ANÁLISIS DE LAS NOTAS TOMADAS POR LOS ALUMNOS EN UNA PRESENTACIÓN INICIAL DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Matías Arce y Laura Conejo

En este artículo se examinan las notas tomadas por alumnos de cuatro aulas de primero de Bachillerato durante una presentación inicial del concepto de límite de una función. Hemos analizado qué elementos son registrados y qué aspectos del significado del concepto de límite quedan reflejados. Se han detectado diferencias importantes en la transcripción de ejemplos y en los registros verbales. Las notas tienden a enfatizar movimientos únicamente en una variable o sobre las gráficas de las funciones. Concluimos con algunas reflexiones sobre la influencia potencial de estas notas en el aprendizaje del concepto.

Términos clave: Estudiantes de bachillerato; Límite de una función; Significado; Sistemas de representación; Toma de notas

Analysis of the Notes Taken by Students in a First Presentation of the Notion of Function Limit

In this article, we examined the notes taken by four classes of eleventh-grade during the first presentation of the notion of function limit. We analyzed the elements that the students had decided to write down and the aspects of the meaning of the concept represented in their notes. We detected important differences in the transcription of examples and verbal notes. These notes usually emphasized movements only in one variable or on the graphs of the functions. We conclude with some reflections about the potential influence of these notes in the student's learning of the concept.

Keywords: High school students; Limit of a function; Meaning; Note-taking; Systems of representation

El concepto de límite (CL) y los procesos de paso al límite tienen una importancia central en matemáticas. A partir de este se definen números

Arce, M. y Conejo, L. (2017). Análisis de las notas tomadas por los alumnos en una presentación inicial de límite de una función. *PNA*, *11*(3), 155-179.

relevantes o se establecen conceptos como los de continuidad, derivada o integral. Sin embargo, a pesar de la amplia presencia de la idea de límite, la formalización del concepto requirió un largo proceso (Blázquez y Ortega, 2002; Job y Schneider, 2014). El paso clave fue la evolución desde una posición pragmática, centrada en el desarrollo de cálculos en objetos concretos mediante métodos geométricos o algebraicos, y cuya validez estaba ligada a la validez de los resultados obtenidos, hacia una posición formalista-deductiva, donde establecer una definición matemática del CL era necesario para poder construir una teoría axiomática propia, desligada de objetos concretos. Los artífices fundamentales de esa evolución fueron D'Alembert, Cauchy y Weierstrass, quienes fueron los primeros en formular una definición del CL de tipo $\varepsilon-\delta$ a mediados del siglo XIX (Blázquez y Ortega, 2002). Esa definición es similar a las definiciones del CL que pueden encontrarse hoy en los manuales de análisis matemático, aunque es reseñable la variabilidad existente entre ellas (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009).

La conceptualización del CL permitió que este se convirtiera en el soporte del análisis matemático. Sin embargo, los problemas en su dilatada evolución histórica muestran las dificultades inherentes del concepto, que emergen y se replican en el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Cornu, 1991; Juter, 2006). El currículo español sitúa en primero de Bachillerato la primera introducción y aproximación al concepto de límite de una función. Intentando sortear las dificultades de su conceptualización, tanto el currículo como bastantes libros de texto y docentes, optan por realizar una introducción en la que la definición es reemplazada por descripciones (o definiciones descriptivas) de los procesos asociados, generalmente basadas en aproximaciones dinámicas de las variables (Job y Schneider, 2014; Ortega, 2016; Valls, Pons y Llinares, 2011) y utilizando diferentes sistemas de representación (Blázquez y Ortega, 2001).

Sin embargo, es necesario remarcar algunas de las implicaciones que tiene una aproximación de esta naturaleza. Las descripciones dinámicas del CL no están exentas de dificultad para los alumnos, especialmente los procesos de coordinación de las aproximaciones en las dos variables (Cottrill et al., 1996; Valls et al., 2011). Por otro lado, hay que tener presente la significación de los términos clave utilizados en estas descripciones. Cornu (1991) alerta de la influencia que tiene el uso y el significado cotidiano de términos como límite, aproximar o tender en las concepciones del CL que desarrollan los alumnos. Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo (2013) constatan la diversidad de significados que los alumnos asocian a estos términos, especialmente al término tender, al que los alumnos no aportan significado, lo identifican con aproximar o le añaden matices imprecisos (aproximar sin alcanzar). A esa diversidad de significados se añade también la utilización de expresiones subjetivas, como "aproximarse tanto como se quiera", alejadas de una conceptualización matemática adecuada del CL.

Esta primera aproximación al CL, generalmente basadas en diferentes ejemplos seleccionados, hace que los alumnos comiencen a desarrollar un *concepto imagen* (es decir, las imágenes mentales, representaciones, propiedades o procesos que un individuo asocia a un concepto) del CL muy heterogéneo, frente a un c*oncepto definición* muy débil y poco operativo (Tall y Vinner, 1981). Esto provoca la manifestación de una significación condicionada por los contextos en los que el concepto se presenta (Pecharromán, 2013), y la necesidad de los alumnos de recurrir a intuiciones o argumentos *ad hoc*, en ocasiones incoherentes entre sí, para dar respuesta a tareas asociadas al significado del CL (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2015). Estos hechos se extienden a otros conceptos como el de asíntota (Kidron, 2011).

Ante la problemática derivada de una conceptualización débil del CL, el foco de la docencia suele trasladarse al cálculo de límites, existiendo un exceso de actividades centradas en métodos algebraicos y en la manipulación de expresiones derivadas de dicho cálculo (Blázquez y Ortega, 2002; Cornu, 1991; Lacasta y Wilhelmi, 2010). Así, son la utilización del simbolismo y el planteamiento de cálculos complejos los que parecieran aportar el rigor matemático al desarrollo del tema de límites (Job y Schneider, 2014), ante la imposibilidad de plantear razonamientos lógicos y una fundamentación, de cualquier tipo, de resultados asociados al CL. Esta fundamentación generalmente también va siendo postergada en los libros de texto (Conejo, 2015).

Algunas de las problemáticas anteriores subsisten cuando, en cursos posteriores, se introduce la definición formal del CL sin mostrar su necesidad y sin dotarla de significado. Przenioslo (2004) revela la gran diversidad de concepciones diferentes sobre el CL de una función en un punto, muchas incompletas o erróneas, en estudiantes universitarios de matemáticas. Además, Arce, Conejo, Ortega y Pecharromán (2016) afirman que los profesores de matemáticas en formación, al intentar escribir una definición formal del concepto, se fían más del recuerdo de su forma que de su significado, unido a la presencia de muchas dificultades en su aplicación.

Para intentar que los alumnos desarrollen una definición del CL más significativa, Blázquez y Ortega (2002) crearon una definición del mismo (y otra similar para sucesiones) que mantiene el rigor de la definición $\varepsilon - \delta$ evitando su excesivo formalismo. Esta definición, matizada en Blázquez, Gatica y Ortega (2009), es la siguiente: "el límite de la función f en $x = a$ es L si para cualquier aproximación K de L, $K \neq L$, existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos están más próximas a L que K" (p. 161). Pensamos que su utilización facilita el paso de lo que Claros, Sánchez y Coriat (2014) llaman fenómenos del ámbito intuitivo (conjeturar el valor de un límite de función) a los fenómenos del ámbito formal (validar la conjetura con la construcción de entornos). También sirve para reducir la distancia y mejorar la integración entre la definición del CL y el concepto imagen que un alumno asocia al mismo.

Además, en Ortega (2016) se aprecia la facilidad con que estas definiciones creadas permiten demostrar teoremas.

PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

Existen muchas investigaciones centradas en la comprensión del CL. Valls, Pons y Llinares (2011) dividen estas en cuatro grupos, según la característica relevante del proceso de comprensión del CL en la que centren su atención: la influencia de las concepciones espontáneas, la identificación de algunas dificultades específicas, el papel de los sistemas de representación y la influencia de la concepción dinámica del límite (basada en la aproximación en las variables) en la comprensión de la concepción métrica (definiciones de tipo $\varepsilon - \delta$).

Sin embargo, esta investigación tiene un enfoque distinto, sobre el que apenas existen estudios. Pimm (1999, p. 195), en sus líneas abiertas de investigación sobre la escritura en el aula de matemáticas, plantea la siguiente pregunta: "¿Qué les parece a los alumnos digno de anotar (en un contexto determinado)?" En este estudio, perteneciente a una investigación más amplia sobre los cuadernos de matemáticas de los alumnos (de ahora en adelante, cuadernos), se analizan cómo son las notas que toman los estudiantes durante una presentación inicial del CL. El contexto son varias aulas de primero de Bachillerato, con alumnos que se enfrentan al concepto por primera vez y en las que los docentes han presentado una aproximación del CL de naturaleza dinámica.

El apartado anterior pone de relevancia la importancia de este primer acercamiento al CL en el desarrollo posterior de su aprendizaje, así como los numerosos factores asociados que pueden influir en este. En nuestro caso, además, las entrevistas a los alumnos participantes revelaron que, de forma mayoritaria, las notas tomadas en la clase suponen una importante herramienta en el estudio y aprendizaje de las matemáticas, por lo que consideramos de interés el análisis pormenorizado de las mismas. Así, los objetivos de esta investigación son los siguientes.

- Detectar qué elementos son considerados por los alumnos como relevantes en una presentación inicial del CL, basándonos en su decisión de anotarlos o no en sus cuadernos.
- Analizar y clasificar qué anotaciones relacionadas con el significado del CL son registradas por los alumnos, con especial atención a los registros verbales y gráficos.
- Reflexionar sobre algunas situaciones detectadas en los registros de los alumnos que pueden influir en su aprendizaje del CL.

MARCO TEÓRICO

El límite, como otros conceptos propios del Análisis Matemático, se engloba dentro del pensamiento matemático avanzado, al no ser directamente accesible a través de los sentidos y requerir un razonamiento deductivo y riguroso para su desarrollo (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005). No obstante, que el trabajo desarrollado tenga realmente estas características o no, dependerá del tratamiento que se realice, características que no suelen presentarse en una primera aproximación al CL.

En este trabajo se utiliza el marco propuesto por Rico (2012) para analizar el significado de un concepto matemático escolar. Dicho marco se basa en las ideas de Frege (1998, citado en Rico, 2012), que diferencia entre el signo, el sentido y la referencia de un término; una distinción similar al triángulo de Steinbring (1989): signo-objeto-concepto.

El marco de Rico (2012) adapta las ideas anteriores, desde una perspectiva más general, distinguiendo tres dimensiones en el análisis del significado de un concepto matemático.

- ♦ La estructura conceptual, sistema organizado de definiciones del concepto y de relaciones entre ellas, propiedades, proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- ♦ La fenomenología, compuesta por aquellas situaciones, contextos o problemas que están en el origen del concepto y que le dotan de sentido y de un carácter funcional.
- ♦ Los sistemas de representación, es decir, los signos y gráficos que hacen presente un concepto matemático, y que permiten pensar y comunicar sobre él, así como relacionarlo con otros conceptos.

Se toma este marco como referencia para analizar qué marcas o anotaciones asociadas al significado del CL son tomadas por los estudiantes durante una primera presentación del concepto. Debido a las características de la presentación realizada por los docentes, explicadas en el siguiente apartado, el estudio va a centrarse tanto en los aspectos de la estructura conceptual que los estudiantes deciden anotar como en los sistemas de representación utilizados para ello.

Las notas de los alumnos no nos permiten inferir una comprensión real de lo escrito, puesto que los alumnos pueden anotar sin comprender. No obstante, para poder caracterizar el nivel de desarrollo del CL que pueden reflejar esas anotaciones, recurriremos a las investigaciones de Cottrill et al. (1996) y de Valls et al. (2011). En ambas, haciendo uso del marco APOE (Arnon et al., 2014), los autores obtienen dos descomposiciones genéticas (DG), que describen hipotéticamente cómo puede desarrollarse la comprensión del CL en el alumnado. Estas se comparan en la tabla 1.

Tabla 1
Descomposiciones genéticas para el CL de una función f en un punto $x = a$

DG de Cottrill et al. (1996)	DG de Valls et al. (2011)
1. Acción de evaluar f en un punto	
2. Acción de evaluar f en varios puntos que se aproximan a a	2. Idea de aproximación en el dominio y en el rango:
3. Construcción del esquema de coordinación: a. Proceso en el que x se aproxima a a b. Proceso en el que y se aproxima a L c. Coordinación de 3a y 3b vía f	a. Proceso en el que x se aproxima a a b. Proceso en el que $f(x)$ se aproxima a L 3. Coordinación en la concepción dinámica vía f: cuando x se aproxima a a, sus imágenes $f(x)$ se aproximan a L
4. Encapsulación de 3: objeto límite 5. Reconstrucción de 3c. en términos de intervalos y desigualdades	4. Coordinación en la concepción métrica: encontrar un x *suficientemente cerca* de a tal que el valor de $f(x)$ sea lo *suficientemente próximo* a L
6. Cuantificación de 5.: obtención de definición $\varepsilon - \delta$	5. Consciencia sobre la existencia del límite L: escritura simbólica
7. Aplicación de la definición $\varepsilon - \delta$	

Nota. DG = descomposición genética.

Es importante tener presente la diferencia entre los términos aproximar y tender. La sucesión 1, 1,9, 1,99, 1,999,… se aproxima a 3, pero no tiende a 3, sino a 2. El concepto de tendencia debe entenderse como una aproximación que es capaz de mejorar cualquier otra (Blázquez y Ortega, 2002). En las dos DG anteriores se utiliza el término aproximaciones en la concepción dinámica del CL. Sin embargo, mientras que Valls et al. (2011) sí parecen aludir a tendencias en el punto 4 (aproximaciones suficientemente cercanas), la DG de Cottrill et al. (1996) conjetura el salto directo a la concepción métrica a través de la cuantificación de las distancias.

Contexto y método

En esta investigación han participado cuatro aulas de primero de Bachillerato, elegidas por disponibilidad y pertenecientes a dos centros de Valladolid. En ambos centros ha participado tanto el aula de la modalidad Científico-Tecnológica (de ahora en adelante, C-T) como el de la modalidad de Ciencias Sociales (CCSS). Los datos fueron recogidos en el curso 2011-2012. Durante todo el artículo haremos uso del masculino genérico, sin considerar la variable género, ni referirnos al sexo concreto de los participantes. Las cuatro aulas contaban con un número reducido de alumnos, participando en este estudio todos los que seguían la asignatura (37 entre las cuatro aulas). Nos referiremos a cada alumno con la letra A seguida de un número identificativo.

Uno de los centros es un instituto público de un barrio de Valladolid. El aula C-T tiene un profesor de matemáticas al que nos referiremos aquí como DOC1, y nueve alumnos participantes, cuyos códigos irán desde A1 hasta A9. En ese mismo centro, el aula de CCSS tiene otro profesor, que llamaremos DOC2, y siete alumnos: A10 a A16. El otro centro es un colegio privado-concertado situado en las afueras de la ciudad. Las dos aulas participantes tienen un mismo docente de matemáticas, al que identificaremos como DOC3. En el aula C-T participan diez estudiantes, con códigos A17 a A26; en el aula de CCSS lo hacen once alumnos (A27 a A37).

Introducción del CL en las cuatro aulas

El equipo investigador no dio ninguna directriz ni sugerencia a los profesores sobre cómo desarrollar su docencia, los docentes llevaron a cabo las sesiones tal y como las habían planificado. Los tres docentes realizaron una introducción del CL de una función a través de una presentación expositiva que se extendió durante una sesión de clase, y en la que se trataron conjuntamente tanto los límites de una función en un punto como en el infinito. En ningún aula se trabajó el límite de una sucesión. En las exposiciones, los docentes combinaron el discurso oral con la utilización de la pizarra de tiza, sin utilizar otros posibles recursos. Todas las exposiciones tuvieron un carácter personal, sin utilizarse el libro de texto ni ningún otro documento de referencia durante las mismas. El libro de texto, tanto para el docente como para muchos alumnos, cumplía únicamente el papel de repositorio de tareas. Explicamos brevemente las características propias de la introducción de cada docente, sin apreciarse diferencias significativas en las presentaciones derivadas de la diferente modalidad de Bachillerato.

El DOC1 comenzó la presentación con una definición general del CL de naturaleza dinámica: “a lo que tienden las imágenes de la función, $f(x)$, cuando la variable independiente, x, tiende a algo”, definiendo tender como “estar cada vez más cerca de” (identificándose erróneamente tendencia con aproximación monótona). Tras esto, el docente explicó con detalle la notación simbólica asociada a los límites en un punto (límites laterales) y en el infinito. Durante la exposición se desarrollaron cuatro ejemplos ilustrativos en funciones definidas simbólicamente, explicando el resultado obtenido a partir de la definición inicial, y añadiéndose en dos de ellos la representación gráfica.

El DOC2 comenzó la presentación tratando el CL de una función en el infinito, a través de siete ejemplos. En cada uno se utilizó una función diferente definida de forma gráfica, escribiendo simbólicamente el resultado y explicándolo verbalmente. Se desarrollaron ejemplos en $+\infty$ y en $-\infty$, con resultados $+\infty$, $-\infty$ y un valor finito en ambos casos. Además, hubo un ejemplo de límite en $+\infty$ que no existía (función oscilante). Así, esta introducción tuvo un marcado carácter ostensivo, presentando el CL a través de ejemplos particulares que sirven como modelos del mismo (Lacasta y Wilhelmi, 2010). Las explicaciones verbales del resultado estaban basadas en procesos dinámicos de aproximación, aunque se añadió una idea más estática al comentar verbal y gráficamente que un límite es infinito cuando se puede superar cualquier cota. Posteriormente, para explicar el CL en un punto, mostró dos ejemplos en funciones definidas simbólicamente, explicó su cálculo y lo completó con la representación gráfica de la función en un entorno del punto.

La presentación del CL fue similar en las dos aulas del DOC3. En ambos casos, el docente partió de una función definida gráficamente y presentó el CL desarrollando seis ejemplos de límites de dicha función (ver figura 1). En cada ejemplo se explicó la notación simbólica y el resultado obtenido, a través de descripciones basadas en aproximaciones dinámicas de las variables. Al igual que para el DOC2, en las dos aulas del DOC3 se evidenció una presentación ostensiva del CL, repitiéndose la estructura y los ejemplos modelo en ambas presentaciones: límite infinito en $+\infty$, límite finito en $-\infty$, dos límites en un punto que existen y dos que no (con saltos finito e infinito en el punto). En la imagen de la izquierda en la figura 1 se presenta lo manifestado en el aula C-T, límites en $\pm\infty$, 0, -5, 3 y 2, en la figura de la derecha se muestra lo correspondiente al aula CCSS, límites en $\pm\infty$, -1, -6, 2 y 3.

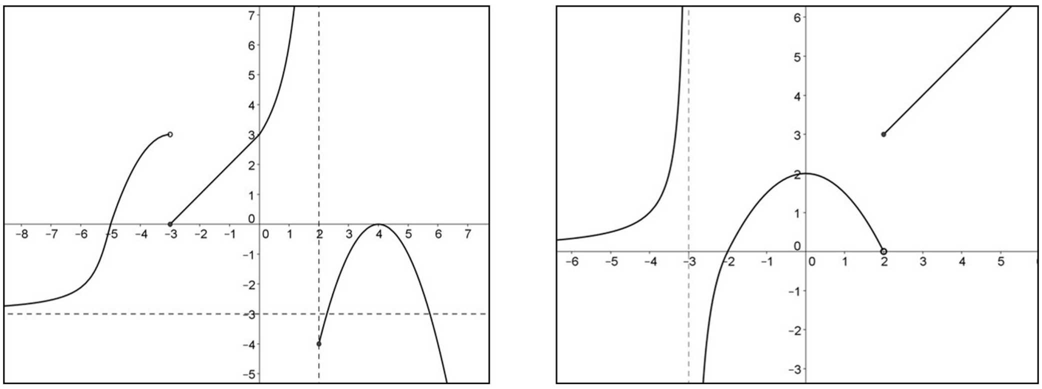

Figura 1. Funciones usadas por el DOC3 para introducir el CL

Ninguno de los tres docentes utilizó funciones definidas numéricamente en esta introducción del CL, ni tampoco se recurrió a ninguna situación que diera origen al concepto o que lo dotara de sentido (fenomenología en el sentido de Rico, 2012). El resto del tema se dedicó mayoritariamente a un cálculo de límites en funciones definidas algebraicamente y a la resolución de las indeterminaciones más usuales a través de la aplicación de diferentes reglas, por lo que no existieron referencias que permitieran avanzar en el significado del CL.

Análisis de los datos

Los datos principales para el análisis son las fotocopias de los cuadernos de los alumnos con las notas tomadas durante la presentación del CL. Además, contamos con varias fuentes de información contextual: diarios de clase elaborados por los docentes (a petición nuestra), notas tomadas como observadores por el equipo investigador y las entrevistas a varios alumnos sobre su uso del cuaderno, enmarcadas dentro de la investigación global sobre el cuaderno.

Sobre las anotaciones registradas por cada estudiante en la presentación del CL hemos desarrollado un análisis de contenido (Cohen, Manion y Morrison, 2011), de tipo descriptivo-interpretativo, con base en el marco teórico adoptado. Hemos dividido cada registro en segmentos de análisis, que llamaremos partes de la presentación. Ejemplos de partes son cada uno de los ejemplos ilustrativos expuestos, las definiciones descriptivas sobre el CL o las explicaciones de la notación simbólica. En la figura 2 se reproduce un escaneo de una anotación del estudiante A26, sobre el que ilustraremos el análisis realizado. En este se registran tres partes (tres de los ejemplos del CL) de la presentación del DOC3 en el aula C-T.

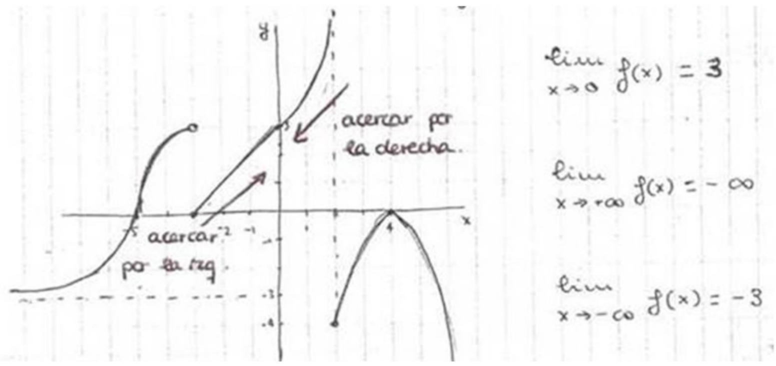

Figura 2. Registro por A26 de tres partes de la presentación (tres ejemplos)

Primero hemos estudiado qué partes deciden registrarse y con qué sistemas de representación. En este caso, A26 toma la representación gráfica de la función, común a todos los ejemplos, la representación simbólica de los tres límites y únicamente hay anotaciones verbales en uno de los tres ejemplos: el límite cuando $x \to 0$.

Posteriormente, se han analizado qué aspectos de la estructura conceptual del CL han quedado registrados por el estudiante en sus notas, tomando las DG de la tabla 1 como referencia de su nivel de desarrollo. En este fragmento, en los límites cuando $x \to \pm\infty$ no existen anotaciones relacionadas con la estructura conceptual del CL, tan sólo la notación simbólica y una marca en la gráfica sobre la existencia de asíntota horizontal. Sí se registran aspectos de la estructura conceptual del CL en el límite cuando $x \to 0$. Las anotaciones verbales tomadas ("acercar por la izquierda/derecha") muestran un proceso dinámico de aproximación en la variable independiente (punto 3a en la DG de Cottrill et al., 1996), aunque sin especificar verbalmente a qué valor se aproximan o tienden, y sin mencionar la variable dependiente. Estas notas se complementan con dos marcas en la representación gráfica (dos flechas hacia $x = 0$) que pudieran indicar una aproximación recorriendo la gráfica de la función, sin explicitarse la aproximación en cada variable y su coordinación para obtener el valor del límite.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Se presentan distribuidos en tres apartados. Inicialmente mostraremos los asociados a la primera fase del análisis: las partes registradas y los sistemas de representación usados para ello. Los otros dos apartados exponen los resultados obtenidos al analizar la estructura conceptual del CL registrada en las notas, distinguiendo el análisis de las anotaciones verbales y de las representaciones gráficas. No se dedica un apartado a las representaciones simbólicas, al reducirse su registro a la notación del límite y los resultados en los ejemplos, sin existir marcas asociadas a la estructura conceptual.

Partes de la presentación registradas y sistemas de representación utilizados

La tabla 2 muestra el número de partes de la presentación de cada docente que fueron anotadas por cada alumno y con qué sistemas de representación. Se tratan globalmente, sin diferenciar los aspectos correspondientes al límite en un punto y en el infinito. En la primera fila de la tabla se indica el total de partes existente en la presentación del CL realizada por el docente (PD).

El primer dato destacable de la tabla es que, de los 37 alumnos participantes, hay cuatro sin anotación alguna sobre esta presentación: A2, A7, A11 y A25. La entrevista con A2 y A11 nos permitió conocer más acerca de este hecho, obteniendo justificaciones distintas. El alumno A2, a diferencia de muchos de sus compañeros, nos indicó su preferencia por estudiar la teoría a través del libro de texto, aunque difiera de la presentación del docente. Por su parte, A11 no asistió ese día a clase, y nos reconoció en la entrevista que no suele tomar ninguna medida para tener el contenido presentado por el docente en un día en el que no asiste a clase, sin preocuparse por no tener ese contenido.

Tabla 2
Número de partes anotadas por estudiante y sistemas de representación utilizados

		Sistema de representación		
Participantes	Número de partes	V	S	G
	Aula DOC1 C-T			
PD	7	7	7	2
A1	1	1	1	0
A2	0	0	0	0
A3	6	2	6	1
A4	3	2	3	0
A5	7	2	7	0
A6	5	2	5	0
A7	0	0	0	0
A8	1	1	1	0
A9	5	3	5	1
Total	28	13	28	2
	Aula DOC2 CCSS			
PD	9	9	9	9
A10	8	0	8	6
A11	0	0	0	0
A12	9	2	8	9
A13	9	1	8	9
A14	8	0	8	7
A15	5	1	5	3
A16	9	1	8	9
Total	48	5	45	43
	Aula DOC3 C-T			
PD	6	6	6	1
A17	6	1	6	1
A18	6	1	6	1
A19	6	5	6	1
A20	6	0	6	1
A21	6	4	6	1
A22	6	4	6	1
A23	6	0	6	1
A24	6	5	6	1
A25	0	0	0	0
A26	6	2	6	1
Total	54	22	54	9
	Aula DOC3 CCSS			
PD	6	6	6	1
A27	6	1	6	1

Tabla 2
Número de partes anotadas por estudiante y sistemas de representación utilizados

		Sistema de representación		
Participantes	Número de partes	V	S	G
A28	6	4	6	1
A29	6	6	6	1
A30	6	4	6	1
A31	6	1	6	0
A32	5	4	5	1
A33	6	0	6	1
A34	6	0	6	0
A35	6	2	6	1
A36	6	0	6	1
A37	6	0	6	1
Total	65	22	65	9

Nota. P = partes anotadas; PD = presentación del docente; A*i* = estudiante i; V = verbal; S = simbólico; G = gráfico.

En las tres aulas donde la introducción del CL se redujo al desarrollo de ejemplos particulares (el aula del DOC2 y las dos del DOC3), la transcripción de estos ejemplos fue muy alta: una media del 88,4%, y un total de 22 de los 28 estudiantes en estas aulas transcriben todos los ejemplos. Por el contrario, en el aula del DOC1, donde los ejemplos ilustraban la definición del CL establecida al comenzar la presentación, la transcripción de ejemplos fue muy inferior (media del 33,3%). Así, cuando la presentación del CL se ha basado exclusivamente en el desarrollo de ejemplos modelo, los alumnos han mostrado una mayor necesidad de anotarlos, tendiendo a anotar todos. Los alumnos del DOC1 han mostrado comportamientos opuestos: mientras que A1 y A8 únicamente anotaron la definición descriptiva inicial del CL, A6 no la escribió, pero sí recogió tres de los cuatro ejemplos.

En casi todos los ejemplos que se registran, los alumnos han anotado simbólicamente su resultado. Así ha sucedido en el aula del DOC1 y las del DOC3. También con todos los ejemplos en el aula del DOC2, salvo tres alumnos (A12, A13 y A16) con el límite que no existía, que registraron la circunstancia verbalmente pero no simbólicamente.

El papel de las representaciones gráficas ha provocado diferencias importantes en su registro. Cuando la función se ha definido de forma gráfica, la transcripción ha sido mayoritaria, al ser requisito indispensable para poder dotar de sentido las notas tomadas (salvo A31 y A34, que transcribieron ejemplos de límites sin haber registrado la gráfica de la función). Sin embargo, en los casos en que la función se definió simbólicamente y, posteriormente, se realizó su gráfica (cuatro ejemplos, dos del DOC1 y los dos con límite en un punto del

DOC2), la transcripción fue mucho menor, únicamente en la tercera parte de estos casos. Así, muchos alumnos no parecieron valorar este hecho, y optaron por registrar la función utilizando únicamente un sistema de representación.

También han existido diferencias importantes en las anotaciones de tipo verbal. En los registros de los estudiantes del DOC1 y el DOC2, la presencia de estas anotaciones, en general, fue reducida. Las notas verbales de los alumnos del DOC1 se centraron en registrar la definición inicial del CL y en los límites laterales en un punto. En el caso del DOC2, la mayoría se limitaron a indicar que no existía el límite en $\pm\infty$ en una función oscilante. Sin embargo, en las aulas del DOC3 existió un alto contraste: algunos alumnos anotaron un registro verbal en todos o casi todos los ejemplos, mientras que en otros estudiantes apenas existieron. Los límites con mayor número de anotaciones verbales fueron los límites de funciones en un punto en los que no coincidían los límites laterales.

Destacamos dos hechos más. Únicamente tres de los alumnos del DOC2 registraron el ejemplo de límite que no existía. Este hecho, en comparación con la transcripción del resto de ejemplos en esta aula, puede manifestar cierta resistencia de los alumnos a aceptar esta situación o a considerarla como relevante. Además, otro alumno del aula, A15, registró los ejemplos de límites en $+\infty$ pero no en $-\infty$, lo que pudiera reflejar un comportamiento selectivo al transcribir los ejemplos, algo que ya hemos detectado al analizar las notas tomadas en la presentación de otros conceptos (Arce, Conejo y Ortega, 2016).

Aspectos de la estructura conceptual del CL reflejados en las notas de los alumnos: anotaciones verbales

En este apartado mostramos los resultados obtenidos al analizar qué aspectos de la estructura conceptual del CL han reflejado los alumnos en las anotaciones verbales tomadas durante la presentación del concepto, considerando conjuntamente los límites en un punto y en el infinito. Tomando como base las DG de la tabla 1, hemos detectado cinco tipos de anotaciones que reflejan, de forma progresiva, un significado más cercano al CL, que son:

Anotaciones que indican el nombre de elementos o cómo se lee una notación, pero sin hacer ninguna mención a su significado. En la figura 3 puede verse un ejemplo de anotación de este tipo, de A32: “se lee: límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$”.

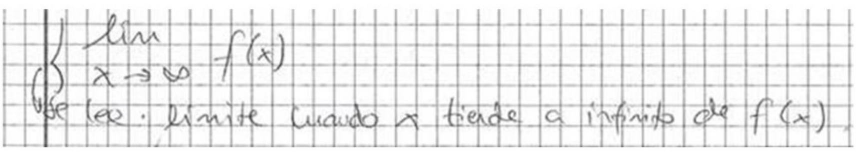

Figura 3. Anotación especificando cómo se lee la notación del límite (A32)

Anotaciones de hechos concretos o convenios sobre el límite sin que se expliquen ni justifiquen. Un ejemplo es escribir meramente la no existencia de un límite (figura 4). Otro ejemplo es: “un límite existe cuando es un número”, de A6, que escribió un convenio introducido por su docente.

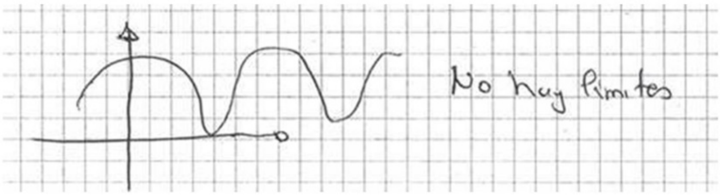

Figura 4. Indicación verbal de la no existencia de límite en $+\infty$ (A16)

Anotaciones que aluden a un proceso dinámico tan sólo en la variable independiente (punto 3a en la DG de Cottrill et al., 1996; 2a. en la DG de Valls et al., 2011), sin referencias ni a la imagen ni a la variable dependiente. Algunas de las anotaciones de este tipo, de forma más o menos explícita, reflejan únicamente un movimiento en los valores de la variable independiente, sin precisar a qué valor concreto nos “acercamos”. Un ejemplo es la anotación verbal de la figura 2, aunque en ese caso A26 ligó el registro verbal con las flechas en la gráfica de la función, que parecen inducir un movimiento sobre ella. Otro ejemplo puede verse en la figura 5, del alumno A6.

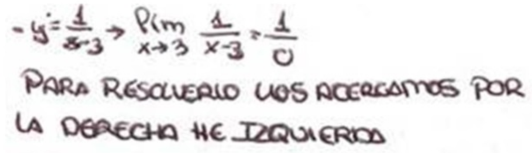

Figura 5. Anotación dinámica en la variable x sin indicar a dónde “se acerca” (A6)

Otras anotaciones sí que han precisado ese valor concreto de la variable independiente al que se produce el acercamiento. La figura 6 muestra un ejemplo.

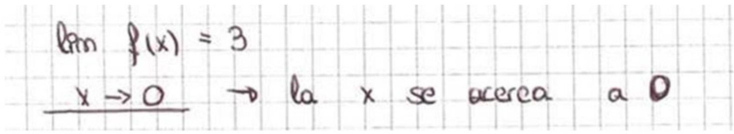

Figura 6. Anotación dinámica en la variable x indicando dónde “se acerca” (A21)

Anotaciones que aluden a un proceso dinámico tan sólo en la variable dependiente (punto 3b en la DG de Cottrill et al., 1996; 2b. en la DG de Valls et al., 2011), sin referencias a la variable independiente. Hemos detectado la misma diferenciación que en el caso anterior, con anotaciones que indicaban el valor de la imagen al que nos aproximamos y otras que no. Además, destaca la nota de

A12 (figura 7), que refleja una idea más estática: la superación de cualquier cota de comparación en un límite infinito (más cercano al concepto de tendencia y a la definición de Blázquez y Ortega, 2002), pero sin mencionar los valores de x: "los valores de $f(x)$ pueden superar cualquier valor".

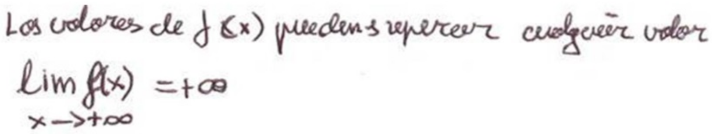

Figura 7. Idea de superación de cualquier cota en un límite infinito (A12)

Anotaciones que aluden a un proceso dinámico en ambas variables, mostrando incipientes coordinaciones entre variables (3c. en la DG de Cottrill et al., 1996; punto 3 en la DG de Valls et al., 2011). Incluimos aquí la transcripción de seis alumnos de la definición dinámica del CL con la que el DOC1 inició su presentación (ver figura 8, en la que además se enfatizaron los términos clave a través del subrayado). Únicamente cuatro alumnos más escribieron alguna anotación verbal con este significado, pero estas son poco precisas, sin explicitar claramente las variables o a qué valor se "acercan". Dos ejemplos, ambos en límites infinitos en +∞ son: "estas imágenes son cada vez más grandes según avanzas la x" (A32) o "cuanto mayor es la x, más baja" (A22).

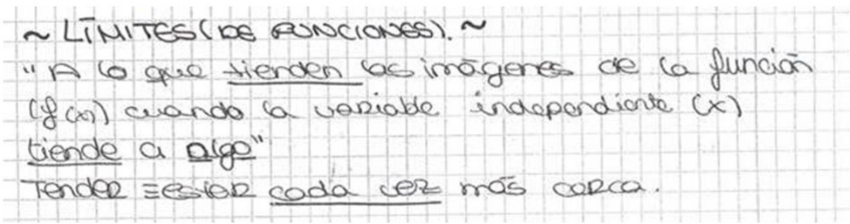

Figura 8. Transcripción de la definición inicial del CL del DOC1 (A5)

Además, existieron otras anotaciones relacionadas con el significado del CL, como las que explicaban la no existencia del límite de una función en un punto si no coinciden los límites laterales. Un ejemplo: "no existe este límite porque los límites laterales no coinciden" (A30). No obstante, no todas son correctas, como esta nota de A35, que atribuye erróneamente la no existencia de límite al cambio en la definición de la función: "no existe porque recorre dos funciones".

Otra anotación a resaltar es tomada por A32, que pretendía indicar la no relación existente entre el límite de una función en un punto y el valor de la función en dicho punto (figura 9). Sin embargo, la anotación resulta muy poco clara: "cuando hay un punto blanco, le quitamos y del límite no cambia nada, pero ese punto no afectaría al Dom $f(x)$".

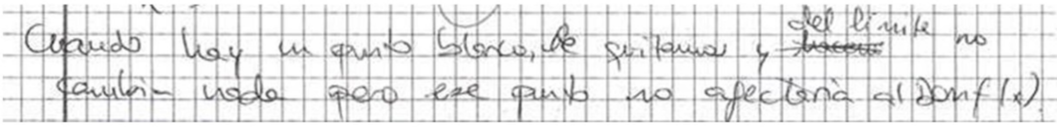

Figura 9. Nota sobre la no influencia en el límite del valor de la función en el punto (A32)

Por último, destacamos dos anotaciones en ejemplos de límites en el infinito con un comportamiento asintótico. En ellas, los alumnos aclaran explícitamente el proceso de acercamiento a la asíntota horizontal o al valor de su imagen, pero sin llegarla a tocar o a alcanzar dicho valor. Un ejemplo es este comentario de A28: "las imágenes de la x se van haciendo cada vez + pequeñas y se acercan a 0 sin llegar a tocarlo". Enfatizar este hecho puede provocar un obstáculo en el desarrollo de la comprensión del CL, como justificaremos en la discusión de los resultados.

Aspectos de la estructura conceptual del CL reflejados en las notas de los alumnos: representaciones gráficas

Explicamos en este apartado los resultados obtenidos en el análisis de los aspectos de la estructura conceptual del CL reflejados en las representaciones gráficas realizadas por los alumnos en sus cuadernos. En algunos casos, además de la gráfica de la función, los alumnos han añadido marcas que pueden asociarse a la estructura conceptual del CL. Estas marcas han sido analizadas tomando las DG de la tabla 1 como referencia. Se han detectado tres tipos de marcas que manifiestan, de forma progresiva, un significado más cercano al concepto.

Marcas que destacan información de la propia función. Aquí se ubican aquellas que destacan uno o varios puntos de la gráfica de la función o el dibujo de su asíntota horizontal y/o vertical, en caso de que exista. En relación con los puntos de la gráfica, existe mucha variedad en las representaciones registradas. En los límites en un punto generalmente se destaca únicamente dicho punto y/o sus coordenadas (una o las dos), en ocasiones para proporcionar información sobre si la función está definida o no en ese punto. La figura 2 muestra ejemplos de este comportamiento, en los límites cuando x tiende a -3 y a 2. Estos hechos pueden relacionarse con el paso 1 de las DG tanto de Cottrill et al. (1996) como de Valls et al. (2011), aunque por sí solos pueden suponer un obstáculo para el desarrollo de la comprensión del CL, como indicaremos en el siguiente apartado.

En algunos registros sobre límites en el infinito de los alumnos del DOC2 encontramos destacados varios puntos de la gráfica, como se observa en la figura 10, de A15. Un registro de este tipo pareciera estar más próximo al paso 2 de la DG de Cottrill et al. (1996), "acción de evaluar f en varios puntos que se aproximan a a". No obstante, no se evidencia el proceso de aproximación ni se relacionan los tres puntos, que además se denominan de la misma forma.

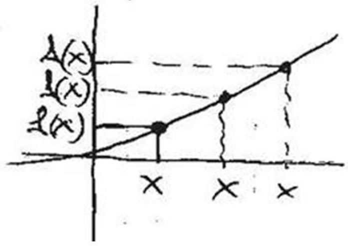

Figura 10. Representación gráfica donde se marcan varios puntos de la función (A15)

En otros casos, y también marcando información sobre la propia función, se suelen trazar las asíntotas, vertical y/o horizontal, si existen. Normalmente se utiliza un trazo discontinuo, marcándose en ocasiones el valor de la abscisa o de la ordenada asociada. Según Arce y Ortega (2013), este hecho ayuda a entender el comportamiento de la función dibujada (algo que muchas veces no se consigue debido a las deficiencias en su trazado). Sin embargo, el mero trazado de la asíntota en sí mismo tampoco induce explícitamente ningún aspecto sobre la estructura conceptual del CL.

Trazado de flechas que parecen indicar un movimiento o un sentido de recorrido en la función, bien sobre la propia gráfica o bien en alguna de las variables. Consideramos que no todas las flechas que hemos encontrado en las gráficas tienen la misma naturaleza o el mismo propósito. Por una parte, encontramos flechas sobre la propia gráfica (o paralelas a la misma) cuyo propósito principal interpretamos que es la indicación de un movimiento o un sentido de recorrido sobre la misma. Esto puede verse en la figura 2, en el límite cuando x tiende a 0, y en la figura 11 (alumno A12), donde la flecha parece ligada al movimiento en la gráfica de un punto destacado en la misma.

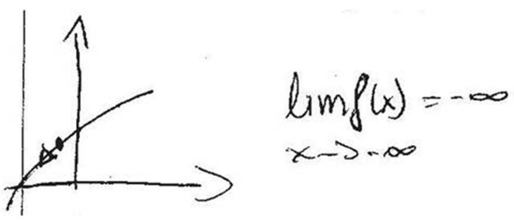

Figura 11. Flecha que parece inducir el movimiento de un punto sobre la gráfica (A12)

En ocasiones la flecha se realiza al finalizar el trazado de la gráfica, asociado a límites en el infinito. Interpretamos que estas flechas, además de inducir un movimiento o sentido de recorrido, añade la idea de que la gráfica que se deja de dibujar continúa. En la figura 12 se observa un ejemplo de este tipo de marca. Tanto en las flechas anteriores como en estas, parece indicarse un dinamismo sobre la propia gráfica, pero no hay ninguna marca que traslade ese dinamismo a cada una de las dos variables ni a su coordinación. Por tanto, estas marcas están lejanas de registrar aspectos propios de la estructura conceptual del CL.

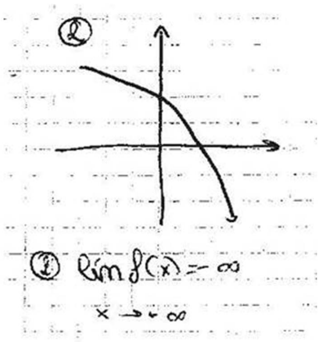

Figura 12. Flecha al finalizar el trazado de la gráfica que parece inducir que esta continúa (A13)

Sí que hemos encontrado una gráfica en la que las flechas no parecen asociarse a la propia gráfica sino a la variable independiente (figura 13, correspondiente a A29). Interpretamos que estas flechas sí que marcarían un proceso de aproximación a 0 en la variable independiente (punto 3a de la DG de Cottrill et al., 1996; 2a. en la de Valls et al., 2011), por izquierda y derecha, pareciendo mostrarse una correspondencia entre el dinamismo en la gráfica y el eje de abscisas (Ortega y Pecharromán, 2014). Además, se acompaña de una anotación verbal con ese significado.

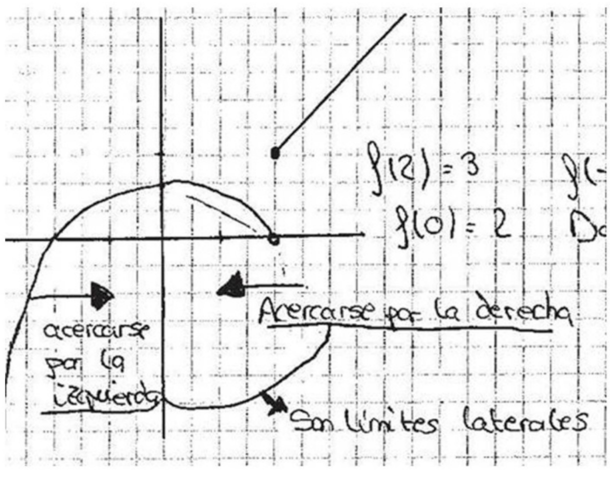

Figura 13. Flechas que parecen marcar un proceso de aproximación (a 0) en la variable independiente (A29)

Marcas que reflejan la superación de una cota fijada en la variable dependiente, evidenciando aspectos del significado más próximos al concepto de tendencia y a una coordinación en la concepción métrica del CL (punto 4 de la DG de Valls et al., 2011)

Hemos encontrado un único conjunto de dos gráficas con marcas de este tipo, pertenecientes a A16 (figura 14). En ellas, se observa cómo el alumno, en una función con límite $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$, sitúa una cota K en el eje de ordenadas, y marca las coordenadas de varios puntos. El punto de la segunda gráfica marca la superación de la cota por la función, marcándose las dos coordenadas. No obstante, esta representación no se acompaña de otras anotaciones verbales o marcas simbólicas que reforzaran ese significado.

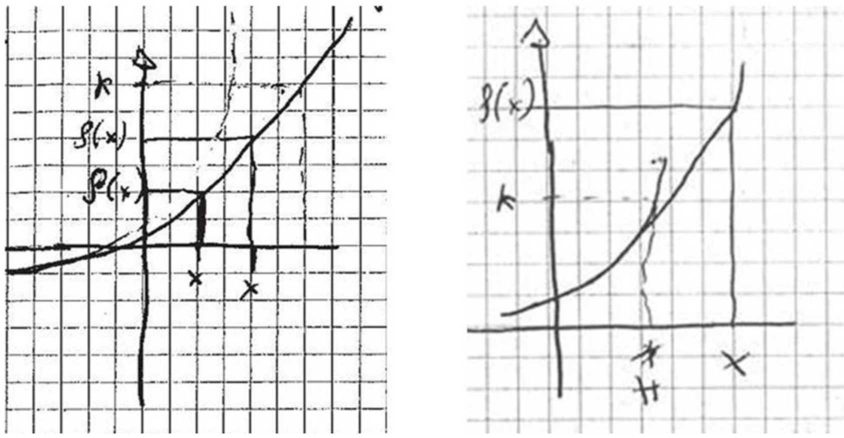

Figura 14. Dos representaciones gráficas que reflejan la superación de una cota por una función con límite infinito (A16)

Por último, destacamos una marca en la representación gráfica del alumno A22, asociada al ejemplo del límite de la función cuando x tiende a 0 en la clase C-T del DOC3. El análisis de las anotaciones tomadas por los estudiantes ha puesto de manifiesto que la idea de coordinación en la aproximación en ambas variables está poco presente. Sin embargo, en esta gráfica observamos una coordinación errónea al asociar la aproximación a 0 de la variable independiente con la aproximación al punto (0,0), cuando el límite de la función en $x = 0$ es 3. Además de la bola de radio 1 en R^2 dibujada, esa coordinación errónea se refuerza con una anotación verbal asociada: “cuando la x se acerca al valor 0, punto (0,0)” (fuera de la imagen de la figura 15).

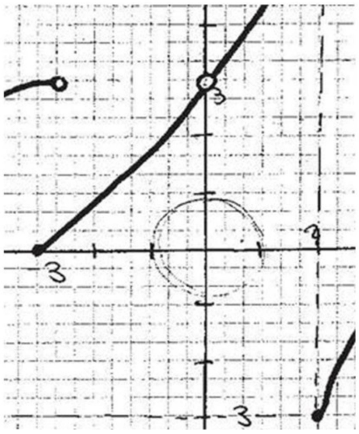

Figura 15. Marca que induce una coordinación errónea de las dos variables (A22)

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En relación al primer objetivo de este trabajo, hemos detectado un porcentaje de transcripción mucho mayor de los ejemplos en las tres aulas (la del DOC2 y las del DOC3) donde la presentación del CL ha tenido un carácter ostensivo, es decir, basado en la presentación de ejemplos modelo sin una definición general inicial de tipo dinámico. En el aula del DOC1, que comenzó con una definición general, la transcripción de ejemplos ha sido reducida. El diferente papel de los ejemplos (ejemplos como muestra del CL en el primer caso, o como aplicación o ilustración del mismo en el segundo) puede ayudar a explicar este hecho. Atendiendo al porcentaje de transcripción, los alumnos parecen dar mucha más relevancia a los ejemplos en la primera situación. Haciendo uso de los constructos concepto definición y concepto imagen de Tall y Vinner (1981), la ausencia de concepto definición del CL en las presentaciones de DOC2 y DOC3 parece aumentar la necesidad de sus alumnos de recoger los ejemplos, para contribuir a fortalecer y hacer más amplio su concepto imagen del CL.

El registro o no de anotaciones verbales en las notas tomadas durante la presentación del CL supone la mayor diferencia entre estudiantes, especialmente en las aulas del DOC3. Así, la importancia y la relevancia que los alumnos asignan a estas anotaciones parece diferir mucho de unos a otros. Además, y en relación al segundo objetivo planteado, el análisis de la estructura conceptual del CL reflejada por los registros de tipo verbal, simbólico y gráfico ha evidenciado que son los registros verbales los que, principalmente, han recogido aspectos asociados a esa estructura.

El análisis y clasificación de las anotaciones de tipo verbal ha permitido detectar un hecho no presente en las DG tomadas como base (Cottrill et al., 1996; Valls et al., 2011): la existencia de anotaciones que manifiestan únicamente un movimiento en una variable o en las dos, o en una dirección, pero sin explicitar el valor al que nos estamos aproximando (ver figura 5). La presencia de varias anotaciones de este tipo muestra que los alumnos parecen enfatizar más el hecho de que exista un movimiento o el proceso de acercamiento que el valor concreto al que nos aproximamos, hecho ya detectado por Kidron (2011).

En relación al segundo objetivo, existen bastantes anotaciones verbales que solamente hacen referencia al proceso dinámico de aproximación en una de las dos variables. Existe un número muy reducido de anotaciones donde se explicite la coordinación de ambos procesos de aproximación, y las existentes son poco precisas. Varias investigaciones como la de Blázquez y Ortega (2001) y la de Valls et al. (2011) evidencian el valioso papel de la utilización de funciones representadas numéricamente para facilitar la relación entre las variables y la coordinación de las aproximaciones en dominio y rango. En las cuatro aulas, ninguno de los docentes hizo uso de funciones definidas numéricamente durante la presentación del CL, sino de funciones dadas de modo simbólico y, sobre todo, gráfico. Este hecho contextual ha podido suponer una dificultad para que esas coordinaciones se expliciten en las notas registradas por los alumnos. Pero, también, el uso mayoritario de funciones definidas gráficamente para introducir el CL y el análisis de las marcas que los alumnos añaden a esa representación (como las flechas en el propio trazado de la gráfica) muestran una tendencia a destacar un movimiento y un proceso de aproximación a un punto sobre la propia gráfica, y no de cada una de las dos variables (de las dos coordenadas de dichos puntos).

Así, el análisis muestra cómo algunos aspectos importantes asociados al CL y al desarrollo del concepto no fueron registrados por bastantes alumnos, aspectos que no han sido suficientemente enfatizados por los docentes y/o no han sido considerados por los alumnos como relevantes o dignos de anotar (Pimm, 1999) en sus cuadernos. La situación contraria también se ha producido en algunos casos. Destacamos que algunos alumnos han enfatizado aspectos que pueden producir la asociación inapropiada de propiedades al CL. Un ejemplo es el comentario de A28: "las imágenes de la x se van haciendo cada vez + pequeñas y se acercan a 0 sin llegar a tocarlo", que puede hacer que el estudiante añada al valor del límite la "propiedad de no alcanzabilidad de este", un hecho común en los estudiantes (Fernández-Plaza et al., 2015).

En relación al tercer objetivo, la falta de anotaciones y marcas evidenciando los procesos de aproximación en dominio y rango, y su coordinación, puede mostrar una ausencia de concienciación sobre este doble proceso de aproximación, provocando un desarrollo insuficiente de la concepción dinámica del CL. Este hecho, como indican Cottrill et al. (1996), dificulta el paso posterior a la concepción métrica, lo que puede comprometer el desarrollo de aprendizajes posteriores sobre el CL en estos alumnos o, incluso, la necesidad de esa concepción métrica. Como muestra, el DOC2 ha sido el único que ha presentado la idea de superación de cualquier cota en el eje de ordenadas cuando un límite es infinito, aspecto que tan sólo dos alumnos han considerado relevante registrar (A12 verbalmente, figura 7; A16 gráficamente, figura 14).

El análisis de los registros de los alumnos no nos da información suficiente para poder conocer su comprensión del concepto, ya que pueden transcribir sin comprender. No obstante, estas notas sí que pueden contener o manifestar errores en la comprensión del CL, como son la nota de A35, identificando el cambio en la definición de la función con la no existencia de un límite en un punto; o la coordinación errónea de A22 (figura 15), que parece identificar la aproximación a $x = 0$ con la aproximación al punto (0,0).

No obstante, las decisiones de los alumnos sobre qué aspectos registrar y cómo hacerlo nos permiten conjeturar qué idea inicial del CL están plasmando y pueden inferir los alumnos a partir de sus notas. Esto es especialmente importante en contextos como el de esta investigación, donde muchos de los alumnos, en las entrevistas posteriores sobre la utilización del cuaderno, señalaron al mismo como su instrumento principal para el estudio y el aprendizaje de las matemáticas, al recoger todo lo realizado en la clase y de un modo más cercano a las expectativas del docente, en contraposición al libro de texto. Algunos ejemplos de extractos en esta línea son: "yo no estudio nunca con el libro de texto, yo siempre cuaderno, cuaderno, cuaderno" (A28), "todo lo que puede entrar en el examen, y lo que considero importante, lo has dado en el cuaderno" (A25), "no coges el libro de texto para estudiar la teoría, sino los apuntes" (A9) o "el profesor tiene su forma de explicar algo y tú lo apuntas para que sepas lo que quiere él, no lo que quiere el libro de texto" (A3).

Así, la responsabilidad de estos estudiantes al tomar notas es alta. Sin embargo, y como ya detectamos en Arce et al. (2016), los alumnos tienden a fiarse más del medio utilizado por el profesor en la exposición (privilegiando lo registrado en la pizarra del aula frente al discurso oral) que del tipo de contenido expuesto. En este estudio, doce de los 33 alumnos que tomaron alguna nota no han registrado ningún aspecto que consideremos asociado a la estructura conceptual del CL: se han limitado a transcribir ejemplos, indicando simbólicamente el resultado y, si acaso, destacando en la gráfica información de la función (puntos de la función, asíntotas) o marcando un sentido de recorrido en la gráfica utilizando flechas. En estos casos, la combinación de registros de este tipo con la utilización de estas notas como referente en su estudio puede fomentar el desarrollo en los alumnos de un significado del CL muy ligado a las diferentes situaciones o modelos posibles de límite, de los que pueden inducir reglas de actuación para obtener el resultado, generalmente ligadas a una representación concreta (Pecharromán, 2013), pero muy alejadas de una conceptualización adecuada. Una idea inferida sobre el CL que se podría desarrollar con registros de este tipo es la destacada por Przenioslo (2004), que la detecta con frecuencia en estudiantes universitarios de matemáticas: la combinación de la acción de sustituir la función en el punto (si existe) con la de recorrer la gráfica para obtener el límite cuando dicho valor no existe o hay un salto.

En resumen, el estudio de las notas tomadas por los alumnos en una presentación inicial del CL, en relación a los aspectos del significado del concepto que se evidencian en ellas, ponen de manifiesto que estas notas pueden condicionar fuertemente el aprendizaje y el concepto imagen que del CL desarrolla cada alumno, pudiendo ser un obstáculo para cursos posteriores y para la evolución de una concepción dinámica del concepto a una concepción métrica.

NOTA

Este artículo es una versión evolucionada y completada de la comunicación presentada en el XIX Simposio de la SEIEM, y titulada "¿Qué anotan los estudiantes durante una presentación intuitiva del concepto de límite? Relación con el significado del concepto".

Agradecimientos
El primer autor cuenta con una beca FPU (Ref. FPU12/02241) del MECD. Agradecemos a los docentes y a los alumnos participantes su colaboración desinteresada en esta investigación, y a los doctores Tomás Ortega y Cristina Pecharromán por sus valiosas aportaciones en la redacción final del artículo.

REFERENCIAS

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2016). ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 149-172. doi: 10.5565/rev/ensciencias.1706

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2016). Conocimiento matemático del concepto de límite en alumnos del Máster de Secundaria (Matemáticas). En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 199-207). Granada, España: Comares.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA, 8*(2), 61-73.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York, NY: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-7966-6

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME, 12*(1), 145-168.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30*, 67-82.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca, España: SEIEM.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Conejo, L. (2015). *Análisis histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los teoremas de límites y continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Valladolid, España.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic. D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192. doi:10.1016/S0732-3123(96)90015-2

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 699-710. doi: 10.1080/0020739X.2013.805887

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 211-229. doi: 10.5565/rev/ensciencias.1575

Job, P. y Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM, 46*(4), 635-646. doi: 10.1007/s11858-014-0604-0

Juter, K. (2006). Limits of functions as they developed through time and as students learn them today. *Mathematical Thinking and Learning, 8*(4), 407-431. doi: 10.1207/s15327833mtl0804_3

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279. doi: 10.1007/s10763-010-9258-8

Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lérida, España: SEIEM.

Ortega, T. (2016). *Entre la intuición y el formalismo. El concepto de límite*. Conferencia virtual en la Universidad de los Andes (Colombia). Disponible en http://ued.uniandes.edu.co/Difusión/Conferenciasvirtuales.aspx

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, 12*(2), 209-221.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 121-134. doi: 10.5565/rev/ec/v31n3.931

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid, España: Morata.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 103-132. doi: 10.1023/B:EDUC.0000017667.70982.05

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39-63.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 24-33.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169. doi: 10.1007/BF00305619

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338. doi:10.5565/rev/ec/v29n3.637

Matías Arce Sánchez
Universidad de Valladolid, España
arcesan@am.uva.es

Laura Conejo Garrote
Universidad de Valladolid, España
lconejo@am.uva.es

Recibido: Mayo de 2016. Aceptado: Setiembre de 2016.
Handle: http://hdl.handle.net/10481/45498