

# ANÁLISIS DEL APROVECHAMIENTO DE OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE GENERADAS EN LA DISCUSIÓN EN GRAN GRUPO DE UN PROBLEMA DE TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS<sup>v</sup>

## Analysis of the exploitation of mathematical learning opportunities created in the classroom discussion of a geometric transformation problem

García-Honrado, I.<sup>a</sup>, Fortuny, J. M.<sup>b</sup>, Ferrer M.<sup>b</sup> y Morera, L.<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Universidad de Oviedo, <sup>b</sup>Universitat Autònoma de Barcelona

### Resumen

*Esta comunicación trata sobre el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático generadas en una discusión en gran grupo de un problema de transformaciones geométricas en el que se utiliza GeoGebra para su resolución. Para ello se toman datos de cómo los alumnos de un grupo de 3º de la E.S.O. abordan el problema en un aula en dos momentos: antes de la discusión y tras la discusión. Esto permite observar la trayectoria de aprendizaje realizado. Se ejemplifica el estudio con una alumna. En el análisis se utilizan técnicas de lógica borrosa gracias a las cuales se definen distintos niveles de conocimiento procedimental que muestra la alumna en los dos momentos. A través de un sistema de reglas borrosas se obtienen distintos grados de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje que se logran expresar a través de un párrafo.*

**Palabras clave:** *oportunidad de aprendizaje matemático, aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje, lógica borrosa, descripción lingüística de un fenómeno, geometría.*

### Abstract

*This communication deals with the effectiveness of mathematical learning opportunities generated in a whole group discussion of a problem of geometric transformations in whose resolution GeoGebra is used. Data of the attempts to solve the problem before and after the whole group discussion are obtained in a classroom of 9th graders. This allows us to observe the learning trajectory of a concrete student. Fuzzy logic techniques are used to obtain the levels of procedure knowledge a student rises before and after the discussion. Through systems of fuzzy rules, the degrees of exploitation of learning opportunities are achieved and these results are expressed in a paragraph written in natural language.*

**Keywords:** *mathematical learning opportunity, taking-up of a learning opportunity, fuzzy logic, linguistic description of a phenomenon, geometry.*

### INTRODUCCIÓN

Esta comunicación versa sobre cómo los estudiantes son capaces de aprovechar oportunidades de aprendizaje matemático generadas en una discusión en gran grupo. En concreto, el estudio se realiza para una discusión en gran grupo con estudiantes de 3º de la E.S.O. resolviendo un problema de transformaciones geométricas: giro y homotecia. Tras la identificación de las oportunidades de aprendizaje, se propone un modelo basado en la lógica borrosa para asignar ciertos valores de

aprovechamiento de estas oportunidades de aprendizaje en un estudiante. Así se produce un texto escrito en lenguaje natural en el que se refleja la explicación de dichos valores.

## MARCO TEÓRICO

Para este trabajo nos movemos entre dos marcos teóricos: el de la generación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje; y el de la descripción de los modelos borrosos que nos permiten plasmar resultados acerca del aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

### **Sobre las oportunidades de aprendizaje: identificación y aprovechamiento**

Actualmente existe mucha literatura sobre el tema de las oportunidades de aprendizaje matemático. Mayoritariamente las investigaciones se centran en la identificación, clasificación y efectividad de las mismas. En la presente comunicación utilizamos identificaciones y clasificaciones previas y nos centramos en elaborar un estudio en profundidad sobre el efecto que las oportunidades de aprendizaje provocan en los alumnos y cómo son capaces de aprovecharlas, lo que se relaciona con su efectividad.

Se parte de la concepción social del aprendizaje de Palincsar (1998), considerando que el aprendizaje surge durante las interacciones que se producen entre distintos miembros de la comunidad de aprendizaje: alumnos y profesor. Por este motivo, llevamos a cabo el estudio en la conversación instructiva llevada a cabo en la discusión en gran grupo, relacionando su efectividad con la generación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático. Apoyamos su efectividad con el instrumento *Instructional Quality Assessment* (Boston, 2012), el cual está compuesto de diez rúbricas divididas en dos bloques: rigor académico y desarrollo de la discusión. Este instrumento nos permite conocer la calidad de las discusiones en gran grupo, la cual está estrechamente relacionada con las oportunidades de aprendizaje matemático que se generan y su aprovechamiento por parte de los alumnos. Esto es debido a que cinco de las diez rúbricas (dos en el bloque del rigor académico y tres en el bloque de desarrollo de la discusión) están ligadas con el papel del alumno. Las rúbricas en cuestión son las siguientes: Discusión entre estudiantes, Huella matemática, Participación entre los estudiantes, Conexiones entre los estudiantes y Respuestas de los estudiantes.

Para identificar las distintas oportunidades de aprendizaje matemático surgidas en la discusión en gran grupo (Ferrer, Fortuny, Planas y Boukafri, 2014), se propone dividir la discusión en episodios atendiendo a las dimensiones *discursiva*, relacionada con la interacción a lo largo de la discusión, e *instrumental*, relacionada con el uso de los distintos artefactos. A partir de estos episodios y de las distintas situaciones de interacción que transcurren en el aula, identificamos las oportunidades de aprendizaje matemático.

Con relación a las oportunidades de aprendizaje, Brewer y Stasz (1996) distinguen tres elementos: contenidos curriculares, recursos procedimentales y recursos instructivos. Los dos primeros relacionan contenidos y conocimientos, por lo que pueden etiquetarse como conceptuales y procedimentales. Entendemos los recursos instructivos como acciones que facilitan el aprendizaje de los alumnos y les permiten llegar a un nivel avanzado de adquisición (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014). Por este motivo, etiquetamos este último elemento como argumentativo. Abedi y Herman (2010) afirman que existe una relación entre las oportunidades de aprendizaje generadas en el aula y el rendimiento de los estudiantes, aunque en este estudio cuantitativo los autores no formalizan cuando una determinada oportunidad de aprendizaje ha sido verdaderamente aprovechada por un estudiante.

En la presente comunicación llevamos a cabo un estudio cualitativo basado en el aprovechamiento que logra un alumno de algunas oportunidades de aprendizaje generadas en clase de matemáticas. En concreto, entendemos el aprovechamiento como la modificación del conocimiento matemático, bien sea conceptual o procedimental, que se evidencia tanto en las interacciones producidas durante

la discusión en gran grupo como en los protocolos escritos del alumno (Ferrer, Doorman y Fortuny, 2015). Entendiendo las trayectorias de aprendizaje como descripciones del pensamiento de los alumnos seguido a través de rutas en la resolución de tareas matemáticas diseñadas para desarrollar sus niveles de pensamiento (Clements y Sarama, 2004), logramos determinar la trayectoria de aprendizaje concreta que sigue el alumno en la resolución de un problema matemático.

### Sobre los modelos de lógica borrosa: representación de predicados y GLMP

La lógica borrosa o, en inglés, *fuzzy logic* es aquella que permite tratar formalmente conceptos imprecisos. Sus entidades básicas son los conjuntos borrosos (Zadeh, 1975), que pueden ser entendidos como representaciones de predicados graduales (García-Honrado y Trillas, 2011). Por ejemplo, si consideramos el predicado ‘alto’ definido como logro de un objetivo de aprendizaje, la lógica clásica, que trata con conjuntos binarios, solo permite determinar si el aprendizaje de un alumno es alto o no; mientras que la lógica borrosa asigna para cada alumno grados de cumplimiento del predicado en el intervalo continuo  $[0,1]$ : 0 si no lo cumple y 1 si lo cumple totalmente. Así se define una función que recrea el significado del predicado ‘alto’ en un nivel de aprendizaje, como se muestra en la Figura 1.

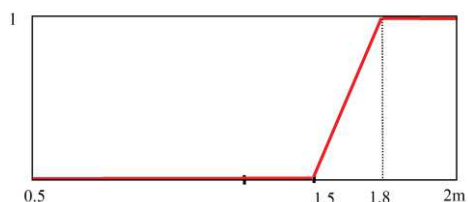


Figura 1: Conjunto borroso representando el predicado ‘alto’

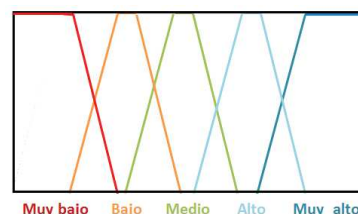


Figura 2: Conjuntos borrosos modelando las etiquetas lingüísticas

En oposición a conjuntos borrosos continuos como el de la Figura 1, que es una función continua definida sobre un intervalo  $[0.5,2]$ , puede darse el caso de que el espacio sobre el que se defina el conjunto borroso sea discreto. Entonces se asignará un valor entre 0 y 1 a cada elemento de ese espacio, y llamaremos a esos conjuntos borrosos, discretos.

Zadeh también introdujo el concepto de variable lingüística, entendida como aquella que puede tomar valores lingüísticos como Muy bajo / Bajo / Medio / Alto / Muy alto. Cada uno de ellos se representa por un conjunto borroso continuo trapezoidal, debido a su simplicidad en la función (lineal definida por trozos) y a la posibilidad de ser definida por sus vértices. Al conjunto de los conjuntos borrosos que representa los valores que puede tomar la variable se le llama partición borrosa (Figura 2).

Combinando los problemas de control borroso con el actual auge de la conocida computación con palabras (Zadeh, 1996), surge el paradigma *Granular Linguistic Model of a Phenomenon* (GLMP) (Triviño y Sugeno, 2013), el cual consiste en hacer resúmenes lingüísticos de fenómenos complejos como puede ser el aprovechamiento de una oportunidad de aprendizaje. De hecho, en la literatura se pueden encontrar aplicaciones de este paradigma en la evaluación del aprendizaje de los alumnos (Sanchez-Torrubia, Torres-Blanc y Triviño, 2014).

## METODOLOGÍA

En esta investigación se toman datos de una discusión en gran grupo en torno a un problema de transformaciones geométricas en el que se utiliza GeoGebra para su resolución. Una vez conocidas las oportunidades de aprendizaje que se generan, a través del estudio de la discusión, analizamos los grados de aprovechamiento que presenta una alumna. Para ello distinguimos tres fases de desarrollo de la actividad: la primera fase en la que los alumnos entran en contacto con el problema llevando a cabo una resolución por parejas; la segunda fase, que se corresponde con la propia discusión; y una tercera fase en la que los alumnos hacen una reflexión escrita e individual de forma concluyente. De

la primera y de la última fase disponemos de los ficheros generados en GeoGebra, con las notas aclaratorias hechas por los alumnos. En cuanto a la segunda fase, realizamos una transcripción de la discusión en gran grupo.

En todas las fases se aplica una rúbrica construida ex profeso para comprobar el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje matemático que se generaron. Se analiza el hecho de identificar las transformaciones y averiguar los elementos que las caracterizan. Se hace una graduación de los niveles en los que se hagan estas identificaciones y averiguaciones:

- B = Bajo = lo menciona.
- M = Medio = hace una explicación sin reflexión.
- A = Alto = hace una explicación propia basada en pruebas empíricas o deducción formal.

Se asignan conjuntos borrosos discretos que explican el grado de nivel alcanzado en cada una de las fases, y a través de un sistema de reglas se define el aprovechamiento de las distintas oportunidades de aprendizaje a partir de los valores de la rúbrica.

### Selección del problema matemático

Para propiciar que una discusión en gran grupo sea rica, se plantea la resolución de un problema que suponga un reto para los estudiantes y que permita que demuestren sus saberes aplicados a una situación nueva para ellos. El problema que se aborda en esta comunicación consiste en explicar qué transformaciones se necesitan para pasar de una figura a otra (Figura 3). Los alumnos han de conocer el giro y la homotecia y deben identificar en el dibujo los elementos que definen ambas transformaciones.

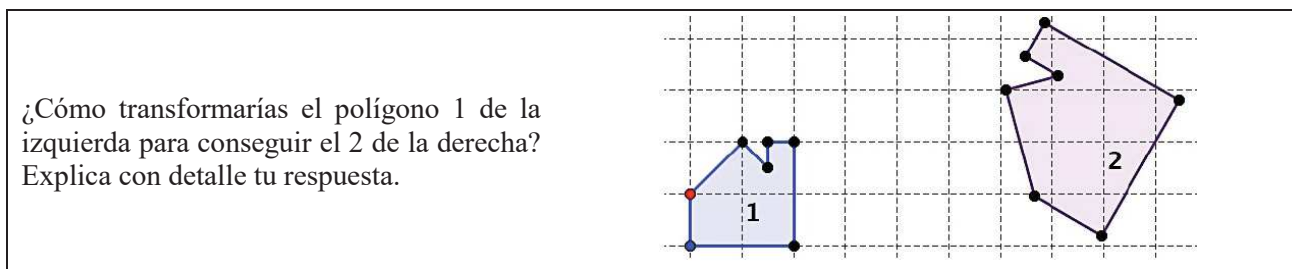


Figura 3. Enunciado del problema objeto de estudio

### Contexto de la investigación

Los datos se tomaron en una clase de 3º de la E.S.O. durante el curso 2013-2014. La profesora que guió la clase presentaba una experiencia docente media y su centro educativo estaba ubicado en un entorno sociocultural medio-alto.

Los alumnos abordaron el problema con GeoGebra, una herramienta de geometría dinámica con la que estaban familiarizados. Para su resolución es imprescindible el uso de una homotecia y de un giro, no importando el orden en el que se realicen estas dos transformaciones.

Las intervenciones de todos los participantes en la discusión en gran grupo se registraron en video y se transcribieron posteriormente para su análisis. Al finalizar la discusión se recogieron los ficheros de GeoGebra elaborados por los alumnos, tanto en el trabajo por parejas como individualmente después de la discusión en gran grupo. Dividimos la transcripción de la discusión en episodios atendiendo a las dimensiones discursiva e instrumental de la discusión. Utilizamos esta codificación de episodios para ejemplificar oportunidades de aprendizaje matemático, relacionando contenidos del conocimiento matemático, tanto procedimentales como conceptuales, con conjuntos de acciones instrumentales y discursivas producto de los procesos de interacción creados durante las clases de matemáticas (Ferrer, 2016).

## IDENTIFICACIÓN DE LAS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Tras la fragmentación por episodios de la discusión en gran grupo se detectaron oportunidades de aprendizaje. Estas oportunidades surgieron mayoritariamente de la interacción entre la profesora y los alumnos, fundamentalmente de las preguntas que ella realizó. En el siguiente fragmento:

Profesora: ¿Cómo me podéis demostrar que no se puede? ¿Qué argumento tenéis para convencerme de que no hace falta que busque porque no podré ir con una única transformación?

Alba: Con solo una homotecia no puede ser porque los puntos homólogos no coinciden.

Profesora: No se cortan todos en un punto. De acuerdo, esto sería un argumento.

Alba: Y como que la casa es más grande, no habría ninguna otra transformación que la hiciese más grande que no fuese la homotecia, entonces tendríamos que hacer dos como mínimo.

Se observa la oportunidad de aprendizaje argumentativa que caracterizamos matemáticamente por ‘Darse cuenta que la resolución de un problema matemático puede requerir argumentos sobre la composición de dos transformaciones geométricas: homotecia y giro’. Del mismo modo se recoge otra oportunidad de aprendizaje argumentativa, caracterizada por ‘Identificar la importancia de los argumentos obtenidos a través de la visualización para justificar la resolución de un problema geométrico’. Además, en el desarrollo de esta discusión también se observan oportunidades conceptuales como las siguientes:

- Identificar transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro y una homotecia.
- Identificar distintos tipos de homotecia según el valor de la razón de semejanza.
- Reconocer la equivalencia entre ciertas transformaciones geométricas. En particular, entre un giro de  $180^\circ$ , una simetría central y una homotecia de razón  $-1$ .

Asimismo también queda recogida la oportunidad de aprendizaje procedimental consistente en utilizar GeoGebra para aumentar el área de una figura y realizar un giro.

## ANÁLISIS DEL APROVECHAMIENTO DE LAS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Estudiamos en profundidad el aprovechamiento que una alumna hace de las oportunidades de aprendizaje matemático creadas en la discusión en gran grupo, teniendo en cuenta que tanto las conceptuales como las procedimentales y las argumentativas giran en torno al concepto de giro y de homotecia. Utilizando una rúbrica construida para conocer el nivel de averiguación de los conceptos involucrados, se obtienen, en las tres fases de ejecución del estudio, valores sobre ese nivel. Los valores pueden ser: bajo, medio, alto, o valores intermedios.

Una vez conocido el nivel de averiguación de los dos conceptos: giro y homotecia, se compara el nivel entre la primera y la última fase a través de un sistema de reglas que nos proporciona el nivel de aprovechamiento de las oportunidades relacionadas con el giro y con la homotecia. Finalmente, a través de otro sistema de reglas podremos conocer el aprovechamiento general que cada alumno logró en la discusión en gran grupo.

### Definición de la rúbrica

Una vez identificadas las oportunidades de aprendizaje las podemos dividir en dos bloques, uno relacionado con el giro y otro con la homotecia. Por lo que decidimos hacer una rúbrica que tuviera en cuenta las oportunidades de aprendizaje argumentativas, es decir, la necesidad de cada una de las transformaciones y el nivel de argumentación que hicieron los alumnos para justificarlas. En concreto, distinguimos si solo las mencionó o hizo referencia a la proporcionalidad de sus lados y el mantenimiento de sus ángulos, en lo relativo a la homotecia, y a la igualdad de figuras y la modificación de la orientación, en lo relativo al giro.

Así mismo, recogemos las oportunidades de aprendizaje conceptuales y procedimentales teniendo en cuenta los elementos característicos de cada transformación y su nivel de adquisición. En particular, distinguimos la elaboración de una tarea inmediata, como puede ser indicar cualquier centro de giro y luego realizar una translación; con la aplicación del conocimiento de que el centro de giro está a la misma distancia de un punto y su girado, y proceder a su identificación por medio de la construcción a través de la intersección de dos rectas mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos de la figura original y la girada.

Proponemos una rúbrica que indique el nivel de adquisición, pudiendo un alumno mostrar aspectos de niveles distintos. Por ejemplo, aspectos de bajo y medio si menciona la necesidad de una homotecia por el aumento de área; intenta una justificación por lo que adquiere un nivel más alto que si solo lo mencionase, pero esta justificación no es la que se pretende a un nivel medio, donde al menos tendría que hablar de la proporción de la figura, o un nivel alto en el cual tendría que hacer referencia a sus lados y ángulos. Por lo tanto, en la rúbrica, para cada ítem de evaluación en lugar de indicar cruces en el nivel que alcanza indicaremos el grado con el que alcanza cada nivel. Ese grado será un número del intervalo  $[0,1]$  y la suma de los grados de cada ítem ha de ser 1.

Con relación al giro valoramos tres ítems: la averiguación de la necesidad de realizar un giro, la del centro de giro y la del ángulo del giro. Análogamente, con relación a la homotecia valoramos: la averiguación de la necesidad de realizar una homotecia, la del centro de homotecia y la de la razón de homotecia.

### **Definición de los sistemas de reglas para el GLMP**

El GLMP distingue percepciones de primer y de segundo nivel que desembocan en la percepción global. En nuestro modelo las percepciones de primer nivel son las que obtenemos a partir de la rúbrica en la primera y la tercera fase. Definimos las percepciones de segundo orden como el aprovechamiento en las oportunidades de aprendizaje relacionadas con cada transformación, y calculamos cada una de ellas con un sistema de inferencia borrosa compuesto por un sistema de reglas. El sistema es análogo para el giro y la homotecia, en lo relativo al giro:

1. Si el alumno averiguó el giro a nivel bajo en la primera fase y a nivel alto en la tercera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido alto.
2. Si el alumno averiguó el giro a nivel bajo (respectivamente, medio) en la primera fase y a nivel medio (respectivamente, alto) en la tercera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido medio.
3. Si el alumno averiguó el giro a nivel alto en la primera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido bajo.
4. Si el alumno averiguó el giro a nivel bajo en la tercera fase, entonces el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido bajo.

Finalmente, se agregan los dos niveles de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje indicando el aprovechamiento general que se ha hecho. Este último paso se hace a través de otro sistema de inferencia borroso compuesto por las reglas:

1. Si el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro y la homotecia ha sido alto (respectivamente, medio/bajo), entonces el aprovechamiento general de las oportunidades de aprendizaje ha sido alto (respectivamente, medio/bajo).
2. Si el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido alto (respectivamente, bajo) y el de las relacionadas con la homotecia ha sido bajo

(respectivamente, alto), entonces el aprovechamiento general de las oportunidades de aprendizaje ha sido medio.

3. Si el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro ha sido medio (respectivamente, alto) y el de las relacionadas con la homotecia ha sido alto (respectivamente, medio), entonces el aprovechamiento general de las oportunidades de aprendizaje ha sido alto.

Con estos sistemas de reglas podemos elaborar un párrafo que resuma el nivel de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje de un alumno. Además, si fuese necesario, podríamos obtener un valor numérico resumen del aprovechamiento global mediante el cálculo del centro de gravedad del mismo, como detallaremos más adelante.

## ANÁLISIS DEL APROVECHAMIENTO DE UNA ALUMNA

Elegimos el caso de una alumna, Alba. Hacemos el análisis a través de sus ejecuciones en GeoGebra antes y después de la discusión en gran grupo y de su participación durante la discusión. Así mostramos la trayectoria de aprendizaje que Alba siguió en la resolución del problema.

### Aplicación de la rúbrica y su evolución

Aplicamos la rúbrica construida a las tres fases. Respecto a la primera fase, Alba no menciona la necesidad de componer un giro y una homotecia y deja implícita su justificación. No obstante, posteriormente comenta la relación entre lados homólogos para justificar la razón de homotecia y justifica la obtención del ángulo de giro (Figura 4). Desde la primera fase, estos dos elementos, los justifica a un buen nivel que luego irá perfeccionando. Respecto al centro de giro y de homotecia, Alba no refleja un nivel avanzado en su identificación ya que los elige al azar.

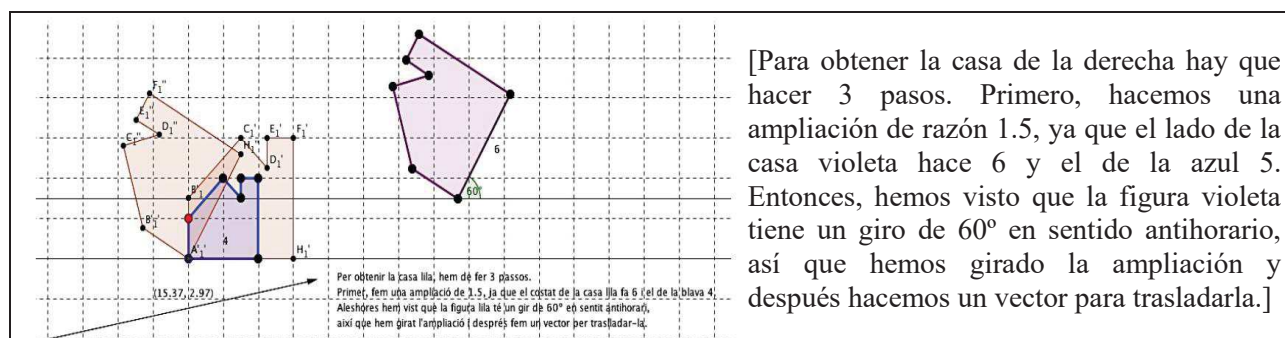


Figura 4. Resolución de Alba en la primera fase

En la segunda fase, durante la discusión (Figura 5), Alba argumenta que se necesitan al menos dos transformaciones haciendo hincapié en la necesidad de utilizar la homotecia. El hecho de hablar de “al menos dos” indica la posibilidad de eliminar la traslación. Además, introduce la posibilidad de añadir un deslizador en GeoGebra para calcular el valor del ángulo de giro consiguiendo una mayor profundidad en su conocimiento de las transformaciones.

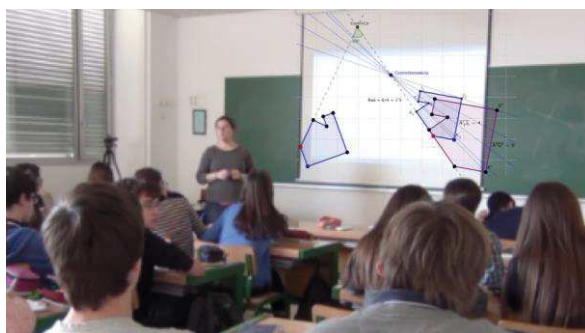


Figura 5: Discusión en gran grupo gestionada por la profesora (3º de la E.S.O.)

- Profesora: Es que el 60 este... lo hemos visto muy claro, pero el 60 este... era cuando estaba aquí para llevarlo aquí abajo, pero ahora para llevarlo de aquí a aquí no tiene por qué ser 60.
- Alba: Lo podemos hacer con un deslizador.
- Profesora: ¿Cómo lo podríamos...? Bueno, con un deslizador lo podríamos hacer hasta que encaje. Pero, ¿qué tenemos aquí?
- Alba: Podemos hacer una circunferencia porque podremos calcular el ángulo.
- Profesora: A ver, primero de todo vamos a comprobarlo. Si yo hago una circunferencia por aquí que pase por aquí, ¿me pasa por dónde me tiene que pasar?
- Todos: ¡Sí!

En lo que concierne a la tercera fase, la alumna muestra una mayor profundización en la obtención de los elementos característicos de cada transformación. Define el centro de giro a través del cálculo de mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos y utiliza deslizadores para justificar el ángulo de giro y la razón de homotecia. Estos elementos actúan como comprobadores de su primer razonamiento (Figura 6).

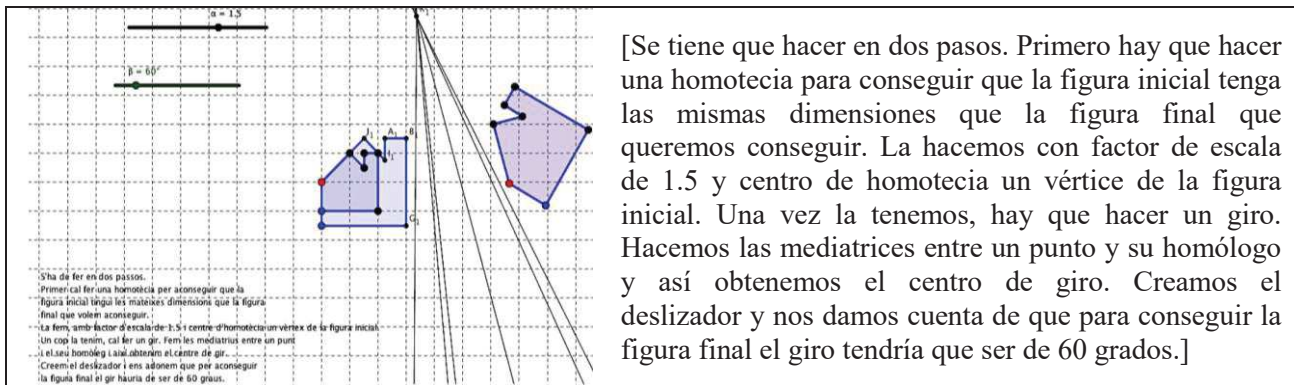


Figura 6. Resolución de Alba en la tercera fase

Alba elimina de su construcción la traslación, indica el centro de homotecia, calcula el centro de giro razonadamente y hace uso de la herramienta de geometría dinámica para demostrar de forma empírica tanto el ángulo de giro como la razón de homotecia. Lo único a lo que no hace alusión en su protocolo escrito es a la necesidad de utilizar el giro.

Basándonos en este análisis conseguimos las puntuaciones recogidas en la Tabla 1. Para cada fase se puede representar un conjunto borroso discreto. En la primera fase se consigue una suma total de 3.2 de 6 posibles de nivel bajo (B), que denotaremos por 1; 1.5 de 6 de nivel medio (M), que denotaremos por 2; y 1.3 de 6 de nivel alto (A), que denotaremos por 3. Por lo tanto, lo expresamos como  $0.53/\text{nivel } 1 + 0.25/\text{nivel } 2 + 0.22/\text{nivel } 3$ . Análogamente, obtenemos para la fase 2,  $2.1/6$  de B,  $1.8/6$  de M y  $2.1/6$  de A, o equivalentemente  $0.35/1 + 0.3/2 + 0.35/3$ , y para la fase 3:  $0.7/6$  de B,  $1.5/6$  de M y  $3.8/6$  de A, o equivalentemente  $0.11/1 + 0.25/2 + 0.64/3$ .



Tabla 7. Puntuaciones obtenidas en los tres niveles en las distintas fases

Identifica ...	Bajo			Medio			Alto		
	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 1	Fase 2	Fase 3
- Giro	0.7	0.7	0.7	0.3	0.3	0.3			
- Homotecia	0.5			0.5	0.5	0.2		0.5	0.8
- Centro de giro	1	0.7			0.3				1
- Centro de homotecia	1	0.7			0.3	1			
- Ángulo de giro				0.5	0.2		0.5	0.8	1
- Razón de homotecia				0.2	0.2		0.8	0.8	1

Para ver la evolución de Alba podemos representar los grados de adquisición en las distintas fases. Para ello calculamos el centro de gravedad de cada fase:  $0.53 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.22 \cdot 3 = 1.68$  en lo relativo a la primera fase; y procediendo de igual modo, 2 en la segunda y 2.52 en la tercera. Así podemos representar gráficamente su evolución e ilustrar la trayectoria de aprendizaje que siguió Alba.

En concreto, observamos que Alba ha hecho un aprovechamiento creciente de la oportunidad de aprendizaje conceptual ‘Identificar las transformaciones geométricas con GeoGebra que resultan de componer un giro con una homotecia’, llegando a un nivel medio/alto (Figura 7).

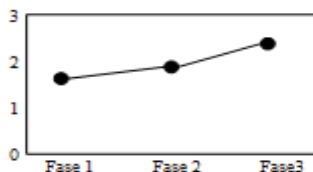


Figura 7: Evolución de Alba en las tres fases

### Descripción lingüística del aprovechamiento

Con relación al giro, en la primera fase se consigue una suma total de 1.7 de 3 posibles de nivel bajo, 0.8 de 3 de nivel medio y 0.5 de 3 de nivel alto. Por lo tanto, lo expresamos como  $0.56/1 + 0.26/2 + 0.16/3$ , con centro de gravedad 1.56. En la tercera fase, el centro de gravedad sería 2.43. Ambos centros de gravedad serán los inputs para el sistema de inferencia borroso de tipo Mamdani utilizando la t-norma del producto. Calculamos la salida con el programa FisPro ([http://www7.inra.fr/mia/M/fispro/fispro2013\\_en.html](http://www7.inra.fr/mia/M/fispro/fispro2013_en.html)) obteniendo un aprovechamiento: 2.65 con lo cual lo podemos considerar alto por su proximidad a 3 (Figura 8).

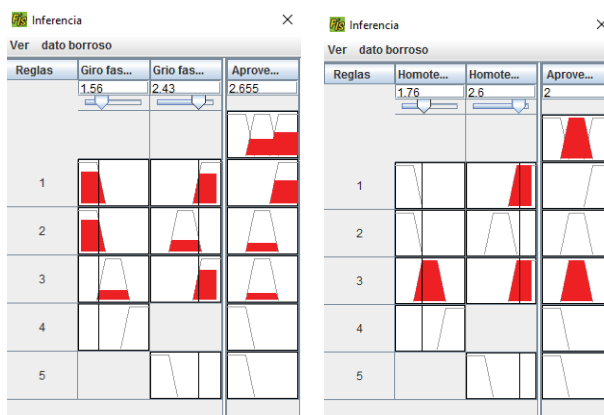


Figura 8: Salida del sistema para el aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el giro y la homotecia, respectivamente

Para el cálculo del aprovechamiento total de las oportunidades de aprendizaje, hacemos el segundo modelo de inferencia utilizando como inputs las salidas anteriores y obtenemos un aprovechamiento global alto (3) de las oportunidades de aprendizaje. Por lo tanto, lingüísticamente se puede resumir el aprovechamiento de Alba con el siguiente párrafo:

La alumna Alba ha obtenido un nivel alto de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el Giro y un nivel medio de aprovechamiento de las oportunidades de aprendizaje relacionadas con la Homotecia. Por lo tanto, se considera que el aprovechamiento total ha sido alto.

## CONCLUSIONES SOBRE EL APROVECHAMIENTO DE OPORTUNIDADES

La generación de oportunidades de aprendizaje es un requisito para crear discusiones en gran grupo de calidad, pero esta generación debe ir acompañada de cómo los estudiantes son capaces de aprovecharlas. En este trabajo hemos focalizado la atención en los alumnos y hemos presentado un estudio acerca del modo en que una alumna aprovecha las oportunidades de aprendizaje generadas en una discusión en gran grupo, de forma cuantitativa gracias al empleo de la lógica borrosa.

Hemos aplicado un modelo conocido como GLMP construido a través de técnicas de inferencia borrosa que nos permite, a través de una información, construir una descripción lingüística de nuestro objeto de estudio. La información la hemos obtenido a través de los ficheros de GeoGebra de una estudiante antes y después de la discusión; de su intervención en la discusión en gran grupo; y de una rúbrica definida para el aprovechamiento de unas concretas oportunidades de aprendizaje matemático surgidas en el aula. En futuros trabajos pueden seguir perfeccionándose estas técnicas borrosas en dos vertientes. La primera aplicando esta forma de proceder a nuevos modelos de valoración dentro del ámbito escolar. La segunda consistiría en perfeccionar los sistemas de reglas, estudiando su idoneidad y pudiéndose crear a partir de un aprendizaje basado en técnicas de *soft computing* utilizando una amplia base de datos.

## Referencias

- Abedi, J., y Herman, J. L. (2010). Assessing English language learners' opportunity to learn mathematics: Issues and limitations. *Teachers College Record*, 112(3), 723-746.
- Boston, M. D. (2012). Assessing the quality of mathematics instruction. *Elementary School Journal*, 113(1), 76-104.
- Brewer, D. J., y Stasz, C. (1996). Enhancing opportunity to learn measures in NCES data. In G. Hoachlander, J. E. Griffith y J. H. Ralph (Eds.), *From data to information: new directions for the National Center for Education Statistics* (pp. 1-28). Washington, DC: US Department of Education.
- Clements, D., y Samara, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89.
- Ferrer, M. (2016). *Estudio sobre la actuación docente y la interacción en la creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje en el aula de matemáticas*. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra, España.
- Ferrer, M., Doorman, M., y Fortuny, J. M. (2015). The classroom discussion and the exploitation of opportunities to learn mathematics. En K. Beswick, T. Muir, y J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Hobart, Australia: PME.
- Ferrer, M., Fortuny, J. M., y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(3), 385-405.
- Ferrer, M., Fortuny J. M., Planas N., y Boukafri K. (2014). Modos de actuación e interacción y generación de oportunidades de aprendizaje matemático. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 297-305). Salamanca, España: SEIEM.
- García-Honrado, I., y Trillas, E. (2011). An essay on the linguistic roots of fuzzy sets. *Information Sciences*, 181(19), 4061-4074.

- Palincsar, A. S. (1998). Social constructivist perspectives on teaching and learning. *Annual Review of Psychology*, 45, 345-375.
- Sanchez-Torrubia, M. G., Torres-Blanc, C., y Triviño, G. (2014). Modelo lingüístico del aprendizaje para la evaluación automática basada en criterios. En F. Bobillo, H. Bustince, F. J. Fernández, y E. Herrera-Viedma (Eds.), *Actas del XVII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy* (pp. 417-422). Zaragoza, España: ESTYLF.
- Triviño, G. y Sugeno, M. (2013). Towards linguistic descriptions of phenomena. *International Journal of Approximate Reasoning*, 54(1), 22-34.
- Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – III. *Information Sciences*, 9(1), 43-80.
- Zadeh, L. A. (1996). Fuzzy logic= computing with words. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on fuzzy systems*, 4(2), 103-111.

---

<sup>Y</sup>Esta investigación se ha realizado al amparo del Proyecto EDU2015-65378-P, y de la beca FPI BES-2012-053575 (tercer autor), del Ministerio de Economía y Competitividad.