SIGNIFICADO Y CONCEPCIONES DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS ESCOLARES

Meaning and Conceptions of School Mathematical Concepts

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M.

Universidad de Granada

Resumen

Este estudio ejemplifica un análisis de contenido según varias componentes de significado de un concepto matemático escolar, desarrollado para tres tópicos diferentes del currículo escolar de matemáticas. El trabajo muestra diversas concepciones inferidas de las respuestas obtenidas a través de la aplicación de cuestionarios semánticos y con tres grupos diferentes de estudiantes y de futuros maestros. Tres conceptos se han elegido: la fracción, como relación parte-todo, las razones trigonométricas, así como los números positivos y negativos. En el trabajo se ejemplifica cada componente semántica diferente con solo uno de ellos. Los resultados muestran el dominio de tales nociones, sus diferentes interpretaciones, cómo han sido expresadas y los modos en que han sido usadas. Dichos resultados también muestran una variabilidad y riqueza de respuestas acerca de cada concepto, que se identifican y describen en términos de los componentes semánticos.

Palabras clave: *concepciones, cuestionario semántico, matemáticas escolares, significado de un concepto matemático, triángulo semántico.*

Abstract:

This study exemplifies a content analysis according to various components of the meaning of a mathematical school concept, developed with three different topics of the school mathematical curriculum. The work shows several conceptions inferred from responses obtained through application of semantic questionnaires and with three different groups of school children and pre-service teachers. Three concepts have been chosen: fraction, as a part-whole relationship, trigonometric ratios, as well as the positive and negative numbers, each of which exemplifies a single different component. The results show the domain of such notions, their different interpretations, how they have been internalized and the ways they are used. The results also show a variability and considerable wealth of responses, which have been identified and described in terms of components of meaning.

Keywords: *conceptions, semantic questionnaire, school mathematics, meaning of a mathematical concept, semantic triangle.*

INTRODUCCION

Sostenemos que comprender un concepto matemático es dotarlo de significado, es decir, conocer su definición, representarlo, identificar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, su interpretación y aplicación. Esta afirmación se sigue de la noción de Frege (1996) sobre significado de un concepto matemático, quien la fundamenta en tres componentes:

- Los signos, gráficos y notaciones que lo representan.

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 237-246). Málaga: SEIEM.

- La referencia, o evaluación semántica del concepto.
- Los sentidos, o diversidad de modos en que pueda ser entendido, aplicado e interpretado.

La noción de significado utilizada en este trabajo se desarrolla extensamente en Rico, Lupiáñez y Molina (2013). En ese trabajo se postula también que, en las matemáticas escolares, los conceptos adquieren una variedad de significados más allá del modo formal y simbólico con que vienen establecidos en el currículo y usualmente se enseñan.

Dado que nuestro interés por el significado está centrado en las matemáticas escolares, este trabajo considera como antecedentes distintas aproximaciones al estudio del significado de los contenidos en Educación Matemática, desarrolladas mediante ternas semánticas. Así, Radford (2003) identifica y trabaja con la terna interpretación– concreción– generalización; Vergnaud (1983) desarrolla su terna con las nociones de referente– invariantes– representaciones; Steinbring (1989, 2006) lo hace mediante los conceptos de signo/símbolo– objeto/contexto– concepto; mientras que Frege (1996), a quien seguimos, utiliza la terna signo- sentido- referencia.

Los tres componentes establecidos por Frege constituyen un triángulo semántico que usaremos como categorías para el análisis del significado de un determinado concepto, según distintos modos y momentos, en la matemática escolar. Uno de esos momentos ocurre cuando los profesores se proponen enriquecer el conocimiento de los escolares sobre los contenidos matemáticos, considerando los significados que previamente ellos manejen (Ponte y Chapman, 2008).

El objetivo de este estudio es mostrar la potencialidad de los componentes del triángulo semántico para analizar los significados de distintos conceptos matemáticos e identificar las concepciones que emplean y manifiestan los escolares sobre esos mismos conceptos.

Mas concretamente, mostramos los significados parciales que grupos de estudiantes atribuyen y expresan para tres conceptos matemáticos escolares, establecidos en el currículo.
Para ello, elegimos trabajar con los conceptos de fracción, como relación parte-todo, razón trigonométrica y número entero. Cada uno de ellos centra nuestra reflexión en un componente de significado distinto. Recogemos las respuestas de distintos grupos de estudiantes de Educación Secundaria y de maestros en formación inicial sobre significados de esos conceptos. La reflexión sobre los restantes componentes, en cada caso, se presenta en otros trabajos relacionados (Castro-Rodríguez, 2010; Martín-Fernández, 2013; Vílchez-Marín, 2014).

TRIÁNGULO SEMÁNTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Rico (2012, pp. 52-53; 2016, En prensa) describe un modelo de significado de un concepto matemático escolar basado en la estructura ternaria de Frege como un marco interpretativo del conocimiento matemático de los estudiantes, que responde a las siguientes preguntas básicas: ¿cómo expresan los conceptos y nociones básicas?, ¿sobre qué propiedades o relaciones argumentan sus ideas matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso identifican para el concepto?, ¿qué situaciones, fenómenos o contextos enmarcan, o están en el origen, de sus ideas matemáticas? Los componentes de dicho modelo son:

- La *estructura conceptual*, que comprende la red de conceptos, definiciones y propiedades, junto con aquellos argumentos, normas y otros procedimientos de los que derivan sus modos de razonamiento y sus criterios de veracidad. La referencia, con la cual los estudiantes evalúan la veracidad de su conocimiento acerca de un concepto, viene sintetizada mediante su definición individual del mismo (Fernández-Plaza, En prensa).

- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto, muestran sus propiedades y lo relacionan con otros (Lupiáñez, En prensa).

- Los *sentidos*, que incluyen aquellos modos de uso, contextos, fenómenos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional (Ruiz-Hidalgo, En prensa).

Con la noción de *concepción* nos referimos a aquellas "parcelas" de significado (significados parciales) que emergen de las respuestas (verbales, gestuales, etc.) de los estudiantes ante las demandas que plantean tareas particulares que responden a una determinada caracterización, descripción o definición de un concepto. Una concepción expresa de modo parcial una referencia, unos sistemas de representación y unos sentidos propios. El carácter subjetivo de esta respuesta la diferencia del concepto matemático correspondiente. El análisis mediante los componentes semánticos muestra la diferencia entre el significado de un concepto matemático escolar y las concepciones o significados parciales de los alumnos (Fernández-Plaza, 2015, p.11). Esta interpretación de la noción idea de concepción ha sido abordada por Sierra, González y López (2000) y Vinner (1991).

METODOLOGÍA

Para recoger los significados que manifiestan los participantes sobre las distintas nociones aquí estudiadas (fracciones, razón trigonométrica y números enteros), se construyó en cada uno de estos casos un cuestionario semántico distinto, con diversas tareas, cuestionario que se aplicó a estudiantes de cursos diferentes. Los cuestionarios semánticos recogieron indicios sobre los cuales escrutar el significado que los estudiantes encuestados establecieron para los conceptos matemáticos escolares mencionados. Esta tipología de cuestionarios se propone indagar qué propiedades de los conceptos identifican los sujetos, cómo los denominan y representan, que términos y argumentos emplean para dotarles de sentido, qué valores les atribuyen (Klok, 2014).

Más concretamente, las huellas que recogen los cuestionarios semánticos son palabras, términos, signos, gráficas, frases, relaciones, argumentos, descripciones, gestos y otras notas que muestran un modo de apropiación por el sujeto de un determinado concepto. Los indicios recogidos mediante un cuestionario semántico acerca de un concepto matemático escolar muestran que, cuando un sujeto está *en contacto con* y recibe *formación acerca de* nociones matemáticas, interioriza total o parcialmente dichas nociones y las emplea para pensar con ellas y actuar a partir de ellas, es decir, ofrece pruebas de su comprensión y uso. Esas huellas tienen una variabilidad considerable; se pueden identificar y clasificar mediante los componentes y organizadores semánticos de un concepto matemático (Rico, 2012).

La tabla 1 resume la componente semántica y el contenido matemático tratados en cada cuestionario, junto con el número de participantes en cada trabajo.

Tabla 3. Temas y participantes en cada uno de los estudios

Componente semántica	**Contenido matemático**	**Estudiantes participantes**
Estudio sobre la referencia	Concepto de fracción	358 maestros estudiantes de primer curso del grado de Educación Primaria
Estudio sobre el modo de representación	Concepto de razón trigonométrica	74 estudiantes de 1º de Bachillerato
Estudio sobre sentido y modos de usos	Concepto de número entero	31 estudiantes de 2º de Educación Secundaria Obligatoria

Los participantes responden al correspondiente cuestionario de forma individual. La duración de la prueba, sin tiempo máximo, no superó una sesión de clase. En las distintas aplicaciones están presentes el profesor y uno de los investigadores. Los participantes han recibido instrucción sobre los contenidos encuestados, siempre en un curso o unos meses antes de su aplicación; en ningún caso tenían información previa sobre el cuestionario.

Los datos obtenidos fueron analizados mediante métodos cualitativos. Se utilizó un proceso inductivo para categorizar las respuestas y encontrar relaciones entre las diferentes categorías en los resultados producidos por los participantes (McMillan y Schumacher, 2006).

DISCUSIÓN

Los datos obtenidos de cada contenido sirven para ejemplificar el análisis relativo a un componente semántico determinado, según indica la tabla 1, los cuales pasamos a presentar en cada caso. En primer término se hace una breve descripción del componente semántico en cuestión, a continuación se recogen las cuestiones planteadas y, posteriormente, se describen las concepciones manifestadas por los estudiantes participantes mediante las respuestas recogidas por el cuestionario.

ESTUDIAR LA REFERENCIA: EL CASO DE LAS FRACCIONES

Comenzamos con la *referencia* o *estructura conceptual* ejemplificado por el concepto de fracción, basado en la relación parte-todo. En este caso el análisis muestra que cuando una totalidad, simbolizada por T, se fragmenta o divide en n partes P_i disjuntas, con $1 \leq i \leq n$, con $T = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$, cada una de dichas partes P_i presenta una relación con el todo $R(P_i,T)$. En el proceso de fragmentación de un todo, sus partes P_i pueden ser iguales: $P_i = P_j, \forall i, j$. A cada una de esas partes o porciones iguales la designamos por P. En este caso, la relación entre una de las n partes iguales P de un todo T se convierte en una relación multiplicativa, que se llama relación parte-todo.

Esta conceptualización de la relación parte-todo comprende una serie de hechos y relaciones fundamentales: el verbo, que expresa la acción o intención de fraccionar un objeto en sus partes; el todo que es fraccionado; las partes en las que el todo es fraccionado; la igualdad de las partes; la relación entre cada parte y el todo. Con mayor detalle, esa estructura se puede ver en Castro-Rodríguez, Pita-Pantazi, Rico y Gómez (2015), donde se analizan el concepto desde las tres componentes del triángulo semántico.

Para identificar las concepciones de los escolares sobre este concepto proponemos la tarea 1, seleccionada de un cuestionario semántico sobre fracciones (Castro-Rodríguez, 2010):

Tarea 1: ¿Qué es fraccionar? Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar.

Esta tarea interroga a un grupo de estudiantes para maestro sobre el concepto de fraccionar. Las respuestas de los participantes las organizamos de acuerdo con la presencia o ausencia de los hechos y relaciones fundamentales de la relación parte-todo antes descritos.

Tabla 4. Niveles de respuestas para la tarea 1

Niveles	
(1)	Uno o varios verbos de acción
(2)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a un todo
(3)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a las partes
(4)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a un todo y a las partes
(5)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia a las partes iguales

Niveles	
(6)	Uno o varios verbos de acción; hacen referencia al todo y partes iguales
(7)	Otros

La tabla 2 muestra una progresión de niveles de precisión en las respuestas, según su complejidad, por la mayor o menor presencia de esos elementos.

Los seis niveles encontrados describen con diferentes grados de precisión cómo expresar la relación estructural que define las fracciones. El primer nivel se caracteriza por incluir sólo uno o más verbos de acción. Estos verbos son dividir, distribuir, partir y sus combinaciones posibles. Este tipo de respuesta tiene un significado impreciso, en el que "fraccionar" se presenta sólo como una acción usando uno o más verbos.

El segundo nivel de precisión se establece a partir de las posibles combinaciones de estos tres verbos, así como la totalidad sobre la que se aplica esta acción. Dos respuestas que pertenecen a este nivel son "distribuir una cantidad" o "dividir un todo".

El tercer nivel es el menos frecuente en las respuestas de los sujetos. Este nivel se compone de las posibles combinaciones de los tres verbos con referencia a las partes o el resultado de la acción de romper en partes. Tanto en este caso, como en el anterior, el significado de la relación es impreciso, ya que las respuestas no reflejan todos los datos que establecen la relación. Suponemos que este nivel expresa mayor precisión que el anterior, dado que la idea de la totalidad está implícita en la acción de crear partes. Un ejemplo de respuesta para este nivel es "partir o dividir en partes".

El cuarto nivel está formado por tres datos: verbo de acción, la totalidad y las partes. Este nivel es el segundo más frecuente en las respuestas de los profesores en formación. Incluye respuestas tales como "dividir una cantidad en partes" o "dividir o repartir un todo en partes".

El quinto nivel se identifica por un verbo de acción, que hace referencia a las partes iguales. En este caso, la acción de fraccionar se considera equitativa, ya que los sujetos especifican la naturaleza de las partes. En contraste con el nivel anterior, éste no menciona el todo o totalidad de la que provienen las partes, aunque se considera implícito en la respuesta.

Finalmente, la respuesta que expresa la idea más completa y a su vez más frecuente, está formada por un verbo de acción que hace referencia a un todo dividido en partes iguales. Este nivel representa el significado más preciso.

La figura 1 muestra una relación jerárquica entre los niveles de precisión.

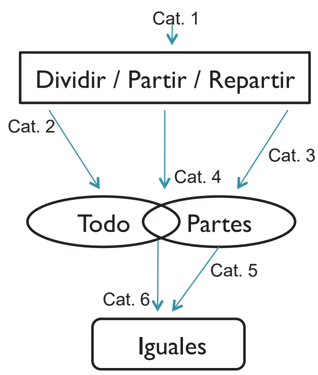

Figura 5. Relaciones entre los niveles de precisión de las respuestas a la tarea 1

ESTUDIAR LA REPRESENTACIÓN: EL CASO DE LA RAZÓN TRIGONOMÉTRICA

Resumimos en este apartado los resultados del análisis de las respuestas de un grupo de estudiantes de bachillerato, correspondientes a tareas que demandan representar las nociones matemáticas relacionadas con las razones trigonométricas

Representaciones de los escolares relacionadas con las nociones de razón trigonométrica

Expertos en educación matemática, han organizado los contenidos matemáticos escolares con criterios cognitivos. Tales criterios consideran el modo en que las personas los entienden, aprenden y utilizan. Para esa caracterización los expertos usan dos grandes campos: el campo conceptual y el campo procedimental (Bell, Costello y Küchemann, 1983). Complementariamente, diferencian tres niveles de complejidad en cada uno de ellos. En el campo conceptual destacan hechos, conceptos, y estructuras. En el ámbito de los procedimientos los tres niveles que se consideran son: destrezas, razonamientos y estrategias.

En la trigonometría impartida en la enseñanza secundaria se observan dos ideas prioritarias que identifican esos contenidos: los conceptos geométricos, relacionados con la razón trigonométrica, con la identificación de la relación como una constante característica de cada ángulo; y el concepto analítico, asociado a la función trigonométrica.

Este estudio se ha centrado en la razón trigonométrica y entre las nociones que la organizan, destacan tres: circunferencia, triángulo rectángulo y ángulo (Byers, 2010).

Para ejemplificar las concepciones de los escolares sobre la componente *representación* o *signo*, del concepto matemático escolar "razón trigonométrica", se evaluaron las respuestas de 74 estudiantes a las cuestiones (Martín-Fernández, 2013, 2014a):

Tarea 2: Haz un dibujo en que se muestre el sen (30º).

Tarea 3: Haz un dibujo en que se muestre el cos (30º).

Tarea 4: Haz un dibujo en que se muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo.

Tras el análisis de las producciones, algunos de los diferentes modos de representar las razones trigonométricas son los siguientes: ángulo, ángulo interior de un triángulo, razón entre lados de un triángulo y longitud (ordenada de una función trigonométrica, coordenada cartesiana y distancia – lados de un triángulo y segmentos).

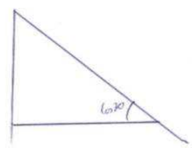

Figura 6. Representación del coseno como ángulo interior de un triángulo

En el ejemplo de la figura 2, encontramos que el sujeto incurrió en un error. Los errores ignoran el significado formal de un concepto. Los alumnos que cometen un error no consideran el significado formal de las representaciones y conceptos que lo trabajan. Sin embargo, las concepciones expresan y reúnen componentes parciales del significado de un concepto para un estudiante.

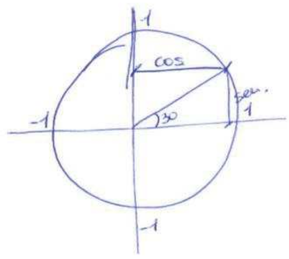

Figura 7. Representación del seno y coseno como longitud

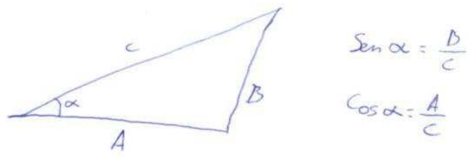

Figura 8. Representación del seno y coseno como cociente

Cada una de esas representaciones muestra un significado parcial de las nociones de seno y de coseno de un ángulo, es decir, expresan diferentes concepciones de las mismas. Una mayoría de producciones representaron cada razón trigonométrica como longitud (Martín-Fernández, 2014b).

ESTUDIAR EL SENTIDO: EL CASO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Para ejemplificar las concepciones de los escolares sobre la componente *sentido* del significado de un concepto matemático escolar, hemos elegido el tema de números enteros. Para ello se recogen algunas de las respuestas dadas a las siguientes tareas (Vílchez-Marín, 2014):

Tarea 5: Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.
Tarea 6: Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.

Consideramos aquellas respuestas que corresponden a la componente de sentido, en las que identificamos dos variantes o modos de uso: por un lado aquellas respuestas que transmiten sentido mediante términos o expresiones que indican posición; por otro lado aquellas que argumentan mediante una relación de orden; una tercera combina las dos opciones anteriores. Relación y orden se muestran como los sentidos principales que usan los escolares encuestados cuando quieren explicar en qué consiste un número positivo y en qué consiste un número negativo. En todos los argumentos la relación de posición o de orden se establece con respecto a cero.

1. Sentido posicional

El primer argumento identificado es el relativo a los distintos modos de expresar los números positivos/negativos mediante su ubicación relativa a 0, para lo cual, localizamos aquellas respuestas que expresan una relación de posición. En la tabla 3 aparecen las expresiones utilizadas por los alumnos.

Tabla 5. Relaciones de posición utilizadas en las actividades 5 y 6

Para número positivo	Para número negativo
A la derecha de 0	A la izquierda de 0
Por encima de 0	Por debajo de 0
Desde 0 hacia arriba	Desde 0 hacia abajo

Después de 0	Antes de 0
Detrás de 0	Delante de 0
Antes del –	Después del +
Para arriba de 0	

2. Sentido de orden

Un segundo argumento consta de aquellas respuestas dan sentido a los números enteros empleando una relación de orden.

Tabla 4. Expresiones de orden utilizadas en las actividades 5 y 6

Expresiones utilizadas para número positivo	Expresiones utilizadas para número negativo
Mayor que 0	Menor que 0
Supera el valor de 0	Tiene un valor inferior a 0
Siguen un orden a partir de 0	Siguen un orden inverso a partir de 0
Son superiores a 0	Son inferiores a 0

Los alumnos que dan estas respuestas las fundamentan en una estructura de orden utilizando expresiones como: "siguen un orden", y usan conceptos ordinales como "mayor", "menor", "superior" e "inferior", siempre con respecto a cero.

3. Sentido de posición y de orden

En un tercer nivel encontramos respuestas que combinan los dos niveles anteriores, lo cual hace un solo estudiante. Este sujeto hace una conexión entre la relación de orden respecto a cero y la relación de posición relativa a cero. Consideramos que el estudiante manifiesta una concepción más amplia al considerar los dos tipos de relaciones respecto a cero.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio ha consistido en presentar una terna semántica y su potencialidad para analizar e interpretar los significados de los conceptos matemáticos escolares; empíricamente caracterizamos las concepciones que sobre esos conceptos tienen grupos de estudiantes que ya los habían estudiado.

Para su ejemplificación hemos elegido tres conceptos matemáticos escolares distintos. Cuando sobre esos conceptos hemos interrogado acerca de cada uno de los componentes del triángulo semántico hemos obtenido una diversidad de respuestas, expresadas con diferentes términos, notaciones, argumentos y relaciones, en cada caso.

Las preguntas planteadas han pedido "explicar" y "representar"; sus respuestas e interpretaciones han consistido en expresar esa apropiación del significado de un concepto matemático escolar por un sujeto. Significado que es parcial, como muestran buena parte de las respuestas recogidas y su progresiva complejidad, lo cual ha permitido identificar niveles en su diversidad y mostrar una mayor o menor profundidad en las concepciones de los estudiantes.

Las concepciones inferidas proceden del análisis de las respuestas de los estudiantes según los tres componentes del triángulo semántico descrito, bien singularmente o por combinaciones entre ellos, concepciones que muestran distintos niveles de complejidad y su mayor o menor cercanía al concepto en cuestión.

Pensamiento y argumento, introspección y comunicación, son las vías que utiliza un sujeto para su apropiación de un concepto, que se manifiesta en su empleo con significado en el propio discurso.

Hemos mostrado la diversidad de respuestas que proporcionan los estudiantes con cada uno de esos conceptos, escogiendo para cada uno de ellos una componente de significado diferente.

Inferimos que estas concepciones muestran que los estudiantes organizan sus conocimientos matemáticos y los expresan en términos de referencia, signo y sentido.

Las ideas expuestas en este trabajo son producto de la reflexión y de la práctica llevadas a cabo por un grupo de investigadores de la Universidad de Granada en la última década, estudios centrados en el Análisis Didáctico de los contenidos matemáticos escolares. Ese marco, sus métodos e instrumentos, suponen una contribución para la investigación en educación matemática, ya que aportan una propuesta para el estudio del significado de los conceptos de las matemáticas escolares que incide en su enseñanza y aprendizaje. En cada caso la bibliografía de referencia remite a un tratamiento más detallado de las cuestiones presentadas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con ayuda del Proyecto «Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares» (EDU2015-70565-P) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico)

Referencias

Bell A., Costello J. y Küchemann D. (1983). *Research on learning and teaching. A Review of Research in Mathematical Education*. Windsor: NFER- Nelson.

Byers, P. (2010). Investigating trigonometric representations in the transition to college mathematics. *College Quarterly*, *13*(2), 1–10.

Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación*. Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L. y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics*, *92*(1), 129-146. Doi: 10.1007/s10649-015-9673-4.

Da Ponte, J. P. y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225-236). New York: Routledge.

Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J. A. (En prensa). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Frege, G. (1996). Estudios sobre semántica. *Escritos filosóficos* (pp. 147-264). Barcelona: Crítica-Grijalbo Mondadori.

Klok J. V. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. In A. Belkadi, K. Chatsiou y K. Rowan (Eds.), *Proceedings of Conference on Language Documentation and Linguistic Theory, 4.* London: SOAS.

Lupiáñez, J. L. (En prensa). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Martín-Fernández, E. (2013). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de razón trigonométrica. Un estudio exploratorio.* Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2014a). Concepciones del seno y del coseno puestas de manifiesto por estudiantes de Bachillerato. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 455-464). Salamanca: SEIEM.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2014b). Meanings of sine and cosine as expressed by non-compulsory secondary school students. En S. Oesterle, C. Nicol, P. Liljedahl y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* Vol. 6, p. 168. Vancouver, Canada: PME.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2006). *Research in education.* New York: Longman.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to learners' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 39-63.

Rico, L. (En prensa). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (En prensa). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática.* Madrid: Pirámide.

Sickle, J. V. (2011). A history of trigonometry Education in the United States 1776-1990. Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, Nueva York, NY.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), 71-85.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 24-33.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a mathematical sign? An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 133-162.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* 127-174. New York: Academic Press.

Vílchez-Marín, M. (2014). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de E.S.O. respecto al concepto de número entero. Estudio exploratorio.* Máster Universitario de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Vinner, S. (1991). The role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.