LA VARIABILIDAD EN EL RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO INFORMAL DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Variability in the Informal Probabilistic Reasoning of High School Students

Sánchez, E.[a]; Mercado, M.[b] y García, J.[a]

[a] Departamento de Matemática Educativa, México

[b] Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, México

Resumen

En esta comunicación se exploran las respuestas de los estudiantes a dos tareas binomiales, de predicción y de distribución, para conocer cómo expresan la variabilidad en sus predicciones antes y después de actividades de simulación. Para la recolección de datos, se realizó un estudio de cuatro etapas con dos grupos de estudiantes, uno que no había tomado un curso de probabilidad y estadística, y otro que había tomado uno. La primera y cuarta etapa consistió en aplicar un cuestionario relacionado con una situación binomial b(x, 2, ½). En la segunda y tercera etapa, los estudiantes llevaron a cabo simulaciones físicas y con el software Fathom, respectivamente. En el análisis se destacan las dificultades que enfrentan los estudiantes en la integración de la variabilidad en sus razonamientos, a pesar de su experiencia con la simulación. Se proponen dos categorías para describir patrones de respuesta: dogmatismo teórico y compromiso empírico.

Palabras clave: *Variabilidad, razonamiento probabilístico informal, dogmatismo teórico y compromiso empírico.*

Abstract

This communication explores student responses to two binomial tasks, one of prediction and another of distribution, to know how they express variability in their predictions before and after simulation activities. To collect data, a four-step study was conducted with two student groups, one that had not taken a course on probability and another that had taken one. The first and fourth steps consisted of applying a questionnaire related to a binomial situation b (x, 2, ½). In the second and third steps, students undertook manipulative and virtual simulations, respectively. As a result of analysis the difficulties students face in integrating variability into their thoughts, despite their experience with simulation, are highlighted. Two patterns of student responses are proposed: Theoretical dogmatism and Empirical commitment.

Keywords: *Variability, informal probabilistic reasoning, theoretical dogmatism and empirical commitment.*

INTRODUCCIÓN

Un problema general en el aprendizaje de la estadística es entender la relación entre datos y modelo; los estudiantes deberían enfrentarse frecuentemente a sus diversas formas particulares que toma dicha relación durante el proceso de adquisición de sus conocimientos estadísticos. En el terreno del aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad, una instancia de ese problema se presenta a la hora de estudiar las relaciones entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad. La comprensión de tales relaciones no es un asunto menor, ya que involucra muchas sutilezas. Una probabilidad clásica (casos favorables entre casos posibles) tiene como sustento la simetría del dispositivo generador de resultados aleatorios (monedas, dados, ruletas, urnas); por otro lado, bajo

Sánchez, E., Mercado, M., y García, J. (2016). La variabilidad en el razonamiento probabilístico informal de estudiantes de Bachillerato. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 479-488). Málaga: SEIEM.

el enfoque frecuencial, una probabilidad se estima a partir de los resultados observados en una secuencia de realizaciones del experimento aleatorio, bajo el supuesto implícito de que en éste subyace una distribución de probabilidades. A diferencia de lo que ocurre en los fenómenos naturales en los cuales la construcción de un modelo teórico puede ser una tarea muy difícil (pensemos, por ejemplo, en las probabilidades de lluvia), en las situaciones de juego mencionadas, bajo el enfoque clásico se pueden construir modelos teóricos con cierta facilidad. Además, como las situaciones de juego son repetibles bajo condiciones similares, es posible generar conjuntos de datos y aplicar el enfoque frecuencial para calcular probabilidades. Más aún, tales situaciones pueden ser simuladas con programas computacionales, lo *que hace* que las hace ideales para investigar las relaciones entre azar y datos, o más en general, entre modelos y 'realidad'. Surge la pregunta: Los estudiantes de bachillerato, ¿cómo razonan cuando tienen que dilucidar sobre las relaciones entre datos y modelo? Como la variabilidad en los datos es inevitable es crucial que los estudiantes desarrollen un sentido de dicha noción y sepan cómo opera en el modelo. En este trabajo se revelan algunas formas en que los estudiantes razonan con la variabilidad en una situación binomial simple, antes y después de realizar actividades de simulación.

RAZONAMIENTO PROBABILÍSTICO INFORMAL

Aunque el razonamiento probabilístico y el razonamiento matemático tienen muchos rasgos en común, el primero no es sólo una parte del segundo. Para distinguirlos se puede apelar a las grandes ideas propuestas por Gal (2005) en su análisis del alfabetismo probabilístico; las nociones de aleatoriedad, variación, independencia y el par de ideas complementarias predicción/incertidumbre están en la base del sistema de enunciados probabilísticos y no forman parte de ningún otro sistema matemático. Decimos entonces que un razonamiento probabilístico consiste en un razonamiento en cuyos enunciados se presenta al menos una de las grandes ideas de la probabilidad. Gal (2005: 46-47) señala que "Algunos aspectos de esas ideas se pueden representar mediante símbolos matemáticos o términos estadísticos, pero su esencia no puede capturarse totalmente mediante notaciones técnicas". Este comentario se conecta con el interés de enfocar nuestra atención en el razonamiento informal. El razonamiento informal es un proceso en el cual los estudiantes construyen un modelo de la situación, articulando varios de sus elementos, y con base en dicho modelo, derivan consecuencias con la ayuda del sentido común y del conocimiento previo (Perkins, 1985). El razonamiento probabilístico informal es el razonamiento informal que involucra alguna de las grandes ideas de probabilidad.

ANTECEDENTES

Como el presente estudio se refiere al razonamiento probabilístico, los estudios sobre cada una de las grandes ideas se pueden considerar como antecedentes; sólo recientemente se encuentran estudios que incluyen varias de las grandes ideas simultáneamente. Primero mencionaremos algunos estudios importantes cuyo contenido probabilístico se refiere a una de las grandes ideas, y después otros que contienen más de una, incluyendo la variabilidad, como es el caso del estudio que aquí se presenta. Recientemente Batanero (2015) presentó un panorama de los problemas y resultados de las investigaciones sobre *aleatoriedad*, incluyendo sus propias publicaciones sobre el tema (Batanero y Serrano, 1999). Por su parte, estudios didácticos sobre la *independencia* tienen historia: Steimbring (1986), Truran y Truran (1997) y Ortiz (2002); este último hizo un estudio de las formas en que se introducen los conceptos probabilísticos en textos de bachillerato, entre ellos el concepto de independencia. Con relación a la *variabilidad*, hay una serie de trabajos que inician con Shaughnessy (1997), como se muestra en las reseñas de Sánchez, Borim y Coutinho (2011) y Del Pino y Estepa (2013). Para el presente trabajo son relevantes los estudios de variabilidad que se enfocan en la conexión entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad y que se relacionan con el par de grandes ideas *predicción/incertidumbre*. En respuesta a la observación de Jones (2005: 368) acerca de que "… hay un vacío en la investigación asociada al enfoque frecuencial de probabilidad…" se han publicado varios artículos que informan de investigaciones sobre la articulación entre los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, la mayoría de las cuales se llevaron a cabo con el apoyo de recursos tecnológicos e incluyen el papel de la variabilidad. Por motivos de espacio mencionaremos sólo tres que consideramos representativos. Sthol, Rider, & Tarr (2004) exploraron las maneras en que niños de 6º grado hacen inferencias con base en datos obtenidos mediante experimentos físicos y simulación, sobre la legalidad o no de un dado. Ireland y Watson (2009) informan sobre la comprensión de estudiantes de 8º grado acerca de las relaciones de las varias componentes, en particular, la variabilidad y el tamaño de la muestra, involucradas en el tránsito de 'probabilidades experimentales' (concretas) a 'probabilidades clásicas' (abstractas). Konold et. al. (2011) señalan algunos peligros de la manera en que se suelen introducir en la enseñanza términos de probabilidad como "probabilidad experimental" y "probabilidad teórica".

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En este estudio se explora la manera en que los estudiantes razonan con, o ignoran, la variabilidad cuando se enfrentan a una situación de predicción/incertidumbre en la que subyace la distribución binomial $b(x, 2, ½)$. La variabilidad en una secuencia de resultados de un experimento aleatorio con referencia a un evento dado, se determina por las diferencias entre la probabilidad y la frecuencia relativa del evento. Para observar cómo los estudiantes consideran la variabilidad se les pregunta, antes y después de actividades de simulación, acerca de lo que esperan que ocurra cuando se sortea 1000 veces el control de la TV. En realidad, de manera velada se les pregunta lo que esperan como resultado de generar 1000 números aleatorios de la distribución $b(x, 2, ½)$. Lo anterior para responder las preguntas de investigación: ¿Los estudiantes son capaces de percibir la estructura y variabilidad de dicha situación simple de probabilidad? ¿Qué cambios se producen en sus respuestas después de las actividades de simulación respecto a sus respuestas previas? ¿Qué patrones de respuesta se pueden identificar?

MÉTODO

El estudio se llevó a cabo a lo largo de cuatro etapas con dos grupos de bachillerato. El primer grupo estaba formado por 37 estudiantes quienes no habían aún llevado un curso de probabilidad y estadística; el segundo estaba formado por 66 estudiantes, los cuales ya habían cursado dicha asignatura. En la primera etapa del estudio, se les administró un cuestionario con varias preguntas, de las cuales en este trabajo sólo se informa de dos de ellas. En la segunda, se guio a los estudiantes para que realizaran actividades de simulación con monedas, observaran los resultados y con base en éstos, respondieran las preguntas del cuestionario. En la tercera etapa, simularon la situación en el software Fathom, repitieron un gran número de veces el experimento, observaron los resultados y nuevamente respondieron las preguntas. Finalmente, en una sesión posterior se les volvió a pedir que respondieran el cuestionario. La situación es la siguiente:

> La familia Pérez está compuesta por la mamá Ana, el hijo Beto y el papá Carlos. Todas las noches se reúne la familia para ver la televisión, pero nunca están de acuerdo sobre qué programa de televisión ver. A Ana le gustan las películas, a Beto las caricaturas y a Carlos le gusta ver programas deportivos. Como sólo hay un televisor en la casa, lo más sencillo sería que se turnaran el control de la televisión diariamente. Pero Beto les propone a sus padres algo más divertido: "¡A la suerte!". Propone rifar el control jugando con el lanzamiento de dos monedas al aire al mismo tiempo, de la siguiente manera: Si no sale ninguna águila, gana la mamá Ana; si sale exactamente un águila, gana el hijo Beto; y si salen dos águilas, gana el papá Carlos. A los padres les parece justo y aceptan su propuesta.

Después de recibir la información anterior, a los estudiantes se les hicieron 13 preguntas, dos de las cuales son analizadas y reportadas aquí (que se vuelven a enumerar), a saber:

> Pregunta 1. ¿Qué crees que pasará si el control se rifa 1000 veces?
>
> Número de veces que gana Ana: ___

Número de veces que gana Beto: ___

Número de veces que gana Carlos: ___

Pregunta 2. Asigna la probabilidad a cada valor de la variable, es decir, completa lo siguiente:

Probabilidad de A (X = 0) = ___

Probabilidad de B (X = 1) = ___

Probabilidad de C (X = 2) = ___

Esta segunda pregunta es común en la enseñanza, pues sólo consiste en aplicar el procedimiento de la definición clásica de probabilidad o, en el caso de que se tengan datos disponibles, aplicar el enfoque frecuencial. Por el contrario, la pregunta 1 es un problema con mayor grado de dificultad para los estudiantes en la medida en que se requiere considerar la distribución de probabilidad y un sentido de la variabilidad. Si suponemos que los estudiantes conocen la distribución, probablemente su respuesta sea 250, 500, 250; no obstante, en la práctica a ellos mismos les sorprendería más este resultado que, por ejemplo, 257, 510, 233. El primer resultado se juzga teniendo en cuenta las reglas de la probabilidad, mientras el segundo se juzga, probablemente, mediante la heurística de representatividad (Kahneman y Tversky, 1982). Surge la pregunta: ¿cuál de estas respuestas resulta de mejor calidad? En conversaciones de la vida cotidiana la variabilidad esperada se suele expresar cambiando la expresión “ocurrirá el evento X” por expresiones como “ocurrirá el evento X o algo parecido”. La manera de traducir matemáticamente la expresión “…algo parecido” es utilizando desigualdades para definir rangos en los que cabe esperar los resultados; por ejemplo, considérese el evento: $E = \{(a, b, c) \mid a \varepsilon N, b \varepsilon N, c \varepsilon N, 200 \leq a \leq 300, 450 \leq b \leq 550, 200 \leq c \leq 300\}$ donde la probabilidad de E es un poco más que 0.8 u 80% (estimación realizada con el software Fathom); esta solución es la expresión matemática que permite considerar la variabilidad de la situación. No es razonable pretender que los estudiantes sin entrenamiento previo modelen de esta manera la variabilidad. Aunque en el nivel bachillerato ya cuentan con el lenguaje para hacerlo, no están acostumbrados a explotar las posibilidades de dicho lenguaje. No obstante, las respuestas que se aproximan a las frecuencias esperadas (como 257, 510, 233) puede considerarse como intentos de expresar la variabilidad.

Actividades de simulación. En la segunda etapa los estudiantes realizaron actividades de simulación. En equipos lanzaron varias veces dos monedas, de acuerdo al resultado de cada par de monedas, determinaban el valor de la variable y la registraban en tablas. Esto lo hicieron durante una clase, en la que reunieron los datos de cada grupo y los organizaron en tablas de frecuencias. Esta actividad sirvió para que se entendiera el sentido del problema y de la variable aleatoria que está en juego; notaron, por ejemplo, que los valores 0, 1 y 2 se presentan sin poderse predecir de antemano, pero que el valor 1 tiende a tener más ocurrencias. La actividad de simulación física fue muy útil para que los estudiantes entendieran la manera de funcionar del software cuando se pasó a la tercera etapa.

En la tercera etapa, el profesor mostró la elaboración de un programa en Fathom para simular la variable aleatoria. Se representa con 0 cuando la moneda cae de un lado (águila) y con 1 cuando cae del otro lado (sol). En una columna se sortean 1000 veces los valores 0 y 1 con probabilidad ½ cada uno; con lo que se representan los resultados de 1000 lanzamientos de una moneda. En una segunda columna se repite lo anterior para representar los resultados de la segunda moneda. En una tercera columna se suman los valores correspondientes; esto genera valores 0, 1 y 2; los cuales representan resultados de sortear la variable aleatoria binomial: $b(x, 2, \frac{1}{2})$. En el cuadro “Column Summary” de la figura 1, se representan las frecuencias absolutas de cada valor, en este caso 255, 494, 251; debajo de dicha figura se representa la gráfica de barras correspondiente.

Los estudiantes pueden repetir el sorteo de 1000 veces la variable de manera independiente las veces que quieran con sólo apretar una tecla. El software actualiza los resultados en la pantalla. Esto permite a los estudiantes investigar el comportamiento de los resultados. Pueden ver por ejemplo, que la tendencia de las ternas en la tabla "Column Summary" es que la frecuencias varían alrededor de los valores esperados. Añadiendo algunas instrucciones más, se puede estimar la magnitud de la variabilidad.

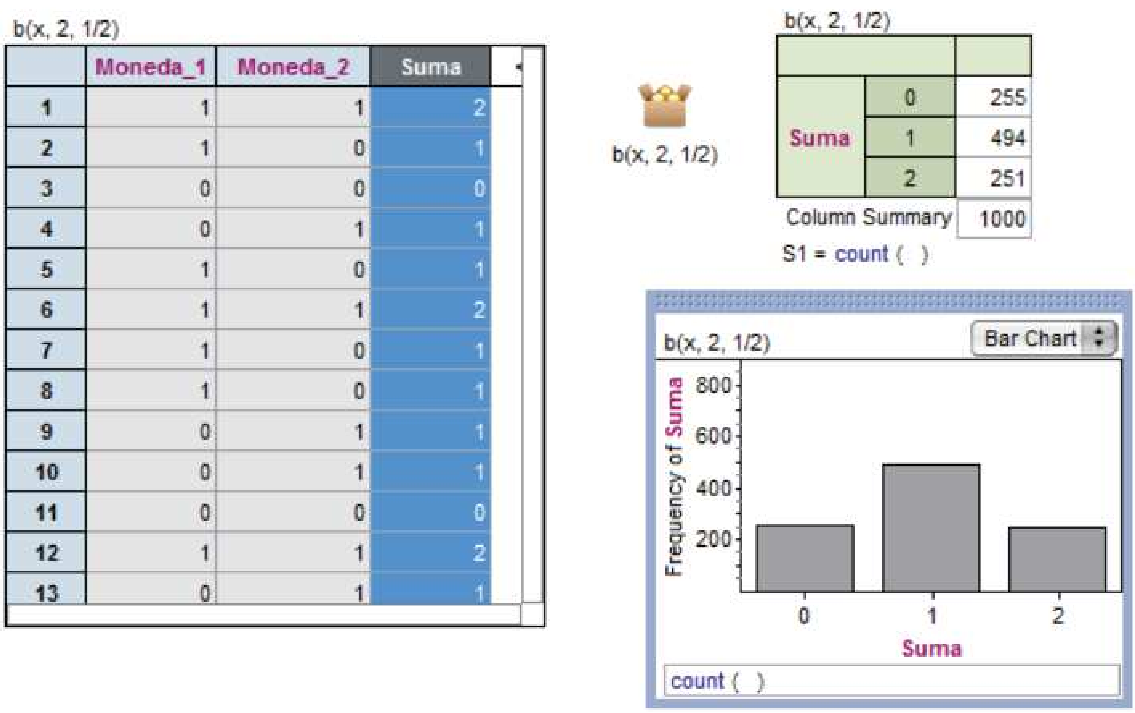

Figura 1. Pantalla del ordenador de la simulación en Fathom de 1000 lanzamientos de 2 monedas.

Procedimiento de análisis. En primer lugar, se clasifican las respuestas de cada pregunta, separando las correspondientes al pre- y al post-cuestionario, en categorías SOLO (Biggs y Collis, 1991). En segundo lugar, se consideran sólo las respuestas clasificadas en los niveles uni-estructural o mayor de ambas preguntas (separando las del pre y post-cuestionario) y sus frecuencias conjuntas se organizan en una tabla de doble entrada. La manera en que se forman las categorías SOLO es mediante la identificación y aislamiento de algunos aspectos relevantes (adecuados o no) en relación con la solución al problema. Estos aspectos o elementos relevantes son identificados o elaborados teniendo en cuenta tanto consideraciones teóricas como como rasgos comunes observados en las propias respuestas. Una vez establecidos estos elementos, se definen las categorías de pre-, uni- y mutli-estructural y relacional de manera similar, pero no exactamente, a cómo fue sugerido por Biggs y Collis (1991).

En general, los estudiantes respondieron a la pregunta 1 con tres números enteros, cada uno representando la frecuencia de los valores 0, 1 y 2. Tales respuestas no son correctas ya que la probabilidad de que las frecuencias reales coincidan con los números dados es muy pequeña, de donde no sería sensato esperar que ocurrieran las frecuencias previstas. Sin embargo, se pueden destacar algunos rasgos de las respuestas, en particular, relacionados con las nociones de variabilidad y distribución, de manera que permitan definir niveles de calidad para clasificarlas. Los aspectos de las tareas que proponemos para este fin son los siguientes [Llamaremos X a la variable aleatoria b(x, 2, ½)]:

1) *Coherencia:* la suma de las tres frecuencias es 1000. 2) *Forma de la distribución:* la frecuencia del valor X = 1 es mayor que la frecuencia de los valores X = 0 y X = 2. 3) *Variabilidad*: las frecuencias de 0, 1 y 2 caen respectivamente dentro de los rangos de 250 ± 50, 500 ± 50 y 250 ± 50.

4) *Ausencia de variabilidad*, las frecuencias de 0 y 1 son iguales. Se añade esta condición para distinguir las respuestas donde la variabilidad no se refleja; esto incluye respuestas: 250, 500 y 250.

Si una respuesta es incoherente, o bien, no cumple con las condiciones de la forma de la distribución y de la variabilidad es *Prestructural*. Si satisface la condición de la forma de la distribución, pero no de variabilidad, o de variabilidad, pero no de la forma de la distribución, o alternativamente, si satisface la condición 4 es *Unistructural.* Si las respuestas satisfacen la forma de la distribución y no las condiciones 3 y 4 es *Multistructural*; en este caso quiere decir que proponen una variabilidad muy amplia. Finalmente, si la respuesta satisface el patrón de distribución y variabilidad, pero no satisface 4 es *Relacional*.

Para responder la pregunta 2, los estudiantes también dan tres números. En este caso, la respuesta correcta es (¼, ½, ¼). Por razones de espacio, se describen directamente la categoría SOLO sin especificar antes los aspectos que las componen. Las respuestas se clasifican como *Prestructural* cuando 1) si se refieren a elementos extraños a la situación o son incomprensibles, y 2) cuando la respuesta consiste en tres números cuya suma es diferente de 1 o 100% sin ser proporcional a (1, 2, 1). Las respuestas se clasifican como *Unistructural* cuando cumplen alguna de las siguientes: 1) se asignan valores cuya suma es diferente de 1 o 100 (generalmente enteros) pero son proporcionales a (1, 2, 1); 2) los valores que proporcionan en la respuesta suman 100 o 1000, pero no son proporcionales a (1, 2, 1); 3) las respuestas son dadas con tres números decimales o fraccionarios cuya suma es 1, pero no son proporcionales a (1, 2, 1). Las respuestas que se clasifican en el nivel *Multistructural* cumplen con alguna de las siguientes condiciones: 1) proporcionan números decimales, fracciones o porcentajes cuya suma es 1 o 100%, con mayor probabilidad asignada a $X = 1$ que a las asignadas a $X = 0$ y $X = 2$; pero los valores están alejadas de las probabilidades teóricas (¼, ½, ¼); 2) en las respuestas se proporcionan valores cuya suma es 100 (generalmente números enteros, pero no necesariamente) y asignan mayor probabilidad a $X = 1$, pero se omite el signo "%"; y 3) expresan las probabilidades pero indicando que sólo son una aproximación, por ejemplo, "(alrededor de ¼, ½, ¼)". Las respuestas clasificadas en el nivel *Relacional* son distribuciones de probabilidad, algunas de las cuales son la distribución teórica y otras se obtienen a través del enfoque frecuencial.

La clasificación SOLO anterior se propone construir criterios para evaluar la calidad de las respuestas a cada pregunta de manera independiente. Sin embargo, la consideración conjunta de las respuestas a las preguntas 1 y 2 nos proporciona indicios de cómo reaccionan los estudiantes ante la variabilidad. Para organizar las respuestas conjuntas, se han realizado tablas de contingencia que dividen las respuestas de cada pregunta en dos clases complementarias. En la pregunta 1, una clase contienen las respuestas en las que se dan las frecuencias esperadas (250, 500, 250) y la otra contiene las respuestas restantes. Con respecto a la pregunta 2, se distinguen las respuestas en las que las probabilidades se obtienen mediante el enfoque clásico de las que se obtuvieron mediante el enfoque frecuencial.

Tabla 13. Categorías

	Frecuencias esperadas	Frecuencias diferentes a las esperadas
Enfoque clásico	*Dogmatismo teórico*	*Conexión de la teoría y los datos*
Enfoque frecuencial	*Relación borrosa entre la teoría y los datos*	*Compromiso empírico*

A continuación, se describe e interpreta cada categoría. Las respuestas clasificadas en *dogmatismo teórico* son aquellas que presentan las probabilidades teóricas y la predicción simplemente es calculada multiplicando la probabilidad de cada evento por el número de repeticiones del experimento (en este caso 1000). Los estudiantes cuyas respuestas se encuentran en esta categoría no son capaces de aprender las lecciones de la experiencia y, por lo tanto, en sus respuestas evitan o ignoran la variabilidad de la situación. Probablemente algunos de estos estudiantes ya conocían el enfoque clásico de probabilidad, pero de todos modos su forma de pensar es que un problema de predicción es sólo un problema matemático o teórico sin relación con los resultados de las situaciones reales.

Los estudiantes cuyas respuestas se clasifican en *compromiso empírico* descuidan la distribución teórica y proponen una distribución basada en el enfoque frecuencial. Para ellos no hay ninguna distribución subyacente a la situación puesto que lo que proponen es sólo una descripción de lo que vieron durante la simulación o en alguna experiencia previa. Aunque sus respuestas a la pregunta 1 son 3 números diferentes a las frecuencias esperadas, no se puede decir que consideran la variabilidad, ya que no consideran la distribución teórica como referencia para evaluar las diferencias.

Las respuestas con una mejor calidad serían aquellas en las que los estudiantes *conectan la teoría y los datos*, es decir, cuando aceptan una distribución teórica subyacente a la situación, pero se dan cuenta que en la práctica los resultados generalmente varían de los valores teóricos esperados, por lo que aceptan que la aleatoriedad no puede ser eliminada. Cuando lo hacen, es una indicación de que perciben la variabilidad e intentan expresarla. Esto les puede permitir entender la idea de la ley de los grandes números sobre la aproximación de las frecuencias a las probabilidades teóricas. Sin embargo, es necesario que trasladen las frecuencias a frecuencias relativas para compararlas con las probabilidades correspondientes.

Finalmente, las respuestas en la celda "frecuencias esperadas – enfoque frecuencial" sugieren una *relación borrosa entre la teoría y los datos*. Dichas respuestas son extrañas, ya que es difícil imaginar un argumento que conduzca a las frecuencias esperadas, sin conocer la distribución teórica de probabilidad.

RESULTADOS

En las tablas 2 y 3, se presentan las frecuencias de la clasificación en los niveles SOLO de las respuestas a las preguntas 1 y 2 del pre- y post-test. La tabla 2 se refiere a los estudiantes que no habían tomado un curso de probabilidad y estadística, mientras que la tabla 3 a los estudiantes que habían llevado el curso.

Tabla 2. Frecuencias de respuestas de acuerdo a los niveles SOLO del grupo sin curso de probabilidad y estadística. P = Preestructural, U = Uniestructural, M = Multiestructural, R = Relacional

	Pregunta 1					Pregunta 2					
	P	U	M	R	Total		P	U	M	R	Total
Pre-test	51%	34%	9%	6%	100%	Pre-test	34%	21%	13%	32%	100%
Post-test	17%	37%	20%	26%	100%	Post-test	11%	19%	27%	43%	100%

Cabe destacar que tanto en las dos preguntas, como en ambos grupos (tablas 2 y 3), las frecuencias de respuestas del post-test clasificadas en los dos niveles inferiores de SOLO (dos niveles superiores) son menores (mayores) que las correspondientes al pre-test. Esto significa que, en general, la calidad de las respuestas del post-test es mayor que la calidad de las respuestas del pre-test.

Tabla 3. Frecuencias de las respuestas de acuerdo a la categoría SOLO del grupo con curso de probabilidad y estadística. P = Preestructural, U = Uniestructural, M = Multiestructural, R = Relacional

	Pregunta 1					Pregunta 2					
	P	U	M	R	Total		P	U	M	R	Total
Pre-test	52%	45%	3%	0%	100%	Pre-test	48%	15%	0%	37%	100%
Post-test	27%	50%	0%	23%	100%	Post-test	4%	16%	12%	68%	100%

La tabla 4 se refiere a los datos de los estudiantes que no habían llevado un curso de probabilidad y estadística. En primer lugar, vale la pena poner atención en los resultados del pre-test. La frecuencia relativa de las respuestas clasificadas en “compromiso empírico” (ver tabla 1) es del 65% (9 de 14); clasificadas en “dogmatismo teórico” es de 14% (2 de 14); en “conexión de la teoría y los datos” es 14% (2 de 14) y en “relación borrosa entre la teoría y los datos" es 7% (1 de 14). En segundo lugar, poniendo ahora atención en los resultados del post-test, las frecuencias correspondientes son casi proporcionales a los datos anteriores, ya que en este caso el total es de 28: 68% (19 de 28), 14% (4 de 28), 11% (3 de 28) y 7% (2 de 28%). Lo relevante acerca de estos datos es que en ambos test la mayoría de las respuestas se clasifican en “compromiso empírico”.

Tabla 4. Frecuencias conjuntas de las respuestas a las preguntas del pre- y post- test (excluyendo el nivel Prestructural), del grupo sin curso de probabilidad y estadística.

		Pregunta 1					
Pregunta 2		Frecuencias esperadas		Frecuencias no esperadas		Total	
		Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
	Enfoque clásico	14%	14%	14%	11%	28%	25%
	Enfoque frecuencial	7%	7%	65%	68%	72%	75%
	Total	21%	21%	79%	79%	100%	100%

La tabla 5 se refiere a los datos de los estudiantes que habían tomado un curso de probabilidad y estadística. Poniendo atención en los resultados del pre-test, 79% (19 de 24) se clasifican en “dogmatismo teórico”; 0% en “compromiso empírico”; 8.5% (2 de 24) en “conexión de la teoría y los datos” y 12.5% (3 de 24) en “relación borrosa entre la teoría y los datos”. Con respecto a los datos del post-test, las frecuencias correspondientes son 60% (26 de 43), 19% (8 de 43), 16.5% (de 43 7) y 4.5% respectivamente. Cabe destacar que la mayoría de las respuestas en ambos test se clasifican en “dogmatismo teórico”; además, en el pre-test ningún estudiante dio una respuesta clasificada en “compromiso empírico”, pero después de las actividades de simulación se encuentra el 19% (8 de 43) en esta categoría.

Tabla 5. Frecuencias conjuntas de las respuestas a las preguntas del pre- y post- test (excluyendo el nivel Prestructural), del grupo con curso de probabilidad y estadística.

		Pregunta 1					
Pregunta 2		Frecuencias esperadas		Frecuencias no esperadas		Total	
		Pre	Post	Pre	Post	Pre	Post
	Enfoque clásico	79%	60%	8.5%	16.5%	87.5%	76.5%
	Enfoque frecuencial	12.5%	4.5%	0%	19%	12.5%	23.5%
	Total	91.5%	64.5%	8.5%	35.5%	100%	100%

DISCUSIÓN

El análisis anterior es principalmente descriptivo debido a que las categorías utilizadas fueron definidas a partir de los datos relativos al diseño de la situación. Sin embargo, algunos de sus rasgos o propiedades se pueden relacionar con conceptos emergentes de respuestas a otros problemas o situaciones relacionadas con la incertidumbre.

El *dogmatismo teórico* se relaciona con una posición que concibe a los objetos estadísticos como convencionales. Los estudiantes piensan que para encontrar una probabilidad o hacer una predicción existen un conjunto de pasos prestablecidos que se deben seguir. Analizar casos favorables entre casos posibles para encontrar la probabilidad y para hacer la predicción simplemente multiplicar la probabilidad por el número de veces que se repite el experimento. Esta manera de enfrentar los problemas pone mayor atención a las inferencias ‘lógicas’, pero descuida la consistencia de los resultados con las situaciones reales. El problema es que algunas de las inferencias que hacen los estudiantes en probabilidad y estadística no son apropiadas, por lo general, debido a la dificultad de incluir en ellas representaciones de la aleatoriedad y la variabilidad presentes en las situaciones. Observamos en este comportamiento de resolución similitud con sesgos presentes en creencias que emergen en otras situaciones; por ejemplo: "si la probabilidad de obtener 5 en la cara de un dado es 1/6, entonces ocurrirá exactamente un 5 al tirar seis veces el dado" o "si una muestra es aleatoria, entonces es como una réplica en miniatura de la población". Estas creencias se basan en inferencias que aparentan ser lógicas pero que bastaría un experimento simple para refutarlas.

El *compromiso empírico* se relaciona con una posición que concibe a los conceptos y resultados probabilísticos y estadísticos como reflejos o representaciones de una realidad del mundo físico o social; para quienes se ubican en esta posición, la validez de los resultados descansa más en su relación con situaciones reales que en una conexión lógica. Así, los estudiantes comprometidos empíricamente piensan que una probabilidad es una descripción de un estado preciso del mundo: el número de veces que ocurrió un evento entre el número de veces que se repitió y, de manera análoga, la predicción recoge rasgos que evidentemente se presentan en la experiencia, en particular, el de la variabilidad. La actitud de creer sólo en lo que se puede observar limita sus posibilidades de inferencia y teorización; para ellos la "probabilidad frecuencial" no es una aproximación a una probabilidad subyacente, pues esto requiere una conceptualización, sino una descripción de los datos; si los datos cambian, cambia la probabilidad. Hay otras situaciones donde se encuentra un comportamiento similar. Por ejemplo, cuando el concepto de *evento*, como se entiende en probabilidad, se identifica con el *resultado* porque este puede verse. También, el compromiso empírico se relaciona con el *enfoque al resultado* de Konold (1989) cuando la respuesta a una pregunta de probabilidad es evaluada como correcta o incorrecta si es coincidente o no con los resultados obtenidos.

El desarrollo de un razonamiento probabilístico y estadístico requiere la integración del modelo teórico con el contexto, combinando de manera conveniente las dos tendencias descritas arriba. En la exploración realizada, hemos considerado que las respuestas que identifican la distribución (¼, ½, ¼) y que reflejan la variabilidad, (por ejemplo, dando frecuencias como 252, 513, 235) contienen de una forma embrionaria la búsqueda de dicha integración. Esto es porque derivan de la definición clásica la distribución y predicen valores diferentes a los valores esperados (250, 500, 250), presumiblemente porque perciben que en la realización del experimento hay variabilidad.

A partir de nuestras observaciones es posible conjeturar una trayectoria hipotética en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes. Consistiría en una tendencia al compromiso empírico al comienzo (en sus primeros acercamientos a la probabilidad los estudiantes buscan vincularla con situaciones reales); luego, con la instrucción se vuelve teórica (ahora se cree de manera dogmática en toda derivación con apariencia lógica). En un tercer momento se integran partes de ambas tendencias, se percibe lo teórico como una conceptualización abstracta de situaciones reales y no meramente su descripción. A su vez la derivación de resultados teóricos es una manera de revelar aspectos subyacentes en la realidad y no sólo de reflejar lo que ya se ve. En dicho proceso, la manera en que se integra la variabilidad es crucial.

El análisis realizado permite dilucidar algunas consecuencias para la enseñanza de la probabilidad. En primer lugar, desarrollar secuencias de enseñanza que problematicen la relación entre el modelo matemático y la realidad, en particular, entre las definiciones clásica y frecuencial, poniendo especial atención en la variabilidad de los resultados de sortear experiencias aleatorias. El desarrollo del razonamiento probabilístico debe integrar el modelo y los datos teniendo en cuenta la variabilidad, esto implica actividades de conceptualización y no sólo la descripción de resultados. Es ingenuo pensar que sólo con la realización de actividades de simulación y la observación de los resultados, los estudiantes puedan abstraer una distribución subyacente; pero también lo es, pensar que un enfoque teórico por sí mismo habilitará a los estudiantes para hacer la conexión con los datos.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2015). Understanding randomness: challenges for research and teaching. Conferencia en *CERME 9: 9th Congress of European Research in Mathematics Education*. Praga, Febrero, 2015.

Batanero. C., & Serrano, L. (1999). The meaning of randomness for secondary school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(5), 558-567.

Biggs, J. B., Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligence behavior. En H. A. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*, pp. 57-76. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Del Pino, J. y Estepa, A. (2013). La dispersión: breve análisis del concepto, su historia y estado de la investigación didáctica. *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM). Baeza, España.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemma. In G. A. Jones (Ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning (pp. 39-63). New York: Springer.

Ireland, S., Watson, J. (2009). Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability. International Electronic Journal of Mathematics Education, 4(3). 339-370.

Jones, G.A. (2005). Reflections. In G.A. Jones (Ed.). Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning (pp. 367-372). New York: Springer.

Kahneman, D., Tversky, A. (1982). Variants of uncertainty. In D. Kahneman, P. Slovic, A. Tversky (Eds.), pp. 509 520.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction, 6,* 59-98.

Konold, C., Madden, S., Pollatsek, A., Pfannkuch, M., Wild, C., Ziedins, I., Finzer, W. Hortosn, N.J., Kazak, S. (2011). Conceptual challenges in coordinating theoretical and data-centered estimates of probability. Mathematical Thinking and Learning, 13(1 & 2), pp. 68-86.

Ortiz, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Perkins, D.N. (1985). Reasoning as imagination. Interchange 16(1), 14-26.

Sánchez, E., Borim, S., & Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En Batanero, C., Burril, G., Reading, C. (Eds*.). Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education. A joint ICMI/IASE Study* (pp. 211-221). New York: Springer.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph & K. Carr (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 6-22). Rotorua, New Zealand: University of Waikata.

Sthol, Rider, Tarr (2004). Making connections between empirical and theoretical probability: Students' generation and analysis of data in a technological environment.

http://www.probexplorer.com/Articles/LeeRiderTarrConnectE&T.pdf

Steinbring, H. (1986). L'independence stochastique. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 7*(3), 99-118.

Truran, J. y Truran, K. (1997). Statistical Independence - One concept or two? Implications for research and for clasroom practice. En B. Philips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8* (pp. 87-100). Swinburne University of Technology.