CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN PRIMARIA SOBRE PROBABILIDAD EN EXPERIENCIAS COMPUESTAS

Pre-service primary school teachers' knowledge of probability in compound experiences

Fernandes, J. A.[a], Gea, M. M.[b] y Batanero, C.[b]

[a]Universidad de Minho, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo describe los resultados de la resolución de una tarea sobre probabilidad basada en experiencias compuestas, a través de la extracción de dos bolas de un saco. La tarea se resuelve por 59 futuros profesores que cursan la Licenciatura de Educación Básica en Portugal, con formación previa sobre el tema. Los resultados muestran diversas dificultades de los futuros profesores en la resolución de la tarea, algunas de las cuales se describen en la literatura de investigación, tales como comparar probabilidades de experiencias simples, considerar la reposición o no apreciar el orden de los resultados de las experiencias.

Palabras clave: *probabilidad, experiencias compuestas, futuros profesores en educación primaria, conocimiento del profesor.*

Abstract

This study describes the resolution of a task in probability based on compound experiments involving the drawing of two balls from a bag. The task is resolved by 59 prospective teachers that are taking the Graduation in Elementary Education in Portugal, who had already studied the topic of Probability within the course. The results show many teachers' difficulties in solving the task, some of which are reported in the literature, such as consider probabilities in simple experiments, replacement of favourable and/or possible cases or no consideration of the order in the results.

Keywords: *probability, compound experiments, prospective teachers of primary school, knowledge of teacher.*

INTRODUCCIÓN

La estadística y la probabilidad se han incorporado a los programas de enseñanza básica (6 a 12 años) de muchos países, desde hace muy poco tiempo, entre los cuales se encuentra Portugal (Ministério da Educação, 2007; 2013). Esta reciente incorporación de su enseñanza en las etapas iniciales de escolaridad ha motivado nuevos estudios de investigación, completando líneas de investigación ya existentes en las etapas de secundaria y nivel superior, aportando resultados de gran interés en cuanto a los tres grandes focos de estudio en Didáctica de la Matemática como son el profesor, el alumno, el saber, y las relaciones entre ellos. El trabajo que presentamos se centra en el conocimiento que el futuro profesor posee sobre probabilidad en experiencias compuestas, que serán contenidos que tendrá que impartir en un futuro inmediato.

El estudio de la probabilidad en experiencias compuestas forma parte de lo que se denomina cultura estadística de cualquier ciudadano, entendida en términos de capacidad del individuo para interpretar de modo crítico la información que encontramos en nuestra vida diaria, valorando la

Fernandes, J. A., Gea, M. M., y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de Educación Primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp.217-225). Málaga: SEIEM.

utilidad de las herramientas que la estadística pone a nuestro servicio para tomar decisiones con toda la información disponible (Wallman, 1993). Esta cultura estadística adquiere mayor relevancia en el caso de los profesores, que se encargan de la enseñanza de estos conceptos, al nivel que determine la institución o sistema educativo (Watson y Moritz, 2002).

En diversas investigaciones se ha puesto de manifiesto la dificultad que entraña el cálculo de probabilidades en experiencias compuestas, en comparación con el cálculo de probabilidades en experiencias simples (e.g., Fernandes, 1999; Fischbein, Nello y Marino, 1991; Polaki, 2005). En concreto, en la investigación de Contreras, Díaz, Batanero y Cañadas (2013) se muestra la dificultad de futuros profesores de enseñanza secundaria y bachillerato de definir los conceptos de probabilidad simple y probabilidad condicional. Como indican los autores, estos resultados son preocupantes ya que afectan a sus decisiones sobre la enseñanza de estos conceptos.

En este trabajo abordamos esta problemática, mediante la resolución de una tarea en el contexto de extracción de bolas de un saco por futuros profesores de educación básica.

MARCO TEÓRICO

El análisis del conocimiento de los futuros profesores sobre probabilidad en experiencias compuestas se analiza bajo el marco teórico desarrollado por Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) que, en comparación con otras perspectivas, describe con gran detalle el conocimiento matemático que el profesor requiere poner en marcha para la enseñanza. Según este marco teórico, el profesor debe coordinar dos dominios, uno referido al contenido de la materia de enseñanza y otro referido a su enseñanza, en sí misma. En este trabajo nos referimos al primero de estos dominios, cuyas componentes se describen a continuación:

1. El *conocimiento común del contenido*, que se refiere al conocimiento que cualquier persona posee después de haber recibido formación sobre el tema, por lo que se pretende que nuestros estudiantes lo adquieran tras el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema.
2. El *conocimiento avanzado del contenido* (denominado por los autores como conocimiento en el horizonte matemático), se refiere a contenidos sobre el tema de un nivel superior que los implicados en el conocimiento común del contenido, así como a las relaciones del tema con otras disciplinas.
3. El *conocimiento especializado del contenido* se vincula al proceso de enseñanza y aprendizaje del tema e implica el diseño y la secuenciación de tareas, desempeño de diferentes métodos de resolución de las mismas, así como organizar la secuenciación de contenidos en el proceso de instrucción.

En nuestro estudio nos basamos en la primera de estas componentes, ya que los resultados de nuestro análisis se refieren a las respuestas de los futuros profesores a una tarea elemental de probabilidad en experiencias compuestas y los conocimientos requeridos para su resolución no son complicados.

ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Las investigaciones sobre cálculo de probabilidad en experiencias compuestas han mostrado que este contenido resulta más complicado para los estudiantes que el de probabilidad en experiencias simples (Fernandes, 1999, 2001; Fischbein, Nello y Marino, 1991; Polaki, 2005; Estrada, Díaz y de la Fuente, 2006; Contreras et al., 2013). Estos contenidos están relacionados ya que, si por ejemplo analizamos experiencias compuestas independientes, como puede ser el lanzamiento de una moneda dos veces consecutivas, el cálculo de la probabilidad de obtener dos caras (1/4) puede calcularse mediante el producto de la probabilidad de obtener cara (1/2) en cada uno de los dos lanzamientos ($1/2 \times 1/2$). Sin embargo, la probabilidad compuesta exige un nivel más avanzado de conocimientos que el de probabilidad simple, entre otros, el espacio muestral producto de los espacios muestrales simples asociados. Siguiendo con el ejemplo anterior, si pedimos calcular la probabilidad del suceso “obtener una cara en los dos lanzamientos”, el producto de las probabilidades simples en este caso no es una estrategia correcta, pues debemos considerar los dos casos favorables al suceso (C+ y +C).

Fernandes (1999) observó muchas dificultades de los estudiantes de 8º y 11º curso (13 años y 16 años, respectivamente) en la comparación de probabilidades basadas en experiencias compuestas, en diferentes tareas como la extracción de bolas de un saco y el lanzamiento de monedas y dados. En su estudio, el porcentaje de respuestas correctas de los alumnos varía mucho según el curso escolar y la tarea propuesta. El éxito en las tareas de los alumnos de 8º curso varía entre el 12,8% y el 37,7%, mientras que en 11º curso varía entre el 14,3% y el 64,1%. En general, el porcentaje de respuestas correctas fue mayor cuando los alumnos tenían que comparar sucesos con una mayor razón entre casos favorables. Por ejemplo, resultó más fácil en el lanzamiento de dos dados identificar que el suceso “obtener dos números diferentes” es más probable que el suceso “obtener dos números iguales” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 30 y 6, respectivamente), mientras que resultó más complicado comparar los sucesos “salir un 5 y un 6” y “salir un 5 y un 5” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 2 y 1, respectivamente). Este mejor desempeño también se observó en una tarea basada en el lanzamiento de tres monedas, donde se pedía comparar la probabilidad de los sucesos “obtener resultados iguales” y “obtener resultados diferentes en dos de las tres monedas” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 2 y 6, respectivamente), en comparación con los sucesos “obtener cara en dos monedas” y “obtener sólo una cara” (el número de casos favorables a uno y otro suceso es de 1 y 2, respectivamente).

Otra experiencia muy interesante de la investigación de Fernandes (1999) fue la extracción de dos bolas de un saco (con igual cantidad de bolas blancas que negras: 2 bolas blancas y 2 bolas negras), sin reposición, donde se obtuvieron porcentajes muy bajos de respuestas correctas (14,7% en 8º curso y 28,7% en 11º curso). Se pedía decidir sobre cuál de los siguientes sucesos tenía mayor probabilidad: “salir dos bolas blancas” y “salir bola blanca y negra”; o bien, si poseían igual probabilidad. Esta tarea, con igual número de bolas de ambos colores, difiere de la del presente estudio en cuanto al total de bolas y la cantidad de bolas blancas que negras: los estudiantes que respondieron incorrectamente indicaron que ambos sucesos poseen igual probabilidad, justificando que el saco se compone de igual número de bolas blancas que negras (razonamiento aditivo) o que los sucesos “obtener bola blanca” y “obtener bola negra” son equiprobables (Lecoutre y Durand, 1988). Los resultados en esta tarea se mantienen en investigaciones desarrolladas con futuros profesores (Fernandes, Batanero, Correia y Gea, 2014), donde el 47,8% justifica su respuesta con cálculos de probabilidades simples, error que también se manifestó en otra tarea referida a la selección de dos personas de un grupo.

Otra variable analizada en las investigaciones sobre experiencias compuestas es la reposición y no reposición en el experimento. Fischbein y Gazit (1984) analizaron las respuestas de estudiantes de entre 10 y 13 años de edad en una secuencia de enseñanza sobre probabilidad, observando mayor éxito en las tareas con reposición que en aquellas sin reposición. Los autores se refieren a la complejidad del espacio muestral resultante en uno y otro caso. Por ejemplo, si experimentamos con un saco sin reposición, de la primera extracción resulta que en el saco queda una bola menos, mientras que si actuamos con reposición, para la segunda extracción volvemos a disponer de las mismas bolas que cuando efectuamos la primera extracción. Los autores observan cómo los estudiantes no obtienen correctamente el espacio muestral en experiencias sin reposición y calculan las probabilidades comparando el número de casos favorables antes y después de la primera extracción en vez de comparar los resultados favorables con el total de resultados posibles. Resultados similares se obtienen en otras investigaciones (Fernandes, Correia y Contreras, 2013) e incluso en investigaciones con futuros profesores (Fernandes et al., 2014).

Por último, el orden en que se obtienen los resultados de la experiencia compuesta influye en el cálculo de probabilidades. Por ejemplo, en la extracción de dos bolas de un saco en el que hay dos bolas blancas y dos negras, con o sin reposición, el orden de los resultados es irrelevante si se evalúa la probabilidad de obtener dos bolas de igual color, pero sí influye cuando evaluamos el suceso “obtener una bola de cada color” ya que, en este caso, podemos obtener la bola blanca en la primera extracción o en la segunda. Fernandes et al. (2014) observaron este error en casi la mitad de los futuros profesores de la muestra (47,8% de futuros profesores) en el desempeño de tareas de extracción de bolas y selección de dos personas de un grupo.

METODOLOGÍA

En este estudio se trata de evaluar el conocimiento de futuros profesores de enseñanza básica (6 a 12 años) en probabilidad en experiencias compuestas mediante el análisis de sus respuestas a una tarea basada en la extracción de bolas de un saco. La muestra está compuesta por 59 estudiantes (designados en el trabajo con códigos A1 hasta A59) de segundo curso de la Licenciatura en Educación Básica de una universidad del norte de Portugal, que poseen una formación en matemáticas muy variada al acceder a la universidad, a saber: un 32% en el curso Científico-Humanístico, un 26% en el curso de Ciencias Sociales, un 22% en un curso profesional y un 22% en la enseñanza básica. Antes de la aplicación de la tarea, los estudiantes han estudiado matemáticas en la universidad en cuatro asignaturas, entre ellas, una en la cual se estudió el tema de probabilidad. Según las percepciones de los estudiantes recogidas en la hoja de respuestas de la tarea, la mayoría manifiesta tener dificultad con las matemáticas (45,8%), que en algunos casos califican de “gran dificultad” (18,6%); algunos estudiantes manifiestan tener poca dificultad (30,5%) o ninguna (1,7%).

Los estudiantes responden a la tarea (Figura 1) una vez acabada la enseñanza sobre el tema de probabilidad (asignatura: Números y probabilidad), y se pretende que calculen las probabilidades de dos sucesos dependientes (“obtener dos bolas blancas” y “obtener una bola de cada color”) y que comparen sus resultados.

En un saco hay cuatro bolas blancas y dos negras, como se muestra en el siguiente dibujo. Las bolas son todas iguales excepto en el color. Sin observar el contenido del saco, se sacan de una vez dos bolas del saco:

Saco: 

¿Qué es más probable obtener: “dos bolas blancas” o “una bola blanca y una bola negra”, o son sucesos igualmente probables? Justifica tu respuesta.

Figura 3. Tarea de propuesta a los futuros profesores.

El experimento que se analiza en este trabajo se basa en una extracción de bolas sin reposición, ya que el experimento “sacar dos bolas de una vez” equivale a “sacar dos bolas sucesivamente sin reposición”. A continuación, mostramos el análisis de los resultados de los futuros profesores a la tarea propuesta, según las tres subtareas que la conforman:

Subtarea 1. Cálculo de la probabilidad: P(“obtener dos bolas blancas”) = $4/6 \times 3/5 = 12/30= 6/15$;

Subtarea 2. Cálculo de la probabilidad: P(“obtener una bola blanca y una negra”) = $(4/6 \times 2/5) \times 2 = 16/30= 8/15$; y

Subtarea 3. Comparación de los resultados de las subtareas 1 y 2 para decidir que el suceso “obtener una bola blanca y una bola negra” es el más probable.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Las respuestas de los futuros profesores a la tarea de investigación (Figura 1), se describen a continuación, atendiendo a los resultados en cada una de las subtareas que la conforman. Las categorías de nuestro análisis atienden a los sesgos descritos en investigaciones previas, explicados en el apartado de antecedentes como son: la reposición, el cálculo de probabilidades simples, la combinación de probabilidades simples, así como no considerar el orden de los resultados en el experimento. Son pocos los casos en que no se calculan probabilidades.

El índice de respuestas correctas en la primera subtarea es bajo (39% de los futuros profesores) y los errores más comunes se deben a no considerar la no reposición en el experimento y al uso de probabilidades simples, que en algunos casos combinan mediante sumas; no encontramos respuestas referidas al orden de los resultados del experimento ya que, en este caso, al tratarse de dos bolas blancas, los futuros profesores han percibido correctamente que la cuestión del orden no es relevante.

La estrategia del cálculo de probabilidades simples es la más utilizada, como se muestra el siguiente ejemplo, en el que A15 calcula la probabilidad de obtener dos bolas blancas a partir del cálculo de obtener una bola blanca: “P(obtener dos bolas blancas) = 4/6 = 2/3” (A15). Otro futuro profesor resolvió la subtarea mediante el cálculo de probabilidades simples, mostrando un razonamiento más avanzado que los anteriores: “Es más probable obtener dos bolas blancas, porque la probabilidad de obtener dos bolas blancas es de: P(2 bolas blancas) = 4/6 + 3/5 = 20/30 + 18/30 = 38/30” (A19). En esta situación, A19 calcula correctamente las probabilidades de cada una de las dos bolas blancas, pero comete el error de combinarlas mediante la suma en lugar de realizar su producto. Este tipo de error, de naturaleza aditiva, también fue observado en investigaciones previas como Fernandes (1999), Green (1982) y Fernandes y Barros (2005), esta última investigación centrada en el conocimiento de futuros profesores de enseñanza básica.

También es elevado el número de respuestas en que no se considera la no reposición en el experimento, como se muestra en el siguiente ejemplo, donde A34 elabora una tabla de doble entrada sin percatarse de que la bola extraída en la primera extracción ya no vuelve al saco: “La probabilidad de sacar dos bolas blancas o una bola blanca y una negra es igual, pues según la tabla de doble entrada [Figura 2] se verifica que P(BB) = 16/36 = 4/9” (A34).

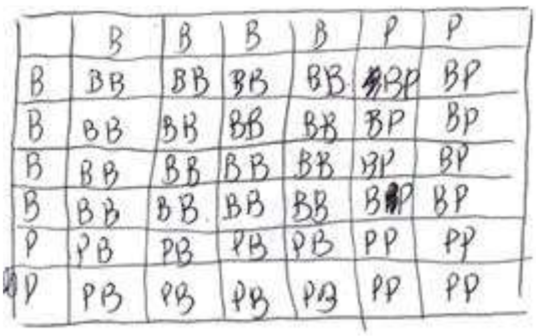

Figura 2. Tabla de doble entrada elaborada por A34 para la resolución de la tarea

En la Tabla 1 se resumen los resultados obtenidos por los futuros profesores en la subtarea 1, que en su mayoría utilizan cálculos para responder a la tarea; sólo el 22% utiliza el diagrama de árbol (11 futuros profesores en las respuestas correctas y 2 que incorrectamente consideran la reposición) y el 5,1% la tabla de doble entra (sólo 3 futuros profesores que no consideran la no reposición en el experimento) para obtener el espacio muestral.

Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) de estrategias utilizadas por los futuros profesores en la subtarea 1

Estrategia utilizada	Frecuencia (%) de futuros profesores
Respuesta correcta	23(39)
Reposición	15(25,4)
Cálculo de probabilidades simples	16(27,1)
Suma de probabilidades	1(1,7)
No calcula probabilidades	4(6,8)

El porcentaje de respuesta correcta a la subtarea 2 desciende, aunque no mucho (del 39% en la subtarea 1 al 37,3% en la subtarea 2). Los futuros profesores hacen uso de las mismas estrategias que utilizaron para resolver la subtarea 1, añadiendo la estrategia incorrecta de no considerar el orden de los resultados en el experimento, cuyos casos se añaden a la categoría de reposición, ya que los alumnos suelen cometer ambos fallos, como se muestra en el siguiente ejemplo: "P(obtener una bola blanca y otra negra) = P(1ª bola blanca) × P(2ª es bola negra) = 4/6 × 2/6 = 8/36 = 2/9" (A8). Esta estrategia es la más utilizada por los futuros profesores (39% del total de futuros profesores) donde el 69,6% de los futuros profesores que la usan no consideran la no reposición en el experimento y el 39,1% no consideran el orden de obtener bola blanca en la primera o segunda extracción. En menor medida encontramos futuros profesores que calculan probabilidades simples para obtener el resultado, donde dos de ellos obtienen la probabilidad a través de la suma de las respectivas probabilidades simples.

En la Tabla 2 se resumen los resultados obtenidos por los futuros profesores en la subtarea 2, donde observamos que resultó incorrecta por la mayoría de futuros profesores. Los futuros profesores, en su mayoría, utilizan cálculos para responder a la tarea; sólo el 22% utiliza el diagrama de árbol (10 futuros profesores en las respuestas correctas y 3 que incorrectamente consideran la reposición y/o el orden) y el 5,1% la tabla de doble entra (sólo 3 futuros profesores que consideran la reposición y/o el orden) para obtener el espacio muestral.

Tabla 2. Frecuencia (y porcentaje) de estrategias utilizadas por los futuros profesores en la subtarea 2

Estrategia utilizada	Frecuencia (%) de futuros profesores
Respuesta correcta	22(37,3)
Reposición y/o orden	23(39)
Cálculo de probabilidades simples	9(15,2)
Suma de probabilidades	2(3,4)
No calcula probabilidades	3(5,1)

Podemos observar un descenso de casi a la mitad de futuros profesores que utilizan como estrategia el cálculo de probabilidades simples en la subtarea 2, en comparación con la subtarea 1, hecho que puede ser debido a que los futuros profesores perciben mejor la necesidad de considerar los sucesos relacionados, por lo que tienden a combinar las probabilidades de ambas extracciones. Aún así, el índice de éxito en las dos subtareas es muy similar, por lo que los futuros profesores muestran dificultades en el desempeño de la probabilidad en estas experiencias compuestas.

En la resolución de la subtarea 3, el porcentaje de futuros profesores que contestan correctamente es similar al de las subtareas anteriores aunque un poco inferior (32,2% de futuros profesores), lo que muestra que los futuros profesores basan su elección en los resultados de las subtareas 1 y 2, por lo que sus conocimientos sobre probabilidad en experiencias compuestas se muestran insuficientes.

La mayoría de futuros profesores eligen la opción incorrecta de mayor probabilidad de obtener dos bolas blancas. Utilizan varias razones en sus argumentos pero, la mayor parte de ellos (59,4%), se refieren a la cantidad de bolas blancas en el saco, por lo que reducen la complejidad de la situación planteada al caso de probabilidades simples, como se muestra en el siguiente ejemplo: "Es más probable obtener dos bolas blancas porque en el saco hay más bolas blancas que negras, por lo que la probabilidad de obtener blanca es dos veces mayor que la de obtener negra: P(B) = 2P(N)" (A40). Este error también se observa en A9, que calcula explícitamente las probabilidades simples de los sucesos "obtener bola blanca" y "obtener bola negra": "Bolas blancas = 4/6; Bolas negras = 2/6; Respuesta: Es más probable obtener dos bolas blancas porque existe un mayor número de bolas blancas que de bolas negras" (A9).

En otros casos, los futuros profesores optan por la opción de dos bolas blancas por errores que cometen en los cálculos, o por haber usado estrategias erróneas en las subtareas 1 o 2, como el ejemplo que se muestra a continuación de A58, quien no considera el orden:

> P(obtener dos bolas blancas) = 4/6 = 2/3
> P(obtener una bola blanca y una bola negra) = 4/6 × 2/5 = 8/30 = 4/15
> Respuesta: Es más probable obtener dos bolas blancas que obtener una bola blanca y una bola negra pues 4/6 > 4/15.

Finalmente, los futuros profesores eligen la opción de que los dos sucesos son igualmente probables, principalmente porque consideran la reposición en el experimento. Un ejemplo es A11, que a pesar de utilizar el diagrama de árbol para sus cálculos, no evita que concluya erróneamente que los dos sucesos son igualmente probables: "P(obtener bolas blancas) = 4/6 × 4/6 = 16/36 = 4/9; P(una bola blanca y una bola negra) = 4/6 × 2/6 + 4/6 × 2/6 = 8/36 + 8/36 = 16 / 36 = 4/9; Respuesta: Luego son igualmente probables ya que ambos tienen igual probabilidad P = 4/9". El error de la reposición le conduce a un error en la construcción del propio diagrama (Figura 3).

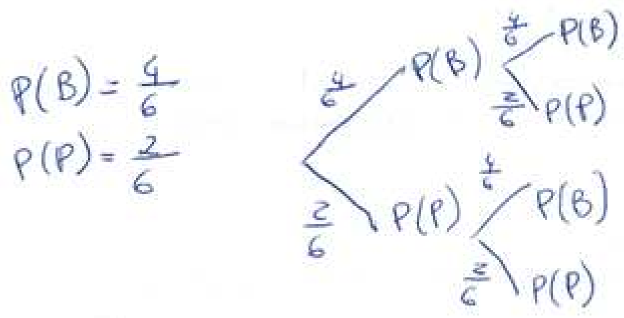

Figura 3. Diagrama de árbol del futuro profesor A11

En la Tabla 3 se resume los resultados de las respuestas de los futuros profesores a la subtarea 3, Podemos observar que la mayor elección se corresponde con el suceso "obtener dos bolas blancas", mientras que la elección de que los sucesos son igualmente probables es la menos elegida, en contra de lo ocurrido en la investigación de Fernandes (1999) con alumnos de 8º y 11º curso, donde el saco se componía de igual número de bolas blancas y negras.

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de respuestas de los futuros profesores en la subtarea 3

Respuesta	Frecuencia de futuros profesores (%)
Es más probable obtener dos bolas blancas	32(54,2)
Es más probable obtener dos bolas de cada color	19(32,2)
Los sucesos son igualmente probables	7(11,9)
No responde	1(1,7)

CONCLUSIÓN

En el estudio que presentamos se evalúan las respuestas de futuros profesores de enseñanza básica a una tarea sobre probabilidad en experiencias compuestas. La mayoría muestra dificultades en identificar un suceso como más probable según la extracción de bolas de un saco. Los principales errores son debidos a la dificultad en relacionar probabilidades de experiencias simples con probabilidades en experiencias compuestas, no considerar la no reposición en el experimento o no atender al orden para identificar los resultados de la experiencia compuesta. Todos estos contenidos forman parte del conocimiento común del contenido que los profesores debiesen poseer, en el sentido de Hill, Ball y Schilling (2008), ya que se refieren a conocimientos básicos y para lo que nuestros futuros profesores debiesen estar formados para su futura labor docente.

Las dificultades observadas en estudios previos (Fernandes, 1999, 2001; Fischbein, Nello y Marino, 1991; Green, 1982; Polaki, 2005) fueron confirmadas en el presente estudio. En este caso, la mayoría eligió como suceso más probable obtener dos bolas blancas que dos bolas de diferente color de un saco con el doble de bolas blancas que negras (4 bolas blancas y 2 bolas negras). Esta elección se apoya tanto en cálculos incorrectos de probabilidades como en concepciones incorrectas sobre probabilidad en experiencias compuestas. Aunque no siempre se manifiesta de modo explícito, se deduce, principalmente, un razonamiento aditivo en la decisión de considerar más probable obtener dos bolas blancas, basado en la cantidad de bolas del saco. Este razonamiento lleva asociadas estrategias como el cálculo y la comparación de probabilidades en experiencias simples.

La elección de que ambos sucesos ("obtener dos bolas blancas" y "obtener una bola de cada color") son igualmente probables fue poco elegida por los futuros profesores. De algún modo, confirmamos la hipótesis de que la composición de bolas del saco es una variable fuertemente decisiva en la comparación de probabilidades compuestas ya que, la cuestión de la composición de bolas del saco en nuestro estudio se basó en resultados en estudios previos como el de Fernandes (1999), donde cerca de tres de cada cuatro alumnos de 8º y 11º curso eligieron como igualmente probables los sucesos "obtener dos bolas blancas" y "obtener una bola de cada color" en un saco con 2 bolas blancas y 2 negras. Aunque el presente estudio se compone de futuros profesores de enseñanza básica y no tanto de estudiantes, como en Fernandes (1999), el estudio que presentamos en este trabajo ayuda a confirmar nuestra hipótesis. Así es que, los futuros profesores se centran en el mayor número de bolas blancas en relación al número de bolas negras para decidir su elección, concluyendo equivocadamente que es más probable obtener dos bolas blancas.

Con todo ello, recomendamos una mejor preparación en probabilidad en experiencias compuestas, principalmente en el profesorado encargado de impartir estos conceptos, donde sería adecuado discutir con ellos cada uno de los objetos matemáticos implicados en su conocimiento (lenguaje, definiciones, tipos de situaciones-problema, procedimientos, propiedades y tipos de argumentación) así como los sesgos de razonamiento descritos en el presente trabajo. Todo ello favorecerá el desarrollo del conocimiento común del contenido del profesor, en el sentido de Hill, Ball y Schilling (2008). Como sugieren Díaz y de la Fuente (2005), las soluciones erróneas pueden discutirse en clase donde la simulación de las experiencias descritas y el uso de diversas representaciones del lenguaje (diagrama de árbol o tablas de doble entrada, entre otros) pueden contribuir a la mejora de su aprendizaje.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC.: American Educational Research Association.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e Implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Épsilon*, *59*, 245-260.

Estrada, A., Díaz, C. y de la Fuente, E. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En M. P. Bolea, M. Moreno, M. J. González (Eds.), *Investigación en educación matemática X* (pp. 277-284). Huesca: SEIEM.

Fernandes, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Fernandes, J. A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, *XX*(2), 3-32.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F. y Gea, M. M. (2014). Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. *Quadrante*, *XXIII*(1), 43-61.

Fernandes, J. A., Correia, P. F. y Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4*, 5-26.

Fernandes, J. A. y Barros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática (CIBEM)*, Porto, Portugal: Faculdade de Ciências.

Fischbein, E., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1991). Factors afecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 523-549.

Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15*, 1–24.

Green, D. R. (1982). *Probability concepts in 11-16 year old pupils*. Loughborough, UK: Center for Advancement of Mathematical Education in Technology.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Lecoutre, M. -P. y Durand, J. -L. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 357-368.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação. (2014). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Autor.

Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 191–214). New York, NY: Springer.

Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88*(421), 1-8.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *33*(1), 59-84.