APRENDIZAJE DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR SOBRE LA COMPRENSIÓN DEL LÍMITE DE UNA FUNCION EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Prospective mathematics teachers' learning about high school students' understanding of limit concept

[a]Fernández, C., [b]Sánchez-Matamoros, G., [a]Callejo, M. L. y [a]Moreno, M.

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Sevilla

Resumen

Este estudio tiene como objetivo caracterizar cómo estudiantes para profesor desarrollan una mirada profesional en relación a la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un punto. Veinticinco estudiantes para profesor participaron en un entorno de aprendizaje diseñado ad hoc considerando las destrezas de identificar, interpretar y tomar decisiones de acción que conceptualizan la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Los resultados indican que el desarrollo de la mirada profesional se vinculó a reconocer los elementos matemáticos que son relevantes en la comprensión del concepto, a ser capaz de considerar diferentes progresiones en el aprendizaje, y a llegar a proponer y justificar decisiones de acción centradas en potenciar los procesos cognitivos que articulan la comprensión del concepto, más allá de las referencias curriculares.

Palabras clave: *aprendizaje del estudiante para profesor, mirar profesionalmente, concepto de límite.*

Abstract

The goal of this study is to characterize how do prospective teachers develop the noticing skill in relation to the teaching and learning of the limit of a function at a point. Twenty-five prospective teachers participated in a learning environment designed ad hoc considering the related nature of the skills of identifying, interpreting and deciding how to respond that conceptualize the skill of noticing students' mathematical thinking. Results indicate that the development of prospective teachers noticing implicated the recognition of the mathematical elements that are relevant in the concept understanding, the consideration of different progressions in the students' learning, and the proposal and justification of instructional decisions focused on enhancing students' cognitive processes that can articulate the concept understanding, beyond curricular references.

Keywords: *prospective teachers' learning, professional noticing, limit concept.*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Las investigaciones centradas en la formación de futuros profesores de matemáticas destacan la importancia de la relación entre el conocimiento de contenido matemático y el conocimiento de matemáticas y los estudiantes (Ball, Thames y Phelps, 2008; Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; Spitzer, Phelps, Beyers, Johnson y Sieminski, 2011). Esta relación es necesaria para la realización de tareas profesionales como anticipar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y tomar decisiones de acción. En este contexto, los estudios están mostrando que la identificación de los elementos matemáticos importantes (conocimiento de contenido matemático) juega un papel

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M. L. y Moreno, M. (2016). Aprendizaje de estudiantes para profesor sobre la comprensión del límite de una función en estudiantes de bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 227-236). Málaga: SEIEM.

fundamental en la interpretación de la comprensión del estudiante (Fernández, Llinares y Valls, 2012; Magiera, va den Kieboom y Moyer, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015). Esta relación fundamenta las destrezas de identificar, interpretar y decidir que son la base de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason 2002).

Jacobs et al., (2010) conceptualizan esta competencia como estas tres destrezas interrelacionadas: identificar los elementos matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes; interpretar la comprensión del estudiante y decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión del estudiante. Algunas investigaciones previas se han centrado en cómo los estudiantes para profesor aprenden a mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes en diferentes dominios matemáticos y han empezado a proporcionar características que definen el desarrollo de esta competencia. Por ejemplo Fernández et al. (2012) en el razonamiento proporcional, Schack et al. (2013) en la numeración temprana, Son (2013) con los conceptos de razón y proporción, Magiera, et al. (2013) en el pensamiento algebraico y Sánchez-Matamoros et al. (2015) en el concepto de derivada. Nuestro estudio se integra en esta línea de investigación y en particular se centra en caracterizar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en relación al concepto de límite de una función en un punto.

La selección de este dominio matemático viene dada porque diferentes investigaciones indican que el concepto de límite es una noción difícil (Cornu, 1991; Cottrill et al., 1996; Swinyard y Larsen, 2012; Williams, 1991). La dificultad que presentan los estudiantes para comprender la definición métrica del límite

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \partial > 0 \; tal\; que \; \forall x,\; 0 < |x-a| < \partial \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de su concepción dinámica (Blázquez y Ortega, 2002) que puede ser definida como: "Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se debiera escribir $\lim_{x \to a} f(x)$, si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes $f(x)$ se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada"

Algunas investigaciones (Cottrill et al., 1996; Swinyard y Larsen, 2012) indican que relacionar la coordinación de los dos procesos de aproximación con la cuantificación derivada de la concepción métrica hace el concepto de límite difícil para muchos estudiantes. Desde este punto de vista, los estudiantes deben coordinar un proceso de aproximación en el dominio con un proceso de aproximación en el rango a través de la función, considerando diferentes modos de representación, cuando tienen que encontrar el limite (Juter, 2006; Williams, 1991). Conocer las características de cómo los estudiantes de bachillerato comprenden el concepto de límite puede proporcionar a los estudiantes para profesor la información necesaria no solo para interpretar la comprensión de los estudiantes sino para tomar decisiones de acción basadas en la comprensión de los estudiantes.

El objetivo de nuestra investigación es caracterizar cómo estudiantes para profesor desarrollan la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio específico del límite de una función en un punto. Es decir, caracterizar cómo los estudiantes para profesor aprenden sobre la progresión en el aprendizaje del concepto de límite de una función de los estudiantes de bachillerato.

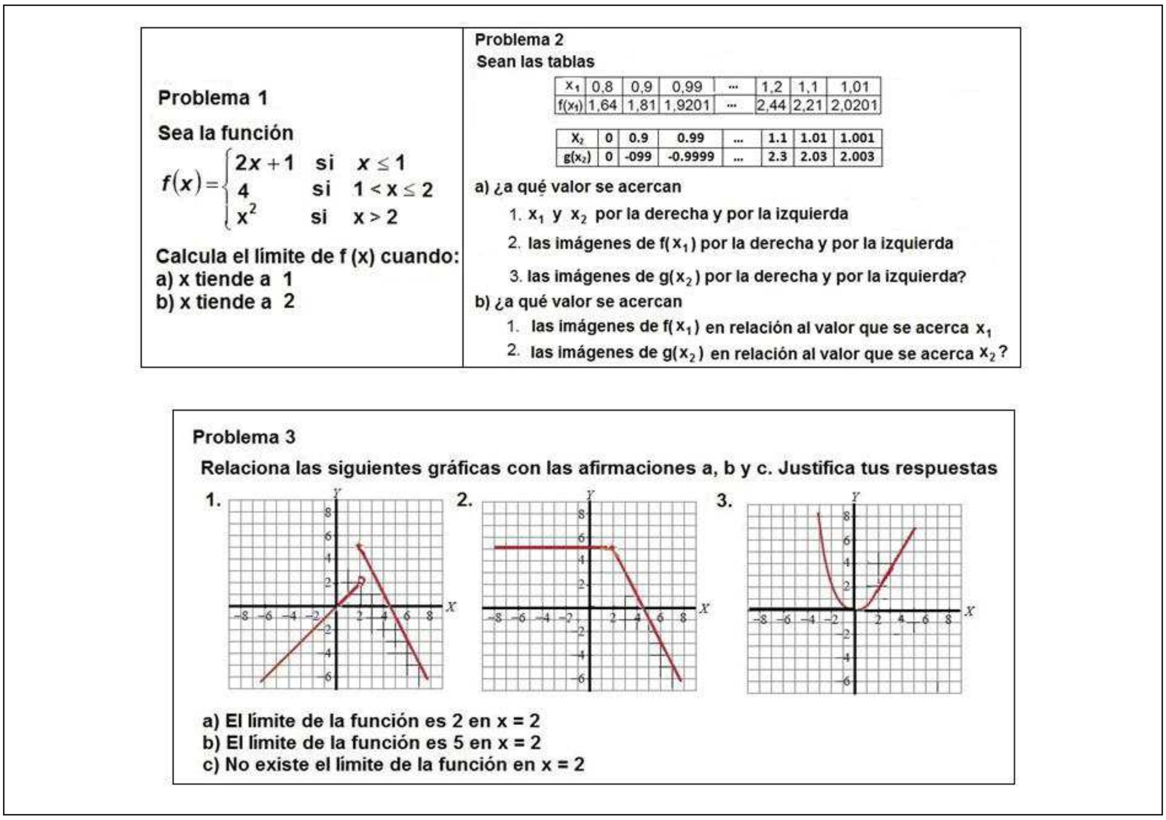
MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes fueron 25 estudiantes para profesor matriculados en el Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria. Estos estudiantes para profesor procedían de diferentes grados o licenciaturas: matemáticos, físicos, ingenieros y arquitectos. Una de las asignaturas del Máster tiene como uno de sus objetivos que los estudiantes para profesor aprendan a identificar características de la progresión de la comprensión de estudiantes de educación secundaria. Esta asignatura está dividida en varios entornos de aprendizaje en los que se tratan diferentes tópicos matemáticos. El estudio presentado aquí se centra en el concepto de límite de una función en un punto.

Entorno de aprendizaje

El objetivo del entorno de aprendizaje es que los futuros profesores aprendan a identificar características de la progresión de la comprensión de los estudiantes de bachillerato y a proponer decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su comprensión. El entorno de aprendizaje consta de 5 sesiones de 2 horas. En la sesión 1, los estudiantes para profesor resolvieron tres problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto, tomados de libros de texto de bachillerato e indicando los elementos matemáticos y modos de representación que se usaban para su resolución (Figura 1). Para ello, usaron un documento con la definición de la concepción dinámica de límite y los elementos matemáticos que la conforman (Pons, Valls y Llinares, 2012): (i) función, (ii) aproximación lateral por la derecha y por la izquierda (en el dominio, y en el rango, tanto si son coincidentes como si no lo son), y (iii) coordinación, a través de la función, de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango considerando distintos modos de representación (gráfico, algebraico y numérico).



Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1
b) x tiende a 2

Problema 2

Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

b) ¿a qué valor se acercan
1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas

1. 2. 3.

a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

Figura 4. Problemas procedentes de los libros de texto sobre concepto de límite de una función en un punto usados en la sesión 1

En la sesión 2, los estudiantes para profesor debían anticipar respuestas hipotéticas de estudiantes de bachillerato a dichos problemas (Figura 2). El objetivo era que los estudiantes para profesor generaran respuestas hipotéticas que reflejaran diferentes niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto en estudiantes de primero de bachillerato y que propusieran nuevos problemas que ayudaran a los estudiantes de bachillerato a avanzar en su comprensión.

> a) *Indica que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 1º de Bachillerato, en cada problema para indicarte que ha comprendido el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*
>
> b) *Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 1º de Bachillerato, en cada problema para que muestre que tiene ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*
>
> c) *Como profesor de estos alumnos propón tareas concretas:*
>
> - *para confirmar que María ha alcanzado el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*
> - *para que Pedro alcance el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.*

Figura 2. Cuestiones de la tarea de anticipación (Sesión 2)

En las sesiones 3 y 4, los estudiantes para profesor tenían que interpretar las respuestas dadas por cuatro estudiantes de bachillerato (Pablo, Rebecca, Luiggi y Jorge) a tres problemas en relación al límite de una función en un punto usando como referencia un documento que sintetizaba las características de la comprensión del concepto de límite desde investigaciones previas (Cornu, 1991; Cottrill et al., 1996; Junter, 2006; Pons, 2014; Swinyard y Larsen, 2012). Las respuestas de los cuatro estudiantes de bachillerato evidenciaban diferentes niveles de comprensión del límite de una función en un punto (Pons, 2014; Tabla 1). La Figura 3 muestra los problemas utilizados y las respuestas de Pablo (alumno con nivel de comprensión alto).

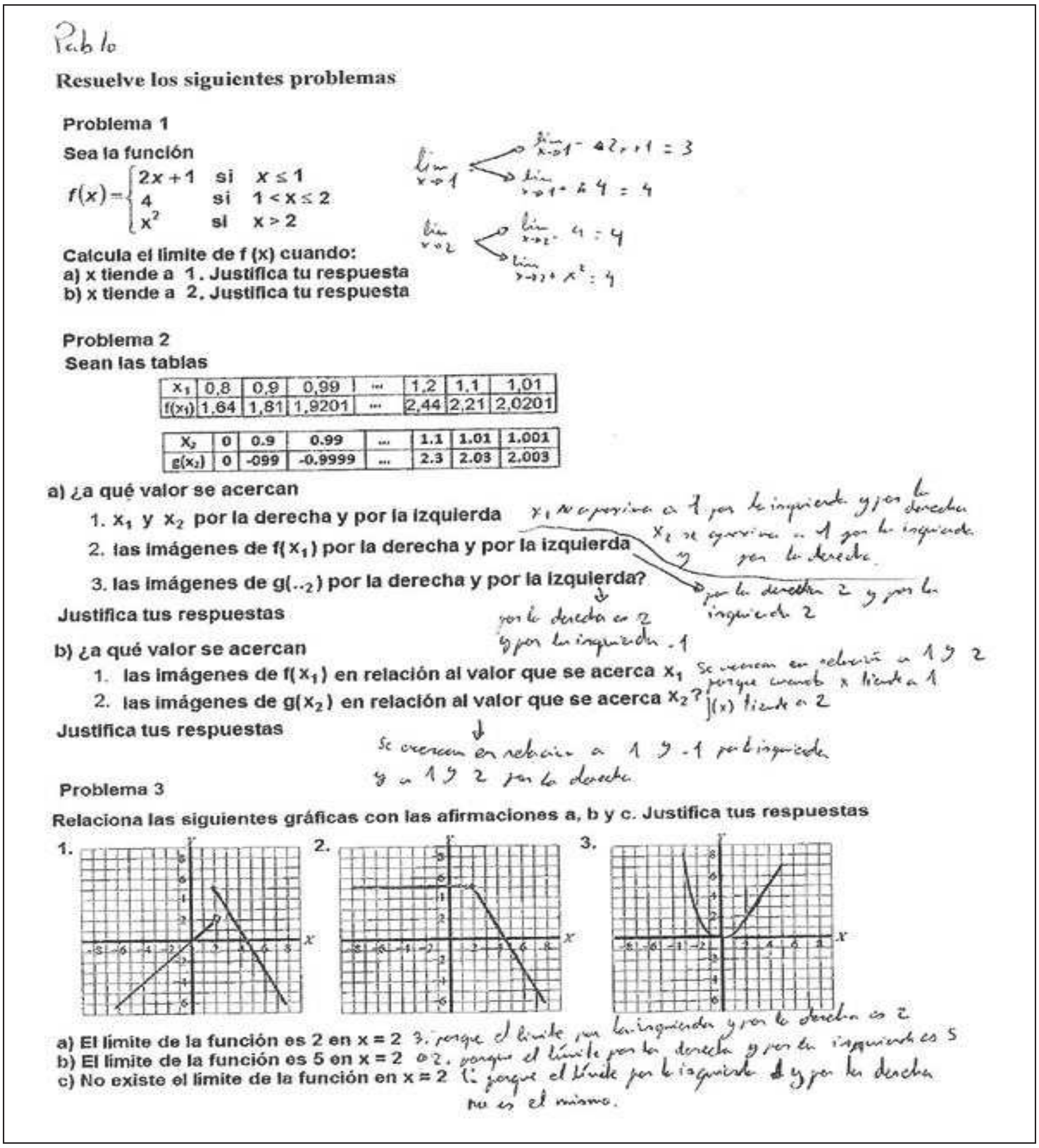
Tabla 1. Características de la comprensión del concepto de límite de cada estudiante de bachillerato

Estudiante hipotético	Características de su comprensión del concepto de limite derivadas de las respuestas a los tres problemas	Nivel comprensión
Pablo	coordinaba las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación (analítico, numérico y gráfico)	Alto
Rebeca	solo coordinaba las aproximaciones en el modo gráfico (y cuando los límites eran coincidentes	Bajo
Luiggi	coordinaba las aproximaciones en el dominio y en el rango en los tres modos de representación	Alto
Jorge	coordinaba en modo numérico y gráfico (este último solo cuando los límites eran coincidentes)	Intermedio

Los estudiantes para profesor debían responder a las siguientes cuestiones:

> - *Describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado el "alumno X" para resolverlos e indica si ha tenido dificultades y por qué.*
> - *A partir de las descripciones de cómo el alumno X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el alumno X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir delos elementos y los modos de representación.*
> - *Considerando la comprensión de límite de una función de un punto del alumno X mostrada en la resolución de los problemas, diseña una tarea para mejorar esta comprensión. Justifica tu respuesta.*

En las cuatro primeras sesiones los estudiantes para profesor resolvieron las tareas en grupos de cinco y todas estas tareas fueron discutidas en clase. En la sesión 5, los estudiantes para profesor resolvieron una tarea similar a la propuesta en las sesiones 3 y 4 (interpretar y proponer nuevas tareas) de manera individual.


Pablo

Resuelve los siguientes problemas

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1. Justifica tu respuesta
b) x tiende a 2. Justifica tu respuesta

$\lim_{x \to 1}$ $\lim_{x \to 1^-} 2x+1 = 3$; $\lim_{x \to 1^+} 4 = 4$

$\lim_{x \to 2}$ $\lim_{x \to 2^-} 4 = 4$; $\lim_{x \to 2^+} x^2 = 4$

Problema 2

Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. **x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda** x_1 se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha. x_2 se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha.
2. **las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda** por la derecha 2 y por la izquierda 2
3. **las imágenes de g(..2) por la derecha y por la izquierda?** por la derecha es 2 y por la izquierda -1

Justifica tus respuestas

b) ¿a qué valor se acercan
1. **las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1** Se acercan en relación a 1 y 2 porque cuando x tiende a 1 f(x) tiende a 2
2. **las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?**

Justifica tus respuestas

Se acercan en relación a 1 y -1 por la izquierda y a 1 y 2 por la derecha.

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas

1. 2. 3.

a) El límite de la función es 2 en x = 2 3. porque el límite por la izquierda y por la derecha es 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2 2. porque el límite por la derecha y por la izquierda es 5
c) No existe el límite de la función en x = 2 1. porque el límite por la izquierda y por la derecha no es el mismo.

Figura 3. Respuestas de Pablo a los tres problemas (nivel alto) proporcionadas a los estudiantes para profesor

El diseño del entorno de aprendizaje refleja las conexiones entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas que se pretendía que se aprendiera y usara en anticipar posibles respuestas de los estudiantes y en interpretar progresiones en el aprendizaje a partir de un grupo de respuestas. Así, la sesión 1 se centra en la destreza de identificar los elementos matemáticos necesarios para la resolución del problema en los diferentes modos de representación (mencionados anteriormente). La sesión 2 se centra en la relación entre el contenido matemático y la comprensión de los estudiantes (relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el aprendizaje de los estudiantes de bachillerato). El objetivo de esta sesión es que los estudiantes para profesor se centren en esta relación ya que conjeturamos que es necesaria para el desarrollo de las tres destrezas que conceptualizan la competencia una mirada profesional. La sesión 3 se centra en la relación entre las destrezas identificar-interpretar y la sesión 4 en la relación entre las destrezas interpretar-decidir, en el sentido de que es necesario reconocer cómo los estudiantes de bachillerato usan los elementos matemáticos en la resolución del problema para interpretar su comprensión y después poder proponer decisiones de acción que les ayuden a progresar en su aprendizaje.

Análisis

Mediante un proceso inductivo, identificamos semejanzas y diferencias en la manera en la que los cinco grupos de estudiantes para profesor concebían la comprensión de los estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite de una función en un punto y cómo consideraban lo que podían ser evidencias de diferentes niveles de comprensión (progresión del aprendizaje).

Este proceso de análisis nos permitió generar dos categorías en la manera en la que los estudiantes para profesor consideraban lo que significaba *el aprendizaje del concepto de límite*. Por una parte, los que consideraban que el aprendizaje es *todo o nada* y los que podían reconocer *progresiones en el aprendizaje*. Aquellos estudiantes para profesor que entendían la comprensión como todo o nada consideraban solo dos tipos de respuestas en los estudiantes de bachillerato: aquellos estudiantes que comprendían todo, es decir, aquellos que coordinaban las aproximaciones en el dominio y en el rango en los diferentes modos de representación y aquellos estudiantes que no comprendían nada, es decir, no llegaban a coordinar en ningún modo de representación. Aquellos estudiantes para profesor que reconocían progresiones en la comprensión consideraron que la consolidación del aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto está relacionada con ser capaz de usar la idea de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en una situación nueva para el estudiante. Estos estudiantes para profesor consideraban como evidencias de la falta de comprensión de la concepción dinámica de límite cuando el estudiante no realizaba aproximaciones laterales y coordinaciones en algún modo de representación.

En relación a las propuestas de enseñanza generadas, el análisis nos permitió identificar tres categorías: decisiones generales sobre la enseñanza-aprendizaje, decisiones basadas en contenidos curriculares y decisiones que consideraban la posibilidad de apoyar procesos cognitivos. Las dos últimas categorías tienen en cuenta la comprensión del estudiante, sin embargo las decisiones basadas en contenidos curriculares se basan en qué contenido matemático va después en el currículo y las decisiones basadas en procesos cognitivos se centran en proponer tareas con demanda cognitiva superior no centradas en qué contenido va después sino en los proceso cognitivos (por ejemplo, el proceso inverso o de desencapsulación del concepto).

RESULTADOS

Identificamos tres características en la manera en la que los estudiantes para profesor estaban aprendiendo sobre la progresión en el aprendizaje del límite de una función de estudiantes de bachillerato. Estas características vienen definidas por la relación entre los cambios experimentados a lo largo del entorno de aprendizaje sobre la manera de entender el aprendizaje del límite (vinculados a las tareas de anticipar e interpretar) y los cambios en la manera en la que generaban propuestas de enseñanza (vinculados a la tarea de tomar decisiones de acción).

Una primera característica está vinculada a los estudiantes para profesor que concebían el aprendizaje de los estudiantes como *todo o nada* y no cambiaron a lo largo de su participación en el entorno de aprendizaje (grupo G3). Estos estudiantes para profesor no reconocían los elementos matemáticos relevantes en el aprendizaje del límite y siempre realizaban comentarios generales sobre la comprensión de los estudiantes y al proponer tareas de enseñanza para apoyar la progresión en el aprendizaje de los estudiantes de bachillerato.

Una segunda característica está vinculada a los estudiantes para profesor que inicialmente concebían el aprendizaje como *todo o nada* y proponían decisiones de acción generales o vinculadas a la organización curricular del nivel educativo, pero que después de participar en el entorno de aprendizaje empezaron a reconocer diferentes niveles de progresión en el aprendizaje del límite e incorporaron a sus justificaciones de las decisiones de acción elementos relativos a los contenidos curriculares. Dos grupos de estudiantes para profesor evidencian esta característica (grupos G2 y G5). Estos estudiantes para profesor comenzaron su participación en el entorno de aprendizaje entendiendo la comprensión como dicotomía todo o nada (tarea de anticipación) pero cambiaron su manera de interpretar entendiendo la comprensión de los estudiantes de bachillerato como progreso. Estos estudiantes para profesor mostraron evidencias de identificar los elementos matemáticos de los problemas en los distintos modos de representación desde el primer momento. Esto les permitió identificar los niveles de comprensión de los estudiantes de bachillerato. Por ejemplo, los estudiantes para profesor del grupo G2, en la tarea de anticipación, consideraron como evidencia de la comprensión del límite de una función en un punto que los estudiantes de bachillerato fueran capaces de coordinar los valores de la x y los valores de $f(x)$ en los distintos intervalos de definición en diferentes modos de representación. Por ejemplo, para el modo analítico dieron la respuesta para María que aparece en la Figura 4 y la justificaron del siguiente modo:

> *[María, un estudiante hipotético con nivel alto de comprensión] Demuestra tener el <u>concepto de función</u> al utilizarlo correctamente a lo largo del ejercicio. Entenderíamos que no comprende el concepto si en el ejemplo eligiese siempre la misma rama o equivocadas. <u>La idea de aproximación lateral en el dominio</u> se corresponde con el hecho que selecciona adecuadamente la rama de la función. <u>La idea de aproximación en el rango</u> se demuestra cuando sustituye en el límite por la aproximación de la variable independiente. Demuestra <u>coordinar cuando es capaz de establecer según la rama el valor del límite</u>. Finalmente demuestra que entiende el concepto de límite y su existencia si comprueba la coincidencia de las aproximaciones calculadas en el rango.*

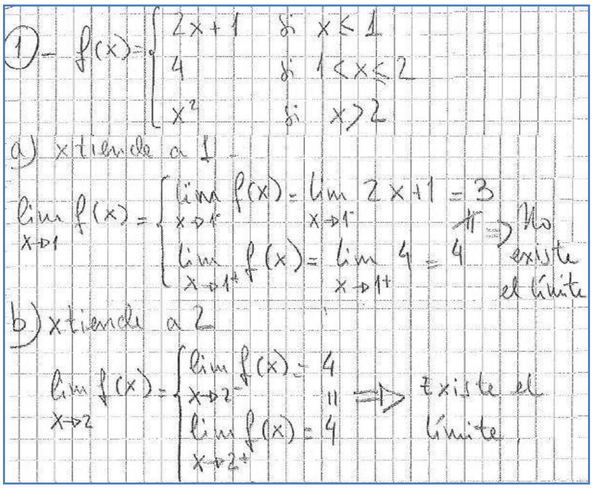


Figura 4. Respuesta propuesta por G2 que podía evidenciar un nivel alto de comprensión en el nivel analítico (tarea de anticipación)

Para señalar evidencias de un nivel bajo de comprensión del concepto de límite de una función en un punto (anticipación de la respuesta de Pedro), indican que el estudiante sólo debería ser capaz de realizar aproximaciones laterales donde estaba definida la función en el punto. Por ejemplo, indicando: *"no entiende que la variable independiente se aproxima a un punto pero que nunca se alcanza"*, y podían asociar el límite al valor de la función en el punto. Se observa, por tanto, que el grupo G2 había identificado elementos matemáticos importantes (ver énfasis en la justificación de la respuesta de María), sin embargo entendía la comprensión de los estudiantes de bachillerato como "todo o nada".

Por otra parte, en la tarea de interpretación, el grupo G2 identifica elementos matemáticos importantes poniendo evidencias en todas las respuestas de los cuatro estudiantes a los diferentes problemas. La Figura 5 recoge cómo este grupo identifica los elementos matemáticos importantes en las respuestas del estudiante con un nivel alto de comprensión (Pablo) a los tres problemas (analítico, numérico y gráfico).

Problema 1

Pablo usa correctamente la idea de función y realiza correctamente las aproximaciones laterales, además es capaz de realizar la coordinación de los dos procesos de aproximación al establecer la relación entre el dominio y el rango. Sin embargo no concluye el ejercicio al no indicar si existe el límite o no. Después de haber leído los tres problemas se advierte que confunde el término "aproximación" con el término "límite", este es el motivo por el que da por concluido el ejercicio.

Problema 2

Interpreta correctamente los datos de la tabla, eso nos demuestra que usa correctamente la idea de función. Realiza correctamente las aproximaciones laterales y sabe realizar la coordinación a pesar de expresar los conceptos de forma deficiente.
En el apdo a 1. demuestra que realiza correctamente la aprox. en el dominio.
En el apdo a2, 3 demuestra que realiza correctamente la aprox en el rango.
Demuestra coordinación en el apdo b.

Problema 3

Sabe manejar las representaciones gráficas de las funciones, realiza correctamente las aproximaciones laterales y coordina correctamente los procesos de aproximación en el dominio y en el rango. Sin embargo se aprecia en su discurso que confunde el concepto de aproximación y límite.

Figura 5. Respuesta del Grupo 2 a la cuestión "describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado Pablo" (tarea de interpretar)

Además este grupo identifica las características de la comprensión de Pablo sobre el límite de una función en un punto identificando que estaría en un nivel 3 (alto) de comprensión (Figura 6).

PABLO COMPRENDE EL CONCEPTO DE LÍMITE PORQUE REALIZA BIEN LAS APROXIMACIONES POR LA IZQUIERDA Y LA DERECHA EN EL PUNTO ESTUDIADO, Y ES CAPAZ DE COORDINAR, EN LAS TRES FORMAS DE REPRESENTACIÓN. CONSIDERAMOS QUE PABLO ESTÁ EN EL NIVEL 3

Figura 6. Respuesta del Grupo 2 a la cuestión "a partir de las descripciones de cómo Pablo ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo Pablo comprende el concepto de límite de una función en un punto? (tarea de interpretar)

El grupo G2 comenzó dando decisiones generales y el grupo G5 acciones basadas en contenidos curriculares, tras el cambio en su manera de interpretar ambos grupos dieron acciones basadas en contenidos curriculares. Por ejemplo, los estudiantes para profesor del G2 proponen como ejercicio para afianzar el aprendizaje de los estudiantes que habían interpretado como de nivel alto de comprensión (Luiggi y Pablo de la tarea de interpretar) el que aparece en la Figura 7. Este ejercicio se centra en una función con discontinuidad evitable justificada desde lo que establece el currículo.

Luiggi conoce la idea dinámica y métrica de límite. Por tanto, para afianzar sus conocimientos le propondremos el siguiente problema:
Una función definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

También usaremos el problema propuesto para Pablo

Figura 7. Respuesta del G2 a la cuestión "considerando la comprensión de límite de una función de un punto de Pablo, diseña una tarea para mejorar esta comprensión" (tarea de interpretar)

Finalmente, la tercera característica del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente viene evidenciada por la progresión de los estudiantes para profesor (G1, G4) que identificaron los elementos matemáticos importantes y los relacionaron con los diferentes niveles en la comprensión de los estudiantes de bachillerato tanto en la tarea de anticipación como en la de interpretación de las respuestas de los estudiantes. Aunque los estudiantes para profesor del grupo G1 iniciaron su participación en el entorno de aprendizaje proponiendo acciones basadas en contenidos curriculares y los estudiantes para profesor del G4 acciones basadas en procesos cognitivos, al finalizar su participación en el entorno de aprendizaje ambos grupos justificaron sus acciones de enseñanza basadas en procesos cognitivos que implicaban ejercicios en los que los estudiantes usaran los significados del limite para generar información sobre la función.

CONCLUSIONES

Este estudio tiene como objetivo caracterizar cómo estudiantes para profesor desarrollan una mirada profesional en relación a la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en un punto. Caracterizamos este desarrollo considerando tres tipos de actividades profesionales. En primer lugar, cómo los estudiantes para profesor concebían el aprendizaje del concepto de límite a partir de la realización de *tareas de anticipar* respuestas de estudiantes a problemas de límite de función que evidenciaran diferentes niveles de comprensión. En segundo lugar *cómo interpretaban* respuestas de estudiantes de bachillerato para inferir niveles de progresión en el aprendizaje. Finalmente, cómo generaban y justificaban sus decisiones de enseñanza considerando sus interpretaciones de la comprensión de los estudiantes.

El desarrollo de la mirada profesional se vinculó a dos conexiones. En primer lugar, la relación entre el reconocimiento de los elementos matemáticos que deben ser usados por los estudiantes para evidenciar un nivel alto de comprensión del concepto de limite y la manera en la que se concibe la comprensión de los estudiantes de bachillerato. En segundo lugar, la relación entre la manera en la que se concibe la comprensión y cómo se justifican las decisiones de enseñanza que se proponen.

La manera en la que algunos de los grupos de estudiantes para profesor fueron incorporando los elementos matemáticos que son relevantes en la comprensión del concepto, la consideración de diferentes progresiones en el aprendizaje y la justificación de sus decisiones apoyadas en potenciar los procesos cognitivos en las tareas de anticipar, interpretar y cómo decidir, mostró evidencias del aprendizaje profesional de los estudiantes para profesor y por tanto diferentes niveles de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Teniendo en cuenta cómo se estructuró el entorno de aprendizaje, estos resultados parecen indicar que dicha estructura ayudó a los estudiantes para profesor al desarrollo de las tres destrezas que conceptualizan esta competencia pues cuatro grupos de los cinco fueron capaces de identificar los elementos matemáticos importantes en las respuestas de los estudiantes, interpretar la comprensión de los estudiantes identificando diferentes niveles de comprensión y tomar decisiones de acción que podían ayudar a los estudiantes a progresar conceptualmente.

Este resultado subraya el desafío al que se enfrentan los formadores de profesores de matemáticas al tener que crear entornos de aprendizaje en los programas de formación que permitan el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente ya que se deben superarse concepciones sobre el aprendizaje del tipo todo o nada y poder incorporar el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas en la justificación de sus decisiones de enseñanza. Además, los resultados de esta investigación aportan información para generar descriptores del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Reconocimientos.

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, España y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2015/115 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 57-79.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* pp. 67–83.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153-166). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44*, 747-759.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning, 8,* 407-431.

Magiera, M., van den Kieboom, L. y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435–445). Jaén: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13,* 1305-1329.

Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 379-397.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 49-70.

Spitzer, S., Phelps, C., Beyers, J., Johnson, D. y Sieminski, E. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identity evidence of student mathematical achievement. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 67-87.

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 465-493.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22,* 219-236. .