

Una propuesta para los estándares del límite matemático

Carlos Javier Rojas Álvarez
crojas@uninorte.edu.co
Universidad del Norte

Resumen

Uno de los objetos matemáticos que los alumnos manipulan algebraicamente, sin saber su significado, es el concepto del límite matemático. Ejemplo de tal situación son los estándares de evaluación de algunos libros sobre el tema: “aplico las propiedades para hallar límites de funciones sencillas”, “calculo límites infinitos o al infinito de funciones racionales”, entre otros.

La presente propuesta pretende que a partir de problemas el alumno construya el significado del límite y del infinito en matemáticas. La propuesta está basada en los sistemas de representación y el modelamiento funcional.

Palabras claves: límite, sistemas de representación, modelamiento funcional.

Introducción

El concepto de límite, base de cualquier otro concepto de Cálculo Diferencial e Integral, no es comprendido por los alumnos y lo reducen a una simple operación algebraica. Al respecto, **Ferrini-Mundi y Graham**, señalan que cuando a los estudiantes se les propuso un problema sencillo de límites con la representación algebraica y gráfica, la mayoría de los estudiantes resolvieron el problema con la representación algebraica, pero mostraron muy poca comprensión de la representación gráfica. Una estudiante entrevistada sostuvo que “la gráfica no me puede ayudar a encontrar una respuesta”. Indagaciones posteriores revelaron que la noción de “aproximación” no hacía parte de su comprensión del concepto de límite (1993, 59). Otra investigación realizada por Orton concluye que “los alumnos mostraron dificultades significativas en la conceptualización de los procesos de límite que sustentan el concepto de derivada y en la utilización apropiada de las representaciones gráficas” (Engler, 2007, 3).

Las investigaciones anteriores mencionan las dificultades que tienen los alumnos en relacionar dos sistemas de representación (algebraico y gráfico), pero no hacen mención acerca del origen de tales funciones en el sentido de si son producto de un modelamiento funcional o no. ¿Será la descontextualización un factor de incomprensión en el límite?

Referentes teóricos

La presente propuesta, antes que trabajar con funciones descontextualizadas, propone que las funciones (en este caso sucesiones) sean modeladas matemáticamente a partir de una situación problema-geométrica en la que interviene la acción. Al respecto, **Piaget** afirmó en su intervención en el Segundo Congreso Internacional de Educación Matemática lo siguiente:

“De lo anterior, se deduce que, aun en lo que se refiere a la pedagogía de la matemática, caeríamos en un grave error si, limitándonos al plano de lenguaje, dejásemos de lado el papel de las acciones. Por el contrario, en los alumnos jóvenes la acción sobre los objetos resulta indispensable para la



A S O C O L M E

ASOCIACION COLOMBIANA DE MATEMATICA EDUCATIVA

comprensión, no sólo de las relaciones aritméticas, sino también de las geométricas (como sucedía en el caso de la matemática empírica de los egipcios)” (citado por De la Torre, 52).

Piaget también sostiene que toda abstracción procede a partir de estructuras más concretas y que a la axiomatización, el último paso en la reflexión del pensamiento, se llega gradualmente a partir de la acción. Dicha acción es lo que Jerome Bruner denomina representación enactiva.

Modelación funcional

Uno de los problemas de las clases de matemáticas es la falta de situaciones concretas que les den significado. **Mochón** afirma que el objetivo de la modelación matemática es el de generar una representación matemática útil de una situación real (2000, 13) y más adelante sostiene que “A grandes rasgos, un modelo matemático es una representación de un fenómeno real, basada en relaciones matemáticas” (19). Un tipo de modelación matemática es modelación funcional, que construye una función para describir el comportamiento de una situación determinada.

Sistemas de representación en matemáticas

Radford L., citado por **Rico L.**, afirma que:

“Las representaciones matemáticas son todas aquellas herramientas –signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas; de ahí su interés didáctico.” (? , 3)

El uso de los sistemas de representación en el estudio de los objetos matemáticos es de vital importancia en el desarrollo de la visualización. Según **Hitt**, la visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas (1998, 23).

Infinito y límite matemático

El límite matemático no se puede estudiar aisladamente del infinito y del continuo matemático. Al respecto, **Arboleda y Recalde** afirman:

“Reconocer los conceptos claves de una teoría hace parte del proceso de fundamentación y axiomatización de ella misma. Sin embargo, en una teoría suficientemente fundamentada esta tarea no reviste mayor dificultad. Por ejemplo, al desarrollar sus respectivos objetos de estudio, disciplinas matemáticas como el análisis real, el análisis funcional, la geometría diferencial o las ecuaciones diferenciales, se cimentan en conceptos comunes, que se toman como punto de partida de cada una de ellas, como la convergencia, la continuidad, la derivada y la integral. Estos conceptos se apoyan en dos cuestiones: de una parte en una idea precisa que es el continuo matemático; y de otra, en procesos infinitesimales que en última instancia se definen, axiomáticamente hablando, con base en la noción de límite.

De este modo se pueden establecer las siguientes interrelaciones:



(En el artículo aparece es una circunferencia; no un pentágono)

La ubicación del infinito en el esquema nos lleva a concluir que si deseamos saber con certeza lo que es el límite, el continuo o la convergencia, debemos preguntarnos primero sobre el infinito. Esto significa que la noción "problemática" primaria es el de infinito". (1995, 155)

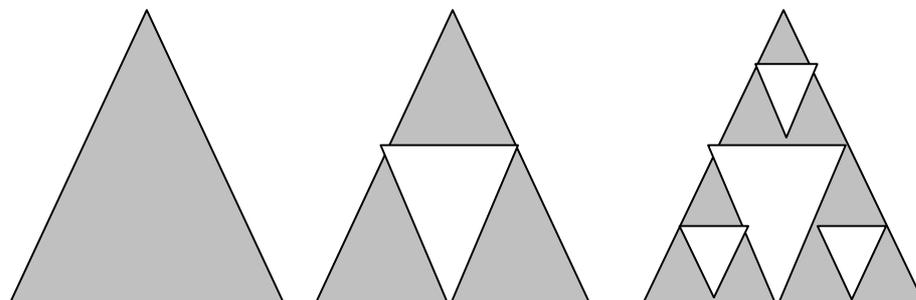
Por lo tanto, abordar la problemática del límite significa también la problemática del infinito, del continuo y la convergencia.

El interés por el infinito en matemáticas y en otras disciplinas es milenario. En las últimas décadas, la problemática del concepto del infinito matemático está haciendo parte de la didáctica de las matemáticas.

Metodología y actividades

Algunos de los problemas propuestos son los siguientes:

1. Los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$ de 4 cm ($4\text{ cm} = 1$ unidad) de lado se unen para formar un nuevo cuadrado $PQRS$. Este procedimiento de unir los puntos medios del cuadrado se hace cinco veces más, siendo el último cuadrado el $UVWX$.
 - a. Deduzca una fórmula para calcular el área del n -ésimo cuadrado.
 - b. Con la fórmula anterior calcule el área de cada uno de los seis cuadrados (en unidades cuadradas). Haga una tabla de valores y gráfíquelos.
 - c. Extienda la tabla anterior para $N=10, 20$ y 30 . ¿A qué valor se aproxima el área del cuadrado? Escriba una expresión matemática que describa el comportamiento del área del cuadrado.
 - d. Calcule la suma de las áreas de los primeros dos, tres, cuatro y cinco cuadrados. Haga una tabla de valores.
 - e. Extienda la tabla anterior para los primeros diez, veinte y cuarenta cuadrados. Escriba una expresión matemática que describa el comportamiento de la suma de las áreas de los cuadrados. Escriba una expresión matemática que describa el comportamiento de la suma de las áreas.
2. A un triángulo equilátero, cuyo lado mide 4 cm , se le han unido los puntos medios de cada uno de los lados para formar otro triángulo equilátero como lo muestra la siguiente figura. A cada uno de los tres triángulos grises se le hace el mismo procedimiento y así sucesivamente.



Etapa 0

Etapa 1

Etapa 2



- a. Deduzca una fórmula para calcular cuántos triángulos grises se obtienen en la n -ésima etapa del proceso. Clasifique el dominio de la función.
- b. Haga una tabla de valores para saber cuántos triángulos grises habrán en la cuarta, quinta, sexta, séptima y octava etapa del proceso. Haga la respectiva gráfica.
- c. Extienda la tabla para la décima, vigésima y trigésima etapa del proceso. ¿A qué valor se aproxima el número de triángulos a medida que la etapa del proceso aumenta? ¿Cómo se escribiría una expresión matemática para describir tal situación?

Conclusiones

Más que calcular límites algebraicos, la propuesta pretende que los alumnos le encuentren significado a los términos *límite* e *infinito*, y no que se queden en meros símbolos que se aplican de manera mecánica y sin saber para qué lo hacen. Por lo tanto, los estándares podrían ser:

- Comprendo el significado del límite y lo aplico a situaciones problemas.
- Identifico el infinito como un comportamiento numérico de funciones que modelan situaciones problemas.
- Interpreto el límite y el infinito tubularmente y gráficamente.

Bibliografía

ARBOLEDA, Luis C. y RECALDE, Luis C. Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: La historia y epistemología del infinito. En: Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. 4, No. 1 y 2. (Mayo, 1995); p. 151-171.

DE LA TORRE, Andrés. Los conflictos cognitivos en la construcción del concepto de continuo. En: Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. 9, No. 1, 2 (Nov. 2001); p. 51-70.

ENGLER, A. et al. Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. En: Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Vol. 11 (Sept., 2007); p. 113-132.

FERRINI-MUNDI, Joan y GRAHAM, Karen. La reforma de los cursos de cálculo: Aprendizaje, enseñanza y desarrollo curricular. Una perspectiva. En: Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. 3, No. 1 (Mayo, 1993); p. 53-69.

HITT, Fernando. Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. En: Educación Matemática. Vol. 10, No. 2 (Agosto, 1998); p. 23-45.

MOCHÓN, Simón. Modelos matemáticos para todos los niveles. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 2000. Serie cuadernos didácticos, volumen 9.

RICO, Luis. Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. P. 3 (Vía Internet).

URL: http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm
