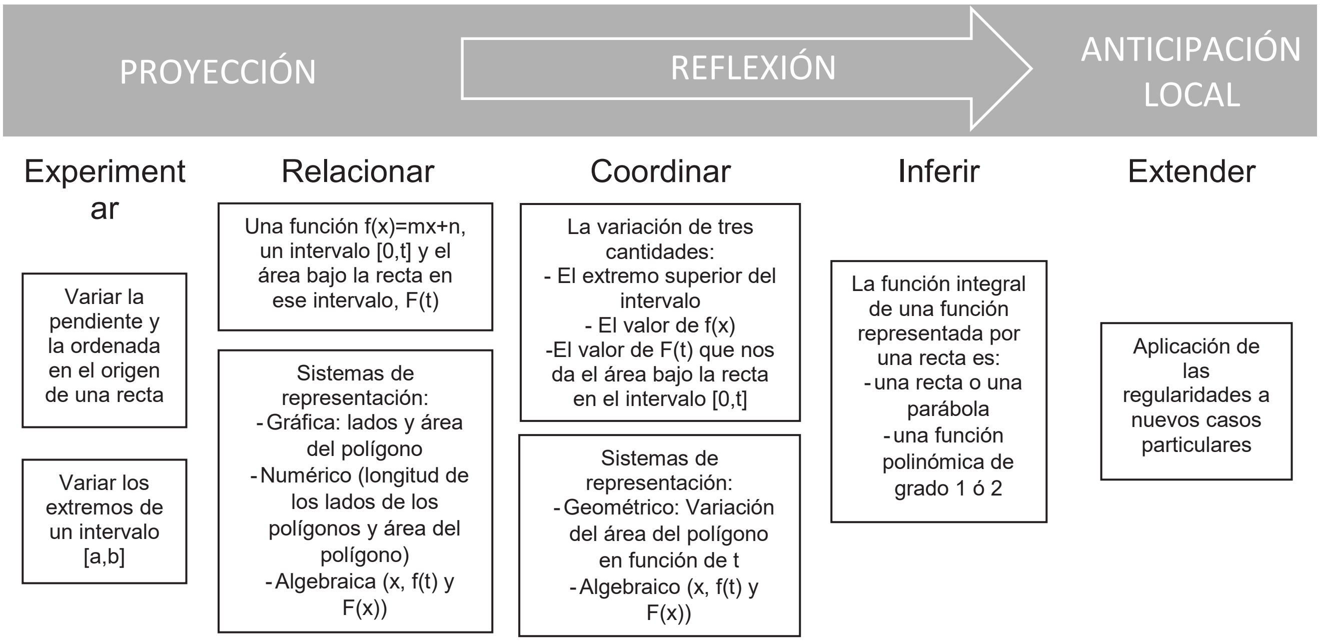


Figura 1. Trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción de la función integral, basada en los momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva

Se propusieron dos tareas con el objetivo de que los estudiantes generasen un conjunto de registros de experiencia de la relación entre una función y su función integral. El objetivo de la primera tarea (Función Integral I) era que los estudiantes llegaran a expresar la relación entre una función constante, lineal o afín y su función integral; para ello disponían de una guía de trabajo (Figura 2) y se podían apoyar en un *applet* donde podían modificar los parámetros *m* y *n* de una recta de ecuación $y=mx+n$ mediante deslizadores y los extremos de un intervalo $[a,\ t]$, lo que les permitía visualizar los polígonos cuya área debían calcular. En la segunda tarea (Función Integral II; Figura 3) se pedía dibujar las gráficas de las funciones que representan el área bajo una recta en un intervalo donde la función es positiva; los estudiantes podían verificar el resultado con ayuda de un *applet* que representaba la función integral de estas rectas (Figura 4).

Recogida y análisis de datos

Los datos son las acciones realizadas por los estudiantes con los *applets* en la resolución de las dos tareas, las declaraciones orales de las parejas o trío, que fueron registradas en archivos digitales, y las hojas de respuesta. Para analizarlos primero se hizo la trascripción de las comunicaciones orales y las acciones realizadas con los *applets*. Se consideró como unidad de análisis cada una de las acciones o declaraciones -orales o escritas- de los estudiantes. Después se codificó cada unidad de análisis teniendo en cuenta las acciones realizadas por los estudiantes (experimentar, relacionar, inferir, coordinar y extender) y los distintos momentos de la fase de participación en el proceso de abstracción reflexiva (*proyección*, *reflexión* o *anticipación local*; Figura 1). Dos investigadores codificaron por separado las acciones y momentos y discutieron las discrepancias. Por último se hizo la descripción de las trayectorias de aprendizaje a través de las acciones realizadas y los distintos momentos de la fase de participación, y se agruparon las parejas de estudiantes dependiendo del momento de la fase de participación en que se encontraban.

Función integral I

I. Cuando **a**=0 y **t**=2, cambiando el valor de **m** y **n** en los deslizadores justifica que el área del cuadrilátero es la que se indica,
 - en el caso de rectángulos (**m**=0)
 - en el caso de triángulos (**n**=0)
 - en el caso de trapecios (**m**≠0 y **n**≠0)

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si **m**=0, **n**=2
- Si **m**=2, **n**=0
- Si **m**=1, **n**=2

III. Comprueba la validez de las fórmulas cambiando el valor de t y sustituyendo en las fórmulas obtenidas.

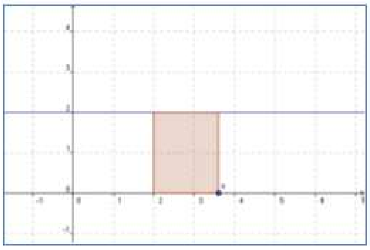
IV. ¿Qué ocurre si para un valor de **m** y **n** dados, manteniendo fijo t, cambiamos el valor de **a**?

Figura 2. Guía de trabajo de la tarea 'Función Integral I'

Función integral II

Dibuja, aproximadamente, las gráficas de la funciones F_I y F_{II} que nos ofrezcan el valor del área bajo cada una de las gráficas siguientes desde 2 hasta x (para valores comprendidos entre 2 y 5)

I.



II.

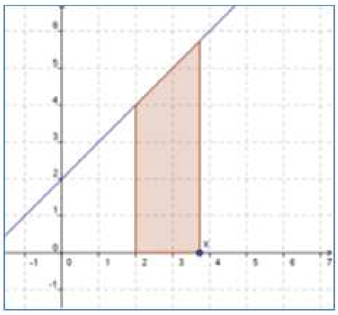


Figura 3. Tarea 'Función Integral II'

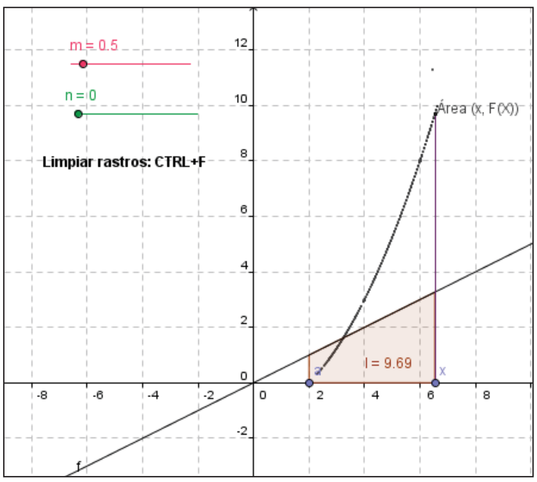


Figura 4. Applet para comprobar los resultados obtenidos en 'Función integral II'

RESULTADOS

Presentamos el estudio de un trío y una pareja de estudiantes que muestran dos maneras de construir el concepto de función integral:

1. Sin evidencias de construcción de la función integral.
2. Construcción del concepto de función integral en casos particulares.

El trío 1 (V-AV-AJ) se sitúa en el momento de *proyección* pues fue capaz de calcular el área bajo una recta en un intervalo fijo, pero no de relacionar como varía el área en función del extremo t variable del intervalo y del valor de $f(x)$, $x \in [a,t]$.

Para responder a la tarea Función Integral I, los estudiantes necesitan identificar tres objetos matemáticos, ya sea de manera gráfica (el lado horizontal de un polígono sobre el eje de abscisas, el lado vertical perpendicular al anterior en el extremo derecho y la superficie del polígono), de manera numérica (longitud del lado horizontal y del lado vertical y valor del área del polígono) o en forma algebraica (t, $f(x) = mx+n$ donde $x \in [a,t]$, y la función que expresa el valor del área del polígono en función de t) y cómo varían unos en relación a otros.

Este trío visualizó los polígonos con ayuda del *applet* y expresó su área mediante fórmulas en función de los parámetros m y n de una recta de ecuación $y=mx+n$ y del extremo t del intervalo, siendo t fijo (bloque I). Cuando se le pidió una fórmula del área para cualquier valor de t (bloque II) escribieron las fórmulas que expresan las áreas de los polígonos e interpretaron cada una de ellas no como una función sino como un objeto matemático donde hay que dar valores a las variables, como se muestra en la siguiente respuesta (Figura 5), donde dan a t los valores 7 y 3.

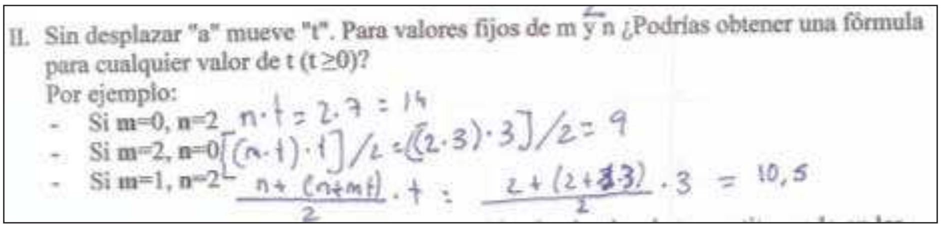

II. Sin desplazar "a" mueve "t". Para valores fijos de m y n ¿Podrías obtener una fórmula para cualquier valor de t (t ≥0)?
Por ejemplo:
- Si m=0, n=2 $n \cdot t = 2 \cdot 7 = 14$
- Si m=2, n=0 $[(n \cdot t) \cdot t]/2 = [(2 \cdot 3) \cdot 3]/2 = 9$
- Si m=1, n=2 $\frac{n+(n+mt)}{2} \cdot t = \frac{2+(2+3)}{2} \cdot 3 = 10,5$

Figura 5. Respuesta del trío V-AV-AJ a la tarea "Función Integral I"

Esto lo expresaron en el caso en que m=2, n=0 diciendo:

> [218] AV: *t* por *m*, o sea *m* por *t*, por *t* partido 2. Es igual a 2 por 3 por 2, no, 2 por 3 por 3, igual a 6 por 3, 18, partido 2, 9.

Esta pareja no fue capaz de atender a la coordinación de tres cantidades variables (el extremo superior t del intervalo, el valor de $f(x)$ y el valor del área bajo la recta en el intervalo $[0, t]$) y cómo varían unas en relación a las otras, por ello consideramos que se sitúan en el momento de *proyección*.

En cambio la pareja 2 (L-M), además de visualizar los polígonos en los bloques I, II y III, relacionó una función constante, lineal o afín y la función integral, y expresó esta relación gráfica y/o analíticamente. La forma en que esta pareja expresó el área de las superficies bajo las rectas en función de t sin darle un valor particular, es una evidencia de que sabía establecer una relación funcional entre el extremo t variable de un intervalo, la función $f(x) = mx+n$ y el área bajo la recta en el intervalo $[0, t]$ y expresarla analíticamente en función de la variable t, y de los parámetros m y n. Este comportamiento podemos considerarlo como una primera aproximación al concepto de función integral.

En segundo lugar, en la tarea Función Integral II esta pareja fue capaz de representar gráficamente la función integral de una función constante y afín (Figuras 6 y 7). Cuando se le pidió que representara gráficamente la función que expresa el valor del área bajo la gráfica de una función constante en el intervalo [$2, x$] comenzó apoyándose en un resultado obtenido anteriormente (el área bajo una recta de ecuación $y=mx+n$ en el intervalo [$0, t$] es $(2n+mt)t/2$), y sustituyó los parámetros n y m por sus valores (n=2, m=0) y t por x; así obtuvo $f(x) = 2x$, pero comprobó dando valores que la expresión no era correcta -debido a que el extremo izquierdo no era 0- y tanteó cuál debería ser la expresión analítica, como muestra el siguiente diálogo:

[255] L: 4-2, sería x-2, 2 por x-2

[256] M: ¿Por qué es menos?

[257] L: Pero es que si la x fuera 4, el área de esto sería 4-2, 2, por 2 [se están refiriendo a la base, 4-2, por altura, 2], 4.

[258] M: Ah, es que pone desde 2, entonces si pone desde 2, empezaría aquí.

[259] L: x-2.

[260] M: Claro, menos 2. Pero por menos 2 detrás, 2 por -2.

[261] L: ¿Pero no es 2 por x-2? Es que no es lo mismo 2x-2 que 2 por x-2.

Y siguió discutiendo cuál era la forma correcta, dando valores a x, lo que es una muestra de *razonamiento covariacional complejo*, atendiendo a la coordinación de tres cantidades variables (el extremo superior x del intervalo, el valor de la función $y=2$, y el valor del área bajo la recta en el intervalo [$2, x$]) y cómo varía una en relación a las otras:

[274] M: Entonces llegaría aquí. En 2 sería cero, en 3 habría subido al 2 ¿no? En 3 habría subido hasta aquí y sería 2 por 1.

[275] L. ¿La tengo que dibujar?

[276] M: Sí, tiene que pasar de ahí y tiene que llegar hasta ahí.

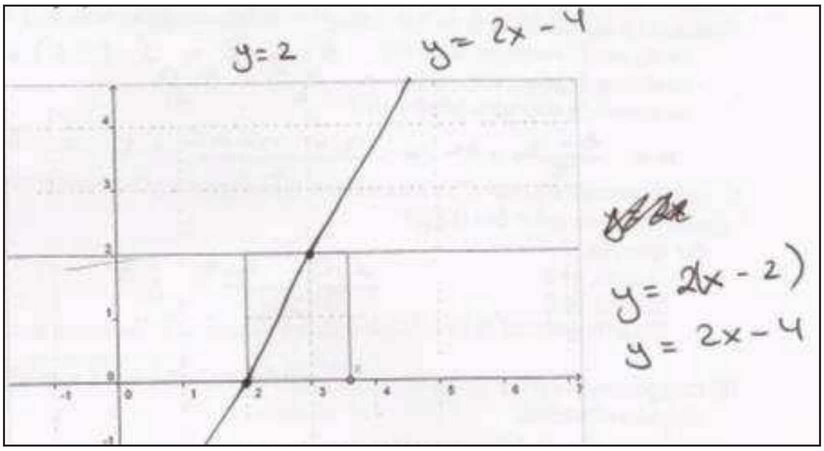


Figura 6. Respuesta de la pareja L-M a la tarea 'Función Integral II' (función constante)

Hacemos notar que estos estudiantes manejaron en este caso distintas representaciones de la función integral: algebraica (como conjetura y refinamiento de la misma), numérica (dando valores para comprobar la conjetura) y gráfica (como respuesta a la cuestión planteada), lo que les ayudó a dar la respuesta correcta. Por tanto, al establecer la relación entre una función y su función integral, mostró evidencias de coordinación de distintas formas de representación de una función.

Por otra parte no hemos encontrado evidencias de que estos estudiantes infieran que siempre la función integral de una función constante es una función lineal o afín, dependiendo de que el extremo a del intervalo [a, x] sea 0 o distinto de 0, lo que habría sido una segunda manifestación de la construcción del concepto de función integral.

Sin embargo, en el caso en que se pedía expresar el área bajo una recta que representa una función afín en el intervalo [*2, x*], la pareja L-M afirmó que la función que expresa el valor del área bajo una recta *"tiene que dar una parábola [...] porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2"*. Esta afirmación, que luego comprobó dando valores pero sin hacer referencia al crecimiento de la función o a puntos singulares como el vértice, es una nueva muestra de *razonamiento covariacional,* pues establece una coordinación entre parejas de funciones. Esto pone de manifiesto cómo estos estudiantes van construyendo progresivamente el concepto de función integral, lo que se muestra en el siguiente diálogo donde un miembro de la pareja, M, lleva la iniciativa y el otro, L, le cuestiona:

[322] M: A ver, tiene que dar una parábola.

[323] L: ¿Por qué?

[324] M: Porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2.

[325] L: Vale, entonces.

[326] M: Pero vamos a hacerlo, a ver, aquí es cero.

[327] L: ¿Que aquí qué?

[328] M: En ese valor ¿cuánto vale el área?

[329] L: ¿En 2? No entiendo lo que me estás diciendo. A ver, si x=3, el área de esto es 9.

Esta pareja siguió dando valores y dibujó la parábola, aproximadamente, y con errores en el gráfico (Figura 7), pero no llegó a expresar la ecuación de la parábola.

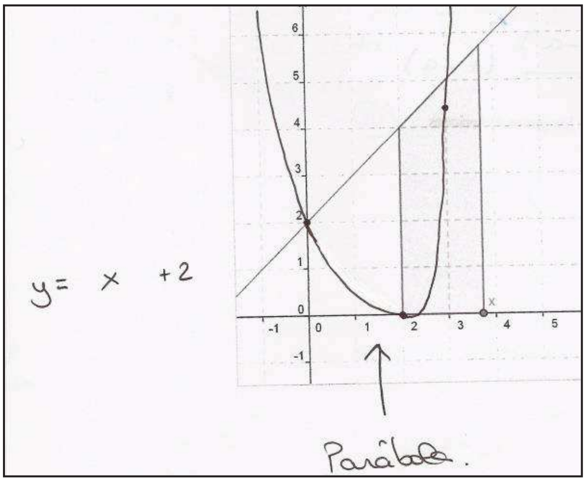


Figura 7. Respuesta de la pareja L-M a la tarea 'Función Integral II' (función afín)

Estos estudiantes han manejado en este apartado dos tipos de representaciones de la función integral: numérica (dando valores para comprobar la conjetura) y gráfica (representando la parábola que pasa por los puntos), pero no la algebraica. Esto podría explicarse porque no se apoyaron en el resultado obtenido en el bloque II de esta tarea, como hicieron en el caso de la función constante.

Podemos decir que esta pareja, a medida que ha ido resolviendo las tareas ha ido construyendo progresivamente el concepto de función integral, desde un *razonamiento covariacional* más simple a otro más complejo. En primer lugar los estudiantes relacionaron el extremo superior *x* del intervalo [*a, x*] con la integral definida de una función *f(t)* constante, lineal o afín en dicho intervalo; en segundo lugar relacionaron esta función *f(t)* y su función integral *F(x)* para valores positivos de la función, con x ∈ [*a,b*] y t ∈ [*a, x*]; en tercer lugar relacionan familias de funciones. En este proceso los estudiantes se apoyaron en distintos sistemas de representación: algebraico, gráfico y numérico. Por ello consideramos que están en el momento de *reflexión*.

DISCUSION

En este trabajo hemos caracterizado cómo estudiantes de bachillerato construyen el concepto de función integral en un experimento de enseñanza utilizando *applets*. Los resultados indican dos características que definen dos momentos de la transición de la fase de participación a la de anticipación en el proceso de abstracción reflexiva: *proyección* y *reflexión* (Figura 1).

Una característica común a los dos casos presentados es que los estudiantes llegaron a explicitar registros de experiencia que son necesarios para la construcción del concepto de función integral, pero que no son suficientes, identificando la relación entre un extremo de un intervalo y el valor del área bajo una recta en dicho intervalo, que es una forma de *covariación simple*. El salto cognitivo del momento de *proyección* al de *reflexión* se produce cuando los estudiantes son capaces de ver la *covariación compleja* (Sealey, 2006; Thompson y Silverman, 2008) de las tres cantidades que varían simultáneamente y que intervienen en el concepto de función integral, es decir, la variable x, $x \in$ [a, b], una función *f(t),* $t \in [a, x]$ y la función integral $\mathrm{F(x)} = \int_a^x f(t)$, en casos sencillos

Por otra parte, el manejo de distintas representaciones (numéricas, algebraicas y gráficas), ayudó a la pareja que se encontraba en el momento de *reflexión* a identificar la función que representa el área bajo una recta en el intervalo $[a, x]$ en casos sencillos, haciendo conjeturas y comprobaciones. Una conjetura que comprobó esta pareja fue que la función integral correspondiente a una función afín *"tiene que dar una parábola* […] *porque de grado 1 tiene que pasar a grado 2"*. Esto confirma los resultados de Berry y Nyman (2003) que indican que el uso de la tecnología usando distintos sistemas de representación, permite a los estudiantes desarrollar una mejor comprensión de la aproximación gráfica al Cálculo, superando la visión algorítmica y analítica. También Hong y Thomas (1997) mostraron que el manejo simultáneo de representaciones numéricas, gráficas y algebraicas de la integral usando hojas de cálculo y programas de cálculo simbólico, proporcionó un entorno favorable para construir una red de ideas relacionadas. Aranda y Callejo (2011) mostraron que el uso de tecnología ayudó a los estudiantes a relacionar simultáneamente distintos registros de representación, pues "*fueron capaces de relacionar distintas ideas usando argumentos variados para asociar la gráfica de una función con la de una de sus primitivas* […]. *Por otra parte las soluciones aportadas se apoyaron más en el pensamiento visual que en el analítico*" (p. 247).

REFERENCIAS

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2011). Aproximación al concepto de función primitiva: un experimento de enseñanza con applets de geometría dinámica. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*, (pp. 247-255). Ciudad Real: SEIEM.

Azcárate, C., Camacho-Machín, M., González, M.T. y Moreno M. (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna: Universidad de La Laguna.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 481-497.

Camacho, M. y Depool, R. A. (2003). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la Integral Definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (CAS) Derive. *Educación Matemática, 15*(3), 119-140.

Camacho, M., Depool, R. y Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of Derive software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*, 35-67

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*, 352–378.

Ferrara, F., Pratt, D. y Robutti, O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 237-273). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education**.** *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 105-128.

Hong, Y. y Thomas, M. (1997). Using the computer to improve conceptual thinking in integration. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* (Vol. 3, pp. 81–88). Lahti, Finland: University of Helsinki.

Roig, A. I. (2008). *Análisis de las fases del proceso de abstracción matemática en estudiantes de secundaria* (Tesis inédita de doctorado). Universidad de Alicante.

Sealey, V. (2006). Student understanding of definite integrals, Riemann sums and area under a curve: What is necessary and sufficient? En S. Alatorre, J.L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 46-53). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*, 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An Elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (5), 305-329.

Thompson, P. W. y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias, 16*(2), 233-249.

Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 2*(2), 287-304.