HACIA UNA RELACIÓN ENTRE EL ETM Y EL MTSK A TRAVÉS DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Toward a relationship between MWS and MTSK through the function concept

Espinoza-Vázquez, G.[a], Verdugo-Hernández, P.[a], Zakaryan, D.[a], Carrillo, J.[b] y Montoya-Delgadillo, E.[a]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), [b]Universidad de Huelva

Resumen

El presente trabajo aborda la relación entre los modelos Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) a través del análisis de episodios de clases donde se trata el concepto de función, particularmente el cálculo de pre imágenes. En dichos episodios se identifican elementos que permiten un análisis complementario desde ambos modelos, posibilitando, de este modo, una profundización en la comprensión del conocimiento del profesor de matemática como actor común de ambos modelos. Concluimos con la síntesis de los elementos encontrados entre los subdominios del MTSK y los componentes del ETM.

Palabras clave: *concepto de función, ETM, MTSK.*

Abstract

This paper addresses the relationship between Mathematical Works Space (MWS) and Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) models through the analysis of lessons episodes where the function concept is treated, particularly the calculation of pre images. In these episodes elements that allow a complementary analysis are identified from both frames, enabling a deepening understanding of knowledge of the mathematics teacher as a common actor in both models. We conclude with a summary of the common elements found between subdomains of MTSK and the MWS components.

Keywords: *function concept, MWS, MTSK.*

INTRODUCCIÓN

Existen varios modelos para estudiar el conocimiento del profesor (e.g. Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008; Rowland, Turner, Thwaites & Huckstep, 2009; Godino, 2009), cada uno de ellos pone su mirada en aspectos particulares sobre el conocimiento e intenta comprenderlo desde su mirada. Somos conscientes de que adoptar una postura teórica supone poder observar aquello que el marco elegido permite observar, lo que conduce a una perspectiva, si bien profunda, sesgada por los límites del propio marco. La articulación de marcos teóricos se hace relevante para explotar la diversidad teórica como una fuente de enriquecimiento, considerando esta diversidad como un desafío y punto de partida para impulsar el desarrollo teórico mediante la articulación de teorías (Godino et al., 2013). La revista ZDM dedicó varios números a reflexionar sobre teorías de la Educación Matemática. Particularmente, este trabajo se enmarca en el paradigma de "networking of theories", que ha experimentado un importante auge en los últimos años (e.g. Sriraman y English, 2005; Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010; García y Wake, 2010). La dialéctica entre teorías responde a distintos contextos y problemáticas, inspirando investigaciones sobre estrategias de conexión entre teorías, entre las que se encuentran las comparaciones de teorías o la correspondencia entre sus componentes (e.g. Bikner-Ahsbahs y Prediger, 2010), así mismo Trigueros, Bosch y Gascón (2011) muestran tres modos para dicha conexión basados en la tipología

Espinoza-Vázquez, G., Verdugo-Hernández, P., Zakaryan, D., Carrillo, J. y Montoya-Delgadillo, E. (2016). Hacia una relación entre el ETM y el MTSK a través del concepto de función. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 197-206). Málaga: SEIEM.

de los problemas, el componente teórico y el componente metodológico. Por nuestra parte pretendemos realizar aportaciones a la relación entre dos modelos teóricos mediante la coordinación de elementos compatibles de cada teoría, en el sentido de Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010), con el objetivo de complementar los aportes que puede hacer un modelo al otro.

En el cuarto Simposio de ETM se dio lugar a la reflexión sobre el diálogo entre el modelo del ETM (Kuzniak, 2011) y el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK por sus siglas en inglés de Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013), teniendo como actor central para ambos al profesor de matemáticas y el conocimiento que pone en juego cuando diseña, implementa y adapta el ETM idóneo (Gómez-Chacón, Escribano, Kuzniak, & Richard, 2015). Asimismo, las discusiones sobre los trabajos presentados en este simposio pusieron de relieve el conocimiento especializado del profesor, destacando su potencialidad para profundizar en el estudio de su ETM idóneo y personal, y recíprocamente, cómo el estudio del ETM puede ayudar a "profundizar en las relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que éste sustenta" (Carrillo, Flores-Merdano, Contreras & Climent, 2015, p. 469). De acuerdo con estas reflexiones tomamos los modelos ETM y MTSK para realizar un análisis en conjunto sobre la práctica de un profesor con el objetivo de mostrar algunas relaciones entre los componentes (o polos) del ETM y los subdominios del MTSK. Estas relaciones nos permitirán ampliar la perspectiva de ambos modelos y así enriquecer y profundizar en la comprensión del conocimiento del profesor mediante las aportaciones de los resultados del análisis de un modelo en el otro.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

El objetivo principal del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) es favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo. Para definir el ETM se introducen dos planos: epistemológico y cognitivo, que estructuran el ETM apoyando la comprensión tanto del modelo del trabajo matemático que se genera, como así también la articulación entre sus planos mediante tres génesis llamadas: semiótica, instrumental y discursiva (ver figura 1).

En el Espacio de Trabajo Matemático se identifican tres tipos de ETM (Kuzniak, 2011):

ETM de Referencia: La organización esperada de este espacio de trabajo es definida de manera ideal, solamente sobre la base de criterios matemáticos.

ETM Idóneo: El ETM de referencia debe ser acondicionado y organizado para volverse un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución dada con una función definida.

ETM Personal: El ETM idóneo debe ser utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada uno se apropia y lo ocupa con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas. Este ETM es lo que llamamos un ETM personal.

Adicionalmente, el Espacio de Trabajo Matemático considera, según Kuzniak y Richard (2014), tres planos verticales, los cuales se activan por medio de una determinada tarea, y se conectan con diferentes fases de trabajo matemático (Kuzniak & Richard, 2014). Las tres fases son: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación. Estas fases están definidas por un determinado número de competencias matemáticas cognitivas (Kuzniak & Richard, 2014), sobre la base de ciertas génesis y sus relaciones con el plano epistemológico. La primera fase está acompañada de la competencia "Descubrir", fundamentada en las génesis semiótica e instrumental, que generan el plano [Sem-Ins]. La segunda fase de justificación y razonamiento está acompañada de la competencia "Razonamiento", fundamentada en las génesis instrumental y discursiva, generadoras del plano [Ins-Dis]. Por último, la tercera fase, orientada hacia la presentación y comunicación, está acompañada de la competencia "Comunicación", sustentada en las génesis semiótica y discursiva, que generan el plano [Sem-Dis]. Estas fases son evidenciadas durante el trabajo matemático del individuo.

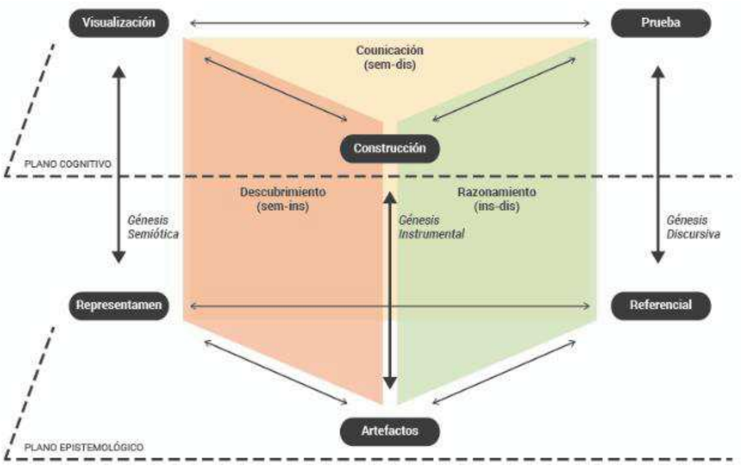

Figura 1. Planos del ETM (Kuzniak & Richard, 2014).

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK)

El MTSK es un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento que muestra, posee y/o declara el profesor de matemática (Carrillo et al., 2013). Ha surgido principalmente de las dificultades de la aplicación del modelo de Ball et al. (2008) y las reflexiones en torno a las potencialidades de este modelo y otros (e.g. Rowland et al., 2009, Kilpatrick, Blume & Allen, 2006) que caracterizan el conocimiento del profesor.

El MTSK considera dos grandes grupos de conocimiento distinguidos para referirse al conocimiento del profesor: el Mathematical Knowledge (MK), que es el conocimiento de la matemática como disciplina científica en un contexto escolar, y el Pedagogical Content Knowledge (PCK), que abarca los objetos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje (Carrillo et al., 2014). Cada uno de estos grupos, llamados dominios, se ha dividido, con fines analíticos, en tres subdominios (Figura 2), y cada uno de ellos en categorías que caracterizan al subdominio y, en general, el conocimiento del profesor. El modelo otorga un lugar fundamental a la matemática y no la disocia de su proceso de enseñanza-aprendizaje, en este sentido la integración de conocimientos de distintos subdominios es lo que identifica el MTSK como conocimiento matemático especializado para la enseñanza y que solo tiene sentido para el profesor de matemáticas.

El MK corresponde al conocimiento propio de la disciplina que se enseña y está dividido en los siguientes subdominios:

Conocimiento de los Temas (KoT) integra el conocimiento de los contenidos que deben aprender los alumnos con una profundización mayor a éste. Abarca aspectos fenomenológicos, definiciones, propiedades y sus fundamentos del tema así como los registros de representación y procedimientos. Por ejemplo, el conocimiento de métodos de resolución de ecuaciones lineales forma parte del KoT.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM) es el conocimiento de las relaciones entre distintos objetos matemáticos. Considera las conexiones interconceptuales entre temas que permiten relacionar los contenidos actuales (el tema) con contenidos anteriores (de simplificación) o posteriores (de complejización); también incluye las conexiones de contenidos con alguna propiedad común (transversales) y las conexiones auxiliares entre objetos. El conocimiento de la relación entre la ecuación $f(x)=0$ y los puntos de corte con el eje X es parte del KSM.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM) es el conocimiento sobre las características del trabajo matemático, cómo proceder y generar conocimiento en matemáticas. Incluye las prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a una temática en particular. El conocimiento sobre el uso de los cuantificadores para la elaboración de argumentos en demostraciones de propiedades para conjuntos finitos sería un ejemplo de este subdominio.

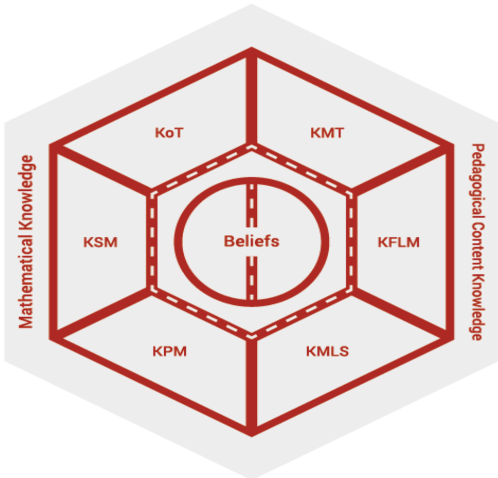

Figura 2. Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013)

Por su parte, el PCK corresponde a los conocimientos propios de la labor de la enseñanza de la matemática y está dividido en:

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) es el conocimiento sobre el aprendizaje de un contenido matemático. Abarca el conocimiento sobre las formas de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y concepciones de los estudiantes sobre matemáticas. Conocer que los estudiantes consideren fácil la evaluación del 0 o el 1 en una expresión algebraica es un ejemplo de este subdominio.

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) es el conocimiento del contenido matemático condicionado a la enseñanza del mismo. Comprende el conocimiento sobre teorías personales o institucionales de enseñanza, recursos materiales y virtuales y actividades, tareas, ejemplos, ayudas. El conocimiento de ejemplos de funciones representadas en un diagrama sagital con conjuntos finitos para potenciar la comprensión del concepto de función, es parte del KMT.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) es el conocimiento sobre lo que está estipulado que aprendan los estudiantes. Incluye el conocimiento de los contenidos matemáticos requeridos a enseñar, conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de diversos temas. El conocimiento del profesor sobre el conocimiento que tienen o que se espera que adquieran los alumnos sobre la resolución de ecuaciones es parte del KMLS.

Los subdominios expuestos son divisiones artificiales con fines analíticos del conocimiento del profesor y éstos no se presentan en forma aislada durante el análisis; es más, se espera observar distintas conexiones entre subdominios y categorías para poder interpretar el conocimiento del profesor. Este modelo incluye, además, al centro, el dominio de las creencias del profesor sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, pues considera que ellas permean a todos los subdominios.

Tanto el ETM como el MTSK son modelos que permiten la observación y análisis del conocimiento que muestra el profesor, considerando algunos elementos que arrojan luz sobre la posibilidad de establecer complementariedad teórica al momento de realizar el análisis de la actuación docente. Por ejemplo, coinciden en que las representaciones, las definiciones, los algoritmos y los tipos de pruebas/demostraciones utilizados son, entre otros, parte del conocimiento del sujeto, por tanto es posible tomar estos puntos comunes para intentar establecer algún tipo de articulación entre ellos.

METODOLOGÍA

Este trabajo es de carácter cualitativo, bajo un paradigma interpretativo, pues adoptamos los modelos ETM y MTSK para observar y comprender a través de ellos el conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas durante la enseñanza del concepto de función. Ponemos una particular atención en los momentos en que el profesor desarrolla tareas matemáticas como la determinación de la pre imagen de una imagen dada, o en una situación de enseñanza a los alumnos sobre las relaciones que hay entre los distintos objetos matemáticos que intervienen en la ejecución de esta tarea. Se presenta un estudio de un caso de tipo instrumental (Stake, 2007) dado por un profesor de matemáticas, que llamaremos Arturo (seudónimo), quien posee 10 años de experiencia docencia en educación primaria y secundaria, y 7 años en docencia universitaria. Arturo tiene el grado de licenciado en educación y, además, cuenta con un magister en matemáticas. Los colegas y superiores de Arturo lo reconocen como buen profesor, lo que es confirmado por las evaluaciones sobre la docencia consultada a sus alumnos en mecanismos oficiales de la universidad donde trabaja. Esto hace de Arturo un buen caso a priori para aportar información que permita visualizar los elementos y relaciones que se buscan.

La principal fuente de datos es el registro en vídeo y las transcripciones de las clases que destinó Arturo a la enseñanza del concepto de función. Hemos individualizado en estas transcripciones las intervenciones de los participantes mediante la siguiente notación: Arturo (P), Alumno (A), Alumnos (As). Adicionalmente contamos con las notas de campo recogidas durante la grabación de estas sesiones de clases.

Posteriormente se ha realizado el análisis de contenido (Bardin, 1996) de las transcripciones, definiendo episodios de clase de acuerdo a la identificación de objetivos del profesor durante la sesión, y tomamos como unidad de información las intervenciones de Arturo. Cada intervención de Arturo se ha revisado en búsqueda de evidencias de conocimiento especializado y elementos que permiten afirmar la activación de alguna génesis o planos verticales del ETM.

Para este trabajo nos enfocamos en dos episodios de clase en los que se propone la tarea de determinar la pre imagen de una imagen dada, bajo una función conocida. La elección de estos episodios se basa en la información que aportan sobre los elementos comunes que pueden evidenciarse desde ambos modelos (ETM y MTSK) y así articular los resultados en los análisis mediante la complementariedad teórica. Para efectos de este escrito intentaremos evidenciar la relación que se pueda establecer entre el ETM idóneo y sus componentes y los subdominios del MTSK. Estas relaciones podrán ser evidenciadas a través de las acciones del profesor que muestren un conocimiento particular respecto a la matemática y su enseñanza.

HACIA UNA RELACIÓN ENTRE EL MTSK Y EL ETM

A continuación mostramos extractos de los episodios que permiten la identificación de relaciones entre los subdominios del MTSK y las componentes del ETM. Centramos nuestra atención en la búsqueda de elementos que permitan caracterizar el ETM idóneo mediante la interpretación de la práctica del profesor y de su conocimiento identificado a través del MTSK.

La ecuación de primer grado como artefacto simbólico

En la clase anterior al episodio seleccionado, el profesor ha determinado la imagen de un elemento dada la correspondencia representada en un diagrama sagital, observando las "flechas" trazadas entre los elementos de un conjunto y el otro, o mediante la evaluación de la expresión algebraica

que define a la función, que se ha convertido en la técnica privilegiada por él para que sus alumnos obtengan las imágenes. Arturo también ha trabajado en la identificación de pre imagen de una imagen dada mediante estimaciones o la realización del proceso inverso a lo establecido por la función, es decir, si la función dada es x+4 (sumar 4), la pre imagen estará dada por y-4 (restar 4), proponiendo la tarea ahora con el uso de otra representación (algebraica). Posteriormente, parece que Arturo lleva intencionadamente a sus alumnos al desequilibrio cognitivo cuando les solicita la determinación de pre imágenes para la función $f(x)=2x+1$, lo que puede ser considerado como un indicio de su conocimiento sobre las dificultades de los alumnos (KFLM).
En términos de ETM, la génesis semiótica activa la visualización al utilizar el diagrama sagital para mostrar las flechas trazadas entre los elementos del conjunto de partida y el de llegada. El conocimiento de este tipo de diagramación o representación es visto como parte del KoT de Arturo desde el MTSK. Estos elementos son utilizados por el profesor para diseñar el ETM idóneo, el que ha seleccionado el tipo de representaciones, los ejemplos dados y las explicaciones. La organización de estos componentes es vista desde el MTSK como parte del KMT de Arturo. El ETM idóneo que ha diseñado para aquellas sesiones incentivó la génesis semiótica para el abordaje de las tareas sobre determinación de imágenes.

El ETM idóneo pretende activar la génesis semiótica con el uso de representaciones gráficas y algebraicas, movilizando principalmente la componente de la visualización del plano cognitivo, junto con ello se genera un cambio de dominio: del Cálculo en un nivel de operatoria aritmética hacia el Álgebra con la manipulación de las expresiones algebraicas, que más adelante evidenciaremos.

En el siguiente extracto mostramos cómo el profesor conduce a sus alumnos al desequilibrio mencionado mediante una conversación que parece ser intuitiva, pero que intenta posicionar la ecuación como una herramienta considerable para el cálculo de la pre imagen de -1 bajo la función $f(x)=2x+1$.

P: Aquí [se refiere al ejercicio anterior], porque la función era simple [x+4], yo podía descubrir fácilmente a quién mandé para que la imagen fuera el 2, entonces aquí dijimos que era el -2, porque -2+4 me da 2.
Lo que yo quiero hacer es que encontremos una forma de hacer esto, independiente de la función que me den, hacer el mismo procedimiento independiente de la función y quiero que lo deduzcamos.
Aquí, como era simple, pude descubrir a quién mandé para que les diera el 2, por eso les cambié la función a una en que no sea tan evidente a quién mandé para que llegue al 0.
Aquí están pensando "ah, puede ser el -1", pero la imagen de -1 va a ser [calcula] -2+1=-1, ¿cierto? ¿Me sirve ese?... No me sirve. ¿Quién otro podría ser candidato?

Podemos observar, en esta intervención, que Arturo declara su objetivo respecto a determinar la pre imagen de un elemento dado mediante algún procedimiento sin recurrir a la estimación de la solución. El conocimiento de estos procedimientos para la determinación tanto de imágenes como de pre imágenes es parte del KoT de Arturo, lo que en términos del ETM idóneo se identifica en el polo referencial, sin embargo la intervención da cuenta sólo de un indicio de este conocimiento que será confirmado en la siguiente intervención. Se evidencia además el subdominio KFLM (conocimiento de dificultades y obstáculos de los alumnos) cuando señala el cambio de la función a trabajar para evitar las estimaciones y fomentar el uso de otras estrategias. Arturo da evidencia de conocer las dificultades/facilidades de sus alumnos para realizar este tipo de tareas. Además, en términos de ETM, observamos la intención de activar la génesis instrumental al proponer encontrar una forma general para el cálculo de pre imagen por medio del uso de la ecuación como artefacto simbólico, el cual predomina en el dominio del Cálculo.

El extracto que sigue (continuación del anterior) permite observar que el profesor dirige a los alumnos hacia el desarrollo de ecuaciones para permitir el cálculo de las imágenes de la función evitando las estimaciones, lo que da cuenta del diseño del ETM idóneo y de la inclusión de la ecuación en éste:

As: -1/2
P: El -1/2, ¿cómo descubrió que era el -1/2? ¿Cómo descubriste que era el -1/2?
A: Porque... Fue porque si coloco el -1 te daba -1, la mitad te iba a dar...
A: No fue al tanteo. Se deduce porque -1 no es y 0 tampoco entonces debe estar entremedio.
P: [dibuja el -1 como imagen para la misma función]
¿Cuál es la pre imagen del -1?
A: -1
P: [borra el -1 recién escrito, escribe el 5] ¿Del 5?
As: 2
P: 2, porque 2x2 son 4, +1 son 5, o sea que puede visualizar ya alguna forma de que esto [la expresión 2x+1] me tiene que dar 5, ¿no?
A: Creo que se le perdió un 2 porque 2x-2 es-4, y -4 +1 da -3. Dijo 2 positivo, -2 daría -4, más 1, -3
P: 2 por 2 son 4, +1 son 5, y esa es la imagen del 2.
A: Pero la... es negativa [ella ve -2x+1]
P: No, no es negativa, es 2x+1
A: ¿Por qué en la primera la puso como -2?
P: Porque metí un -1 a la función, y 2 por -1 es -2, por eso puse ahí. ¿Podemos encontrar una forma de encontrar la pre imagen sin estar jugando al tanteo?
As: Si
P: Si, lo que queremos es, por ejemplo, que esto nos diera 5, y si "esto quiere que me diera 5" se convierte en una ecuación… ¡Para eso vimos ecuaciones e inecuaciones antes!

Observamos que hay distintas entradas (planos activos) para resolver un mismo problema desde el punto de vista de los ETM idóneos, evidenciando dos aproximaciones distintas: la génesis semiótica y la génesis instrumental, privilegiando el plano vertical [Sem-Ins], poniendo en obra la fase de descubrimiento y exploración donde interactúan signos y herramientas. Este plano presenta diferentes entradas y puede comprenderse en sus distintas direcciones, por ejemplo, en este caso, desde el plano epistemológico al cognitivo: de manera diagonal, es privilegiado el artefacto junto a la visualización. El artefacto es la propia ecuación, que se evidencia en la última intervención de Arturo. Las direcciones hacia las distintas componentes nos indican las decisiones y caminos tomados por el docente en el diseño del ETM idóneo, las cuales ameritan ser estudiadas en todas sus direcciones.

La última intervención de Arturo también da cuenta de su conocimiento para determinar la pre imagen de un número dado como conocimiento de un procedimiento (KoT) y que este procedimiento utiliza la *ecuación lineal* como un elemento auxiliar, fuera del tema de funciones, para conseguir la solución. Se evidencia una conexión entre dos objetos matemáticos: la función afín y la ecuación lineal, vinculadas por la identificación de la relación entre imagen y pre imagen con la ecuación $y=f(x)$. Estos objetos están en dominios distintos; la función la ubicamos en el dominio del Cálculo, mientras que la ecuación se posiciona en el dominio del Álgebra. La conexión, desde la mirada del MTSK, corresponde a una conexión auxiliar en el KSM de Arturo.

A continuación Arturo propone la resolución de una tarea, a modo de ejemplo, sobre determinar la pre imagen de 4 en la función $f(x)=1-3x$.

P: Para que quedemos con esta idea por lo menos un poco más clara. Sea la función f(x)=1-3x, determinar la pre imagen de 4, ¿Qué tengo que hacer? Quiero que esto me dé como resultado 4, eso se reduce a que tengo 1-3x, que es la función que quiero que me de 4, y se traduce en resolver una ecuación en vez de estar buscando al tanteo cuál es ese resultado. ¿Sabemos despejar acá?
Esto quedaría equivalente a 1-4=3x y esto quedaría -3=3x y por lo tanto, x ¿cuánto tendría que ser?

As: -1
P: -1 ¿Cuál es la pre imagen del 4?... -1

Las intervenciones de Arturo nos aportan evidencia de su KoT, en este caso del conocimiento sobre los procedimientos asociados a la resolución de ecuaciones (conocimiento sobre cómo resolver una ecuación lineal), pues detalla los pasos a seguir para obtener la solución a la ecuación 1-3*x*=4. Existe también un indicio sobre el conocimiento de los conocimientos previos de los estudiantes (KMLS) cuando pregunta retóricamente "*¿sabemos despejar acá?*", dando luces de que el profesor conoce que sus alumnos saben resolver este tipo de ecuaciones. En términos de ETM idóneo, se puede observar que Arturo muestra poseer un referencial acorde a la resolución de ecuaciones lineales, ya que, como se mencionaba anteriormente, éste detalla los procedimientos a seguir de la solución de la ecuación lineal a resolver.

En el siguiente extracto se observa cómo Arturo sintetiza lo estudiado:

P: En el conjunto de partida teníamos las pre imágenes de los que estaban acá, y aquí estaban las imágenes del conjunto de partida. Si aquí yo tenía el 10, el 10, por esta función que era 5x+1, llegaba como 51. Si aquí yo tenía 6, ¿a quién mande para que llegara como 6? Una forma es buscar un número que multiplicado por 5 y sumado con 1 me de 6. Yo tengo dos formas de encontrar esto. Va a depender del número, si encontrarlo es simple como encontrar la pre imagen de 6, que era buscar un número que multiplicado por 5 y sumado con 1 me diera 6…, pero ¿cuál va a ser la pre imagen del 10? ¿Es un número que sea tan simple de determinar?
As: No.
P: Si yo quiero la imagen del 10, el 10 lo hago pasar por la función y llega como 51, otra cosa es que yo quiera la pre imagen del 10, o sea que el 10 no está en el conjunto de partida, está en el conjunto de llegada, entonces ¿a quién mandé para que ese número, al pasar por la función, llegara como 10?
Significa que la función me tiene que dar 10. Dijimos que encontrar pre imágenes era lo mismo que resolver una ecuación, porque quiero que la función 5x+1 me dé 10, entonces se convierte en una ecuación.
Cuando encuentro imágenes, tomo el valor, lo meto en la función y me arroja su imagen, pero cuando quiero pre imágenes yo tomo la función y lo igualo a ese valor que quiero que sea. Al despejar aquí, ¿qué me va a quedar?
A: 5x =9
P: 5x=9, por lo tanto x ¿a qué es igual?
As: 9/5
P: 9/5. Ese es la pre imagen del 10, que en ese caso no era fácil de determinar como lo fue la pre imagen del 6.
A: Es que yo puse 1,8 y también me da.
P: Para algunos, encontrar este valor [9/5] puede ser simple y para otros no, pero va a ser el resultado de resolver esta ecuación.

Se aprecia cómo el profesor mecaniza los procedimientos para obtener imágenes y pre imágenes, formalizando el uso de ecuaciones y valorizaciones de expresiones algebraicas como las técnicas que otorgan mayor certeza en la obtención del resultado buscado; si el número está en el dominio o en el recorrido corresponderá evaluar o resolver una ecuación para determinar su imagen o pre imagen respectivamente. Esto es evidencia, por una parte, del conocimiento sobre cuándo usar un determinado procedimiento (KoT), mientras que por otro lado se observa a Arturo dando las explicaciones sobre estos usos (KMT). Así mismo, el referencial del ETM idóneo del docente está compuesto por definiciones y propiedades de las funciones anteriormente utilizadas por el docente, quien, al focalizar su atención hacia las ecuaciones, cambia su referencial evidenciando un cambio de dominio del Cálculo hacia el Álgebra.

El profesor conecta la ecuación *y=f(x)* y los conceptos de imagen y pre imagen (KSM), destacando la identificación del elemento al conjunto de partida o al conjunto de llegada. El subdominio KFLM también está a la vista cuando Arturo se refiere a las dificultades o facilidades para abordar el problema de una u otra forma.

CONCLUSIONES

Una de las preguntas abiertas planteadas en Gómez-Chacón et al. (2015) ha sido cómo utilizar los planos verticales del diagrama del ETM como punto de encuentro entre los modelos considerando al profesor como elemento central. Nosotros hemos evidenciado algunas relaciones entre subdominios del MTSK y los polos de los distintos planos del ETM, las cuales nos señalan cómo la génesis semiótica e instrumental son activadas. El diseño del ETM idóneo de Arturo evoca el plano vertical [Sem - Ins], el cual tiene relación con la organización didáctica de los contenidos, el conocimiento de los temas, las características del aprendizaje de sus alumnos y el conocimiento de la estructura matemática.

En particular hemos evidenciado cómo el ETM idóneo y el MTSK pueden ser articulados, por ejemplo mediante las relaciones identificadas entre el polo referencial y el KoT, respectivamente. En nuestro caso, la definición y las propiedades de las funciones son los elementos que pueden ser observados simultáneamente desde ambos modelos, desde el ETM como parte del polo referencial y desde el MTSK como parte del KoT, existiendo una evidente intersección en estos puntos entre ambos modelos. Así también, mediante la génesis semiótica, es activado el polo de la visualización, el cual es articulado con las representaciones del KoT cuando el profesor utiliza el diagrama sagital para indicar con flechas las correspondencias entre los elementos del conjunto de partida con los elementos del conjunto de llegada.

Estos polos, identificados en el estudio del ETM, han sido relacionados con el subdominio KMT, pues en el diseño y organización del ETM idóneo, el profesor selecciona aquellos elementos que permitan al alumno comprometerse con las tareas y con el proceso de enseñanza-aprendizaje, lo que se traduce en elecciones sobre tipos de representación, ejemplos y explicaciones que potencien el aprendizaje del objeto de estudio.

En el caso de Arturo se ha observado un cambio de dominio al trabajar con el cálculo de imágenes y pre imágenes de funciones: desde el dominio del Cálculo al dominio del Álgebra. Este cambio se evidencia cuando Arturo recurre a la ecuación lineal (dominio del Álgebra) como un artefacto simbólico que le permite determinar pre imágenes de una función (dominio del Cálculo). Relacionamos este cambio con una conexión auxiliar del KSM, pues la ecuación es utilizada como un elemento auxiliar en la resolución de la tarea propuesta durante el estudio de las funciones y con la posibilidad de estudiar el ETM del profesor en distintos dominios, por ejemplo $\text{ETM}_{\text{Análisis}}$ o ETMÁlgebra.

La implementación de ambos modelos ha permitido un análisis más fino del conocimiento de Arturo, poniendo de relieve relaciones que necesitan ser profundizadas en posteriores investigaciones con el propósito de mejorar la caracterización de dichos modelos y de comprender mejor el conocimiento del profesor, lo que posibilitaría formas alternativas de abordar la formación y el desarrollo profesional del profesorado.

AGRADECIMIENTOS

Beca de Doctorado año 2015 Conicyt (21151243); Beca Complementaria año 2015 Conicyt (R.E.: 5359/2015); Proyecto ECOS-Conicyt C13H03. Beca de Doctorado año 2015 Conicyt (21150897). Proyecto EDU2013-44047-P.

Referencias

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories: An approach for exploting the diversity of theorical approaches. En B. Sriraman & L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp.2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Contreras, L.C., & Climent, N. (2015). El profesor en el marco de los ETM: el papel del MTSK como modelo de conocimiento. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 461-471). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Drouhard, J-Ph., & Kuzniak, A. (2015). Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les Espaces de Travail Mathématique. En Mª I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P. Richard (Eds.). *Espacio de Trabajo Matemático, Actas Cuarto Simposio Internacional ETM*. Madrid: Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid. ISBN: 978-84-606-9475-5. http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf

García, F., Wake, G. C. (2010). Estableciendo diálogos entre diferentes marcos teóricos: de los procesos narrativos a la teoría antropológica de lo didáctico. En Moreno, Mar; Carrillo, José; Estrada, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 315-326). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión,* 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M.(2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education.In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2810-2819). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Gómez-Chacón, I., Escribano, J., Kuzniak, A., & Richard, P. (Eds.). (2015). *Actas del ETM 4*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Kilpatrick, J., Blume, G., & Allen, B. (2006). *Theorical framework for secondary mathematical knowledge*. Manuscrito no publicado, University of Georgia and Pensilvania State University.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24*. Recuperado el 12 de junio de 2014 de: Laboratoire de Didactique André Revuz (EA 1547), http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 17(1), 1-16.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: reflecting on practice with the knowledge quarter*. London: Sage.

Sriraman, B., & English, L. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *(ZDM) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(6), 450–456.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Trigueros, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD.* (vol. 10, pp77-116). CRM documents. Bellaterra, Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.