

CRONOTOPÍA: UN “PROGRAMA DE BOGOTÁ” PARA LO QUE SE SUELE LLAMAR “GEOMETRÍA”¹

Carlos Eduardo Vasco Uribe
Profesor Univesidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
vasco@bunde.tolinet.com.co

Introducción

En la ciudad de Cremona, al sur de Italia, un legendario personaje venido del Asia Menor, después de conocer la agrimensura egipcia, establece una cofradía de maestros y aprendices de lo que entonces se empezó a llamar “ta matemática”, las cosas que había que aprender. Dentro de ellas, estaban la aritmética y la geometría, cuya traducción directa es precisamente “agri-mensura”, la astronomía y la música. Podríamos decir que ese legendario personaje se propuso un primer programa para lo que hoy seguimos llamando “geometría”: el programa aritmo-geométrico de Pitágoras, que pretendía estudiar los números figurados, triangulares, cuadrados, rectangulares oblongos, pentagonales, piramidales, cúbicos y prismáticos, ligando así inextricablemente la aritmética y la geometría.

En la ciudad de Alejandría en el Siglo IV antes de nuestra era, un paciente lector de manuscritos de las distintas escuelas matemáticas griegas, la eleática, la milesia, la pitagórica y la ateniense, se propuso otro programa ambicioso: unificar todo lo conocido entonces sobre la geometría en un tratado que alcanzó a 13 libros, algunos de los cuales comenzaban con definiciones, axiomas o nociones comunes y postulados que permitieran reconstruir por deducción lógica todas las proposiciones aceptadas en su época. Podríamos llamarlo “el Programa de sistematización geométrica de Euclides”.

En el Siglo XVII se dieron dos revoluciones en la geometría. La primera y más estudiada entre nosotros fue la revolución que produjo Descartes con la correspondencia entre ecuaciones algebraicas y lugares geométricos en el plano, con lo que nació la geometría analítica. El propósito de realizar este ambicioso objetivo podría llamarse “el Programa analítico de Descartes”.

Por la misma época ocurrió también otra revolución silenciosa, proveniente de la tradición no escrita de los constructores de catedrales y de los canteros y picapedreros franceses, la de la geometría proyectiva de Desargues, con su rico lenguaje botánico de árboles y ramas, sombras y puntos en el infinito. Esta propuesta no comprendida en su tiempo se podría llamar “el Programa proyectivo de Desargues”. Este programa fue continuado por Pascal y, más tarde, ya a finales del Siglo XVIII y comienzos del XIX, por Monge, Gergonne, Poncelet y Chasles en Francia y por Möbius, Plücker y Jakob Steiner en Alemania.

¹Dedicado a la memoria del Dr. Carlo Federici Casa.

Esos serían algunos de los primeros programas para lo que se suele llamar “geometría”. Pero el más famoso de todos ellos es el llamado “Programa de Erlangen” de Félix Klein.

El “programa de Erlangen”

En 1872, Félix Klein propone como lección inaugural a su primera cátedra en la Universidad de Erlangen la conferencia: “Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen” (“Observaciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas”), más conocida como “el Programa de Erlangen”.

En él utiliza la conceptualización de los grupos que con Sophus Lie había aprendido recientemente de Camille Jordan en París, y así logra elaborar una escala de geometrías que van desde la topología, como geometría correspondiente al grupo de las transformaciones continuas, a la proyectiva, la afín y la euclidiana, con subgrupos cada vez más limitados, como el de las proyectividades y el de las afinidades, hasta llegar al grupo de las homotecias y al de las transformaciones rígidas.

Pensando en los nombres asociados con estos programas, es ciertamente atrevido e inmodesto para cualquier matemático proponer un posible programa futuro para lo que se ha llamado “geometría”. Mucho más lo es para quien ni por sus publicaciones ni por su investigación ha sobresalido en esta área y no tiene por lo tanto ninguna autoridad académica para proponerlo.

Veremos, sin embargo, que así como podemos hablar del programa de Pitágoras, del de Euclides, del de Desargues y del de Klein o Programa de Erlangen, también podemos pensar en que después de 130 años vale la pena revisar éste y otros programas, para soñar en el futuro de lo que ahora llamamos “geometría”.

Hemos visto ya algunos programas de la geometría antigua y otros del Siglo XVII. En el Siglo XVIII podríamos hablar del programa de reducción del quinto axioma de Euclides por Lagrange y por Saccheri. Pero saltemos directamente al Siglo XIX, que se abre con el Príncipe de los Matemáticos, Karl Friedrich Gauss.

El siglo XIX

Gauss y la geometría diferencial

Fueron los trabajos de Gauss sobre la geometría de las superficies los que produjeron la gran revolución geométrica de comienzos del Siglo XIX. Las curvaturas de las superficies no dependían ya de su inmersión en el espacio tridimensional ambiente, sino de mediciones de longitudes de caminos por operaciones diferenciales intrínsecas a la superficie misma. La geometría diferencial nació en 1827, de una vez tan hermosa como la Venus de Botticelli, con el trabajo de Gauss sobre teoría general de las superficies (“Allgemeine Flächentheorie”).

Las geometrías de Lobatchevsky-Bolyai-Gauss

Con el fracaso de Lagrange para demostrar el quinto postulado de Euclides a partir de los otros cuatro y las nociones comunes, con el fallido trabajo de Saccheri que creyó haberlo logrado, y con las consideraciones de Lambert, la geometría estaba lista para que el genio

de Gauss, la visión de Lobatchevsky y el paciente trabajo de Bolyai produjeran hacia el año 1820, independientemente y casi simultáneamente, una geometría en la que no sólo existiera una paralela a una recta dada por cada punto exterior a ella, sino que todas las rectas pertenecientes a un haz de rectas que pasaran por un punto exterior a otra recta dejaran de cortarla.

Hamilton

En esa misma época, el escocés William Rowan Hamilton reformuló la mecánica clásica de Newton, D’Alembert y Lagrange considerando los momentos como tres nuevas dimensiones, además de las tres coordenadas usuales, creando nuevos espacios, hoy llamados espacios de fase, y nuevas maneras de trabajar sobre ellos. En 1843 inventó los cuaternios, el primer cuerpo no conmutativo, anticipándose a las necesidades del pensamiento espacio-temporal de la relatividad einsteiniana.

Grassmann

Por el mismo tiempo, en 1844, Hermann Grassmann inventó una manera de codificar el espacio por medio de su teoría generalizada de la extensión, la “Ausdehnungslehre”, demasiado avanzada para su tiempo. El sueño de Leibnitz de un lenguaje simbólico configurado por caracteres semejantes a los caracteres chinos, llamado por él “Characteristica Universalis”, tuvo un primer intento de realización en la mencionada teoría de la extensión o “Ausdehnungslehre” de Grassmann.

Vectores, tensores, matrices y determinantes

Una simplificación de esa teoría dio lugar a los espacios vectoriales de Gibbs, y otra menos simplificada a las álgebras de Clifford.

Frobenius, Sylvester y Cayley desarrollaron la teoría de matrices y determinantes, hoy sistematizada como álgebra lineal.

En Italia, Ricci y Levi-Civita crearon los tensores y la manera de tratar los espacios de cualquier dimensión finita en cualquier sistema de coordenadas. Esa era la herramienta que Einstein necesitaba para desarrollar su teoría de la relatividad, y fue a Italia a aprenderla con ellos.

El programa de Riemann

Bernhard Riemann escribió para su habilitación en Göttingen tres conferencias, de las cuales Gauss escogió para presentación pública la que versaba sobre geometría. Así leyó Riemann en 1854 su conferencia: “Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”: “Sobre las hipótesis que subyacen a la geometría”.

Esta conferencia podría llamarse “el Programa de Riemann”. En él, Riemann extiende a cualquier espacio la noción de métrica de Gauss para las superficies y define lo que hoy se llaman geodésicas y el tensor de curvatura, con lo que provee las herramientas necesarias para la geometría diferencial generalizada y la futura teoría de la relatividad. En la segunda parte de la conferencia reflexiona sobre las relaciones entre geometría y realidad; releyéndola retrospectivamente parece que estaba ya vislumbrando la teoría de la relatividad que vendría 60 años más tarde.

Los modelos de Beltrami, Riemann, Klein y Poincaré

No se suele reflexionar sobre el hecho de que las geometrías no euclidianas de comienzos del Siglo XIX apenas sobrevivieron durante unos cuarenta años como meras curiosidades teóricas, pues -además de la resistencia generalizada a aceptarlas, que se extendió aun al Siglo XX a Colombia con la prohibición de Garavito de que se enseñaran geometrías no euclidianas en la Universidad Nacional- no existían modelos para ellas.

En 1860 Beltrami propuso el primer modelo de la geometría de Lobatchevsky, Bolyai y Gauss: se trata de la trompeta generada como superficie de revolución a partir de la tractriz, con ciertas curvas de longitud minimal o geodésicas como rectas de esa geometría.

Riemann propodría luego la geometría de las circunferencias maximales de la esfera (mal llamadas “círculos máximos”) como un modelo de otra geometría, llamada después “elíptica”, en la que no había paralelas ni tampoco figuras semejantes no congruentes, pero sí figuras sorprendentes como triángulos equiláteros con un ángulo recto en cada vértice.

Poco después, Klein y Poincaré propusieron sus modelos de disco para las geometrías llamadas “hiperbólicas”: el disco de Klein con cuerdas como rectas y el de Poincaré con ciertos arcos de circunferencia como rectas. Poincaré inventó otro modelo de un semiplano con semicírculos como rectas, que puede obtenerse del disco de Poincaré por proyección estereográfica.

Con un poco de imaginación tridimensional es posible captar también la equivalencia proyectiva de los discos de Klein y Poincaré, así como los modelos de círculos y de conos, y hasta me he atrevido a proponer un modelo de la geometría hiperbólica que se extiende a todo el plano y cuyas rectas son -significativamente y no por azar- arcos de hipérbolas equiláteras apropiadamente escogidas.

La topología combinatoria

La extraña invariancia de la suma del número de las caras y de los vértices menos el número de aristas de los poliedros, notada por Descartes y Euler y que hoy llamamos característica de Euler-Poincaré, llevó a la búsqueda de otros invariantes, como los números de Betti, a las triangulaciones de las superficies, a las piramidaciones de los poliedros y a los modelos simpliciales de las regiones del espacio, incluídas figuras tan extrañas como la cinta de Möbius y la botella de Klein.

Esta topología combinatoria se convertiría con los trabajos de Poincaré y Brouwer, y con la sistematización de la homotopía, la homología y la cohomología hacia 1930 por Spanier, Alexander, Eilenberg y MacLane, en la topología algebraica actual.

El programa de Erlangen

Esta misma época de los años 1870 dio lugar a las coincidencias entre Klein, Lie y Poincaré, a su aprendizaje de la teoría de grupos y al más famoso programa para lo que se suele llamar “geometría”, el Programa de Erlangen que se trató brevemente en la introducción.

La relación de los grupos con la geometría se extendería pronto a otros tipos de relaciones, como los grupos de Lie o los grupos de homotopía, de homología y cohomología mencionados arriba. Otras relaciones más profundas vendrían después.

Los grupos de Lie

Sophus Lie estaba dudando entre continuar estudiando matemáticas, o astronomía, o biología, y en 1867 se le ocurrió una idea extraña que ligaba líneas con esferas y cruces de líneas con puntos de contacto entre esferas mutuamente tangentes. Nadie le entendió su idea, pero esa ocurrencia lo decidió a dedicarse del todo a las matemáticas. Estando en París con Klein, se le ocurrió la idea de las transformaciones de contacto o infinitesimales, que se agrupaban en lo que después se llamaron “álgebras de Lie”, y aprendió de Camille Jordan la teoría de grupos. Empezó a desarrollar la teoría de lo que él llamaba “grupos de transformaciones continuas” en 1873 y 1874, a los que después Killing y Cartan llamaron “grupos de Lie”, en los cuales la estructura algebraica y la geométrica se articulan en maneras inesperadas que permitieron clasificar completamente todos los posibles grupos de Lie en todas las dimensiones.

La geometría algebraica

Hacia 1880, un nutrido grupo de matemáticos italianos empezó a trabajar en el análisis de sistemas de ecuaciones polinómicas y las variedades formadas por sus ceros, y ligó el álgebra con la geometría en una manera muy original e intuitiva. Enriques, Albanese, los Segre, Castelnuovo, Fano, Veronese, Severi, Cremona, Zappa, y muchos otros. produjeron un diluvio de resultados dispersos en lo que podríamos llamar “el Programa intuitivo de la geometría algebraica”.

Con el desarrollo de la llamada “álgebra conmutativa” y de los espacios proyectivos se pudo después sistematizar los resultados de la escuela italiana por parte de Zariski y sus discípulos. Toda la teoría fue reformulada luego en términos de haces y esquemas por Serre y Grothendieck hasta hacerla ininteligible para los aficionados a las matemáticas, pero sumamente productiva, tanto en la teoría de curvas elípticas, que dio lugar a la moderna criptografía, como en el programa geométrico de Robert Langlands a finales de la década de 1960, que dio lugar, entre otras exploraciones, a que Andrew Wiles encontrara el tortuoso camino que le permitió demostrar la conjetura de Fermat.

La geometría de Hilbert

Concedor de las críticas a Euclides desde Proclo y Clavius hasta Lagrange, de los trabajos de Lambert y de las geometrías no euclidianas, David Hilbert emprende a finales del Siglo XIX la tarea de reconstruir la geometría euclidiana a partir de axiomas que reparen las fallas lógicas en las demostraciones de los Elementos de Euclides.

Propone la consideración de puntos, rectas y planos como términos primitivos no definidos y reduce la geometría a una serie de relaciones entre estos términos primitivos. A este trabajo cuidadoso podríamos llamarlo “el programa geométrico de Hilbert”, que culminaría con los “Fundamentos de la Geometría” (“Grundlagen der Geometrie”) en 1899.

El trabajo de Hilbert es admirable. Pero es claro que Hilbert tenía que mirar, al menos por el raballo del ojo, su modelo analógico interno del espacio tridimensional para poder seleccionar sus axiomas ya digitalizados para la teoría. Piénsese por ejemplo en la siguiente sucesión de axiomas:

Axioma D1: Dado un punto, existe otro punto no coincidente con el primero.

Axioma D2: Dados dos puntos no coincidentes, existe otro punto no colineal con los dos anteriores.

Axioma D3: Dados tres puntos no colineales, existe otro punto no coplanar con los tres anteriores.

Axioma D4: Dados cuatro puntos no coplanares, existe otro punto no coespacial con los cuatro anteriores.

¿Por qué nos parecen obvios los tres primeros y rechazamos el cuarto? Por algo Hilbert escoge los equivalentes a los axiomas D1, D2 y D3 para el espacio euclidiano.

Pero también podemos ejercitar la lógica sobre los axiomas digitalizados y así podemos pasar a la cuarta dimensión, ya sin ayuda de nuestra intuición espacial, pero sí con la ayuda del pensamiento temporoespacial, y luego a la quinta, etc., hasta llegar a los espacios de Hilbert, que cumplen una sucesión infinita de axiomas D_n , uno para cada entero positivo n .

El programa formalista de Hilbert

Hilbert cayó en la cuenta de que, así como él mismo pudo formalizar la geometría con términos primitivos y relaciones definidas sólo por axiomas, si se elige cuidadosamente la notación, todas las matemáticas se pueden escribir con símbolos discretos con una sintaxis precisa. Así, según pensaba él, la consistencia, la independencia y la completitud de los sistemas matemáticos formalizados podrían decidirse por el examen cuidadoso de las fórmulas, independientemente de su contenido conceptual.

Ese es el programa formalista de Hilbert, ya no sólo para la geometría sino para cualquier sistema matemático formal. Ese programa sólo colapsaría 30 años más tarde con el teorema de incompletitud de Gödel.

El programa logicista de Russell

Con base en los estudios lógicos y en las notaciones de Frege y Peano, Russell propuso reducir las matemáticas a unos pocos axiomas lógicos, semejantes a los cinco axiomas de Euclides, de los cuales se generarían los conjuntos como satisfactores de funciones proposicionales y los números naturales como clases de equivalencia de conjuntos. Los números enteros pueden definirse como clases de equivalencia de parejas ordenadas de naturales y los racionales como clases de parejas ordenadas de enteros; los reales surgen de las cortaduras de Dedekind, que son parejas ordenadas de conjuntos ordenados de racionales, y los complejos pueden definirse también como parejas ordenadas de reales.

Ese programa, que podría llamarse “el programa de logicización y aritmetización de las matemáticas”, esbozado en “Los Principios de las Matemáticas” en 1900, se llevó a cabo en los 17 años siguientes por Russell y Whitehead, en ese libro monumental llamado “Principia Mathematica”, que según algunos ha sido leído en su totalidad por sólo tres personas: Russell, Whitehead y su corrector de pruebas.

El Siglo XX

La analitización de la geometría después de Russell

Una vez reducidos los reales a construcciones lógicas sobre los números naturales y éstos a construcciones lógicas sobre funciones proposicionales, Russell reduce los espacios a conjuntos de parejas, triplas y, en general, de sucesiones finitas de números reales. Así, por medio de la geometría analítica de Descartes y Euler, reduce la geometría del espacio a relaciones entre esas sucesiones finitas, quedando así convertida la geometría de cualquier espacio en el análisis real en la dimensión respectiva.

La logicización de la geometría después de Hilbert

El éxito de los grupos de axiomas de Hilbert en capturar las intuiciones del espacio euclidiano sin definir punto, recta ni plano llevó a otros geómetras mucho más allá de lo que Hilbert pensaba sobre las relaciones primitivas y el modelo implícito del espacio euclidiano usual, hasta despojar también esas relaciones de todo contenido intuitivo y conceptual. Esto llevó a abandonar los modelos, para quedarse únicamente con las demostraciones formales lógicamente válidas a partir de los axiomas. Con eso se abandonó la geometría de los 27 siglos anteriores (si los contamos sólo desde Tales), y se redujo la investigación geométrica a un trabajo lógico de tipo hipotético-deductivo sobre teorías formalizadas y axiomatizadas.

La teoría de la relatividad de Einstein

La utilización de múltiples herramientas de la geometría de Riemann, de las transformaciones, de las matrices y determinantes, de los vectores y tensores permitió a Einstein concretar en símbolos sus ideas revolucionarias sobre la conjunción del espacio y el tiempo en una variedad cuadridimensional. Minkowski y Reichenbach propusieron el tratamiento del espacio-tiempo con el tiempo como variable en una dimensión imaginaria ortogonal a las tres dimensiones del espacio. Yo prefiero utilizar los cuaternios como la mejor manera de tratar el espacio-tiempo, dejando el tiempo como variable real y las tres dimensiones del espacio como tres dimensiones imaginarias ortogonales entre sí y con la del tiempo. No deja de ser atractiva la asociación de ideas que despierte la consideración del tiempo como la dimensión real de los procesos, mientras que las tres dimensiones del espacio estarían más relacionadas con nuestra imaginación.

De la teoría de la relatividad surgieron nuevas geometrías, riemannianas y pseudo-riemannianas, reales y complejas, elípticas e hiperbólicas. Pero ello significó que el nombre mismo “geometría” se quedara ya corto para el tratamiento de esas nuevas construcciones mentales.

Los que prefieren las raíces griegas a las latinas han propuesto para el espacio-tiempo la palabra “cronotopo”, para resaltar con las raíces griegas “chronos” y “topos” unidas entre sí la fusión del tiempo y el espacio en una nueva construcción mental. Así como la etimología de la palabra “geometría” refiere al tratado de las mediciones de la Tierra (o de las tierras), o sea a la agrimensura, la cronotopía sería el tratado de los aspectos lógicos y métricos del cronotopo y sus extensiones.

La topología conjuntista después de Fréchet, Hausdorff y la escuela Polaca

El éxito de la teoría de conjuntos de Cantor llevó a reducir los espacios, regiones y líneas a conjuntos de puntos, y como ya los puntos habían perdido su contenido intuitivo, Riesz, Hausdorff, Fréchet y los polacos pudieron extender los espacios concretos a espacios abstractos cuyos puntos pueden ser funciones, operadores, vectores, matrices, conjuntos u otros tipos de construcciones matemáticas.

Nace así la topología de punto-conjunto o topología conjuntista. La noción de vecindad y la de topología como conjunto de vecindades abiertas, así como los intentos de recobrar algo de la métrica de estos espacios de puntos y vecindades, llevaron también a abandonar la geometría por la topología, en un programa de investigación que culminó con los teoremas de metrizableidad de un espacio topológico demostrados por Tychonoff, Urysohn, Nagata y Smirnov.

Para nuestros propósitos, el programa de metrización de los espacios abstractos muestra claramente la separación entre los aspectos lógicos de lo que quedaba de la geometría y los aspectos métricos de la misma, sobre los que volveremos luego.

Bourbaki y la algebrización de la geometría

El programa estructuralista del grupo Bourbaki también se propuso reducir todas las matemáticas existentes a unas pocas nociones de lógica y de conjuntos, con el montaje de las estructuras como sucesiones finitas de construcciones conjuntistas, interpretando las fórmulas bien formadas de la lógica por medio de elementos constantes o variables, relaciones y funciones de esas estructuras.

En esta grandiosa arquitectura de las matemáticas, la geometría de las figuras debería desaparecer, para dar paso a fórmulas del álgebra lineal, de la geometría analítica, de la geometría diferencial o de la geometría algebraica. Dieudonné decreta la muerte a Euclides y declara la geometría sintética del plano y del espacio como caduca y estéril. Cumple su promesa de escribir un libro completo de geometría sin un solo dibujo o diagrama y declara las interpretaciones intuitivas espaciales no sólo como inútiles sino como obstáculos a la única matemática bourbakista. La geometría desaparece así gradualmente de las universidades y luego de los colegios.

La teoría de modelos

Desde la década de 1940 se le ocurrió a Anatolii Mal'tsev en Rusia, a Alfred Tarski en los Estados Unidos y a Abraham Robinson en Inglaterra que los metateoremas de la lógica clásica podían utilizarse para demostrar teoremas matemáticos. En 1950, en el Congreso Internacional de Matemáticos en Cambridge, Massachusetts, Tarski y Robinson presentaron esta nueva disciplina, que no tenía todavía nombre. Tarski la llamó "teoría de modelos" en 1954. Robinson concluyó que esta disciplina era apenas el cumplimiento de una ambición expresada por Leibnitz en una carta a Huygens en el año 1679.

Pocos años más tarde, en 1960, el mismo Robinson utilizó los teoremas de compacidad de la teoría de modelos para fundamentar el regreso de los infinitesimales como el ideal centrado en el cero de los números hiperreales.

Se fijó el tratamiento de las teorías como conjuntos de fórmulas y el de los modelos como sistemas o estructuras formadas por uno o más universos y sucesiones finitas de operadores y predicados con ariedades fijas. Por medio de interpretaciones de los términos, operadores y predicados y de la fijación de los ámbitos de los cuantificadores, se podían distinguir las teorías que eran verdaderas para un modelo, y los modelos que satisfacían una teoría determinada. Este es uno de los temas claves para un futuro programa de aquello que solemos llamar “geometría”.

La geometría de las transformaciones

Marshall Stone aprovechó los estudios de los grupos de reflexiones para redefinir las traslaciones y rotaciones por medio de reflexiones y unificar las transformaciones rígidas del plano a partir de composiciones de reflexiones. Se empezó a redefinir las propiedades de las figuras por medio de transformaciones, y se recuperó en reversa el Programa de Erlangen por medio de esta geometría del movimiento, rescatando los juegos de transformaciones que habían estado reprimidos en la geometría clásica desde el triunfo de las ideas estáticas e inmutables de Parménides y Platón sobre las intuiciones dinámicas de Heráclito.

Estos desarrollos más dinámicos que estáticos prepararon el terreno para la revolución de la computación electrónica.

Las gráficas computacionales y el regreso de la visualización

En los años sesenta se empezaron a dibujar gráficas en computador, con las distintas versiones del lenguaje FORTRAN, utilizando impresoras que por medio de guiones, cruces y asteriscos dibujaban ciertos agregados de manchas, que, mirándolos de lejos, parecían rectas y curvas. Con la aparición de las pantallas, los ratones y las impresoras rápidas y a color se desarrolló exponencialmente el poder gráfico de los computadores hasta llegar a los actuales programas tipo CAD, como el Corel-Draw 3-D y otros programas que han proporcionado un nuevo medio de expresión a los artistas y permiten simulaciones pseudotridimensionales, producción automatizada CAD-CAM y diseño arquitectónico interactivo.

Los programas de geometría dinámica, como el “LOGO” de Seymour Papert en el MIT, el “Geometric Supposer” de Judah Schwartz y Michal Yerushalmi en Harvard, el “Geometers’ Sketchpad” en los Estados Unidos y el “Cabri Geomètre” en Francia, devolvieron a los estudiantes el poder de dibujar, diagramar, construir, medir y arrastrar figuras en el plano para hacer conjeturas y analizar propiedades de las figuras.

Las gráficas computacionales permitieron a Mandelbrot rescatar esotéricos resultados de Gaston Julia sobre iteraciones de funciones, y logró fascinar al mundo con los dibujos de fractales. Se rompió la noción misma de dimensión geométrica para dar lugar a las dimensiones fractales, y la teoría de sistemas dinámicos cambió radicalmente con esos estudios, hasta el punto de que la palabra “fractal” y la teoría del caos se convirtieron en banderas de la posmodernidad, enarboladas por algunos posmodernos tanto más atrevidamente cuanto menos saben qué significan esas palabras en matemáticas.

Los programas de cálculo simbólico y el fin del álgebra como disciplina matemática conceptual

Las reglas del cálculo simbólico de la llamada “álgebra de bachillerato” y del cálculo diferencial e integral se pudieron programar en computadores suficientemente potentes para que las transformaciones y simplificaciones pudieran hacerse mecánicamente. El “Derive”, el “Theorist” y luego “Mathematica” han permitido hacer toda clase de ejercicios simbólicos, mostrando así que los estudiantes que considerábamos más inteligentes, que eran aquellos a quienes les iba bien en álgebra, geometría analítica y cálculo, no llegaban ni siquiera al nivel de estupidez de una computadora razonablemente potente. Esta dura realidad escapa todavía a la conciencia de los profesores de álgebra, geometría analítica y cálculo, pues aceptarla desvalorizaría las habilidades simbólicas que con tanto esfuerzo y tiempo aprendieron y les obligaría a buscar la inteligencia lógico-matemática en otros ámbitos, que serían, en el programa que propongo, los de la exploración temporoespacial.

El álgebra geométrica y el álgebra espacio-temporal de David Esténe

Por los años 1870, como lo vimos arriba, surgieron los cuaternios de Hamilton, la “Ausdehnungslehre” de Grassmann, las álgebras de Clifford, los vectores de Gibbs, los tensores de Ricci, las matrices y los determinantes. El sueño de Leibnitz y el proyecto de Grassmann revivieron en la tesis doctoral de David Hestenes en la Universidad de California en Los Angeles (UCLA) en 1963. En 1966 publicó una versión de su “Algebra Espacio-temporal”, y después de múltiples tropiezos y correcciones, publicó con Garret Sobczyk en 1984 el libro “De las álgebras de Clifford al Cálculo Geométrico”, reeditado en 1992 en Kluwer, ahora Springer-Verlag. Con este tipo de simbolismo es posible reformular la mecánica analítica clásica, la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad, incorporando los vectores, los tensores, los cuaternios, las álgebras de Clifford, la notación absoluta para las formas diferenciales de Cartan y el cálculo de spin de Dirac.

Resalto simplemente los nombres: álgebra espacio-temporal, cálculo geométrico, geometría espacio-temporal. Parece que las palabras “geometría” y “geométrico” le quedan ya estrechas a la nueva criatura.

La sintonía con el cuerpo de Papert y la corporalización de Lakoff y Núñez

Ya en 1980, Seymour Papert en su libro “Mindstorms: Computers and powerful ideas”, propuso la relación directa del cuerpo humano con la matemáticas y, en particular, con la geometría en lo que llamó “body-syntonic mathematics”, las matemáticas sintónicas con el cuerpo.

Esta idea puede remitirse a Piaget, quien, aceptando la idea de Kant de que las categorías del espacio y el tiempo eran “a priori” para el adulto, negó que fueran “a priori” para la especie y aun para el niño, y trazó la génesis del tiempo y del espacio en los niños en dos libros clásicos de 1946 y 1948.

Estas ideas se concretaron en el año 2000 en el libro de George Lakoff y Rafael Núñez

“Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being”, (“De dónde vienen las matemáticas: cómo la mente corporalizada hace nacer las matemáticas”).

Vuelve a ponerse en discusión el problema de los términos primitivos y sus relaciones, de las transformaciones y de los espacios, a partir de la corporalidad y el movimiento. Piénsese por ejemplo en la dificultad de definir “giro”, “rotación” o “dar vueltas” sin acudir al movimiento del propio cuerpo. Lo mismo puede decirse de “desplazamiento”, “traslación” o “reflexión”, “trayectoria”, etc.

Se trata de los primitivos fenomenológicos o “p-prims” de DiSessa, quien los desarrolló a través del estudio de las reacciones de los estudiantes a la geometría del “LOGO” y a las presentaciones escolares de la física clásica.

Esto lleva a la recuperación de la gestualidad, el movimiento corporal y la internalización imaginativa del tiempo, el espacio y el movimiento, para completar la visualización en una forma integrada que podríamos llamar visualización-corporalización.

El regreso de la intuición temporoespacial

Desde la didáctica de la geometría en las investigaciones en educación matemática, que querían devolver su lugar a la geometría en los programas escolares, se empezó a ver la dificultad de estudiar física, ingeniería y arquitectura en las universidades sin haber estudiado geometría en los colegios.

Un programa de matemáticas que se había reducido a la aritmética en los grados primero a séptimo; al álgebra en octavo y noveno: a la trigonometría, la geometría analítica y el cálculo en décimo y undécimo, no preparaba para los estudios de tecnologías, ingenierías, arquitectura o diseño. Ni siquiera para la física, que se reducía a lo que un profesor de décimo grado llamó “una matemática rara”, en la cual se podían hacer aproximaciones, cancelaciones e hipótesis intolerables para el rigor del matemático puro. Era tiempo de regresar a la intuición espacial y, por qué no, a la temporal. Mejor todavía, a la intuición temporoespacial, que con la visualización y la gestualización se va integrando más en la corporalización de que nos hablan Piaget, Papert, Lakoff y Núñez.

Del pensamiento espacial o tópico al pensamiento temporoespacial o cronotópico

En la renovación curricular del MEN que se inició en 1976, la Universidad Nacional nombró como asesor para el área de matemáticas al Dr. Carlo Federici; dos años después, me nombró a mí para remplazarlo en esa asesoría, labor que continué hasta 1993. Como marco teórico para los programas de la renovación curricular propuse una reconceptualización de las matemáticas escolares desde el punto de vista de los sistemas.

Un sistema matemático tiene tres aspectos diferentes: sus universos de componentes o elementos, sus transformaciones u operaciones y sus relaciones o nexos entre los componentes. Los llamo el sustrato del sistema, la dinámica del sistema y la estructura del sistema.

Como gran meta de las matemáticas escolares desde preescolar hasta el undécimo grado

nos propusimos en la renovación curricular el dominio de una serie de sistemas matemáticos: los sistemas numéricos, los geométricos, los métricos, los analíticos y los de datos, además de la utilización como herramientas de otros sistemas como los lógicos, los conjuntistas y los sistemas generales.

En la renovación curricular se distinguía claramente entre los sistemas geométricos y los métricos, con el tropiezo continuo con la palabra “geométrico”, que ya parecía incluir lo “métrico”.

En un artículo para la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que escribí en 1991, extendí estas ideas a todos los sistemas matemáticos. En particular, definí un sistema geométrico minimal como un sistema con al menos dos universos diferentes y al menos cuatro relaciones de incidencia, una interna a cada universo y dos que conectaran los elementos de uno de ellos con los del otro. A pesar del nombre “sistema geométrico”, era claro que en ese tipo de sistemas minimales no había nada de métrico.

La Ley General de Educación de 1994 terminó abruptamente con la renovación curricular y con la extensión de los programas del Decreto 1002 de 1984 a la secundaria. Sólo se practicaron los programas de primaria en algunas escuelas a donde llegaron los pocos tomos de programas que se publicaron para cada uno de los cinco grados de la educación básica primaria.

Según la Ley 115 de 1994, el MEN no podía ya regular los currículos por la expedición de programas obligatorios, sino sólo por medio la publicación de listados de indicadores de logro y de documentos de lineamientos generales de cada área. Afortunadamente, el equipo que elaboró los lineamientos para el área de matemáticas, dirigido por Celia Castiblanco, avanzó mucho más allá del dominio de los distintos tipos de sistemas matemáticos como propósito general del área en la educación básica y media y se propuso una meta mucho más importante: el desarrollo de distintos tipos de pensamiento matemático.

En los Lineamientos se diferenció el pensamiento lógico del pensamiento matemático, a pesar de que Howard Gardner consideraba como una sola la inteligencia lógico-matemática. El pensamiento lógico puede y debe desarrollarse en todas las áreas, sobre todo en la de lenguaje, en la de ciencias naturales y en la de ciencias sociales. Por eso no se puso como un tipo de pensamiento matemático, pues no es propiedad de los matemáticos.

Según Piaget, más bien el pensamiento matemático sería un cierto tipo de pensamiento lógico, y desde el punto de vista de las teorías y los modelos, una teoría lógica se vuelve matemática cuando se le agregan términos, relaciones u operaciones extralógicos. Dentro del pensamiento matemático se diferenciaron en los Lineamientos cinco tipos diferentes, aunque por supuesto relacionados: el numérico, el espacial, el métrico, el variacional y el aleatorio o estocástico. Hoy propondría que se hablara del pensamiento temporoespacial, más bien que sólo del espacial.

Recuerdo que el Dr. Carlo Federici ponía como ejercicio en sus cursos de fundamentos de matemáticas encontrar todas las relaciones posibles entre dos eventos en el tiempo. Tenemos que acudir a la espacialización de lo temporal para hacerlo, pero es muy informativo ver cuántas relaciones posibles hay entre sólo dos eventos.

A través de ese ejercicio se ejercita el pensamiento temporal y se distingue más fácilmente

lo que parece una sutileza: el intervalo temporal vacío entre los instantes inicial y final de un evento o proceso y el intervalo lleno o lapso de tiempo que dura ese evento o proceso. Hay que notar que la palabra “intervalo” ya trae implícito lo espacial, pues se refiere al valle entre montañas: “inter-vallum”; en lo espacial, la palabra “intervalo” tiene también la ambigüedad de referirse a veces a la distancia entre dos picos de esas montañas y a veces al valle que ocupa esa distancia, o al camino más o menos tortuoso que va de un pico a otro por el valle. Además de ese problema de la diferencia entre el intervalo lleno y el vacío, con los ejercicios de pensamiento temporal de Federici se cae en la cuenta de que la definición de instante trae el mismo problema que la definición de punto, y se impone a la mente la unidimensionalidad del tiempo.

Estos ejercicios de pensamiento temporal hacen claramente diferentes distintos significados de la palabra “tiempo”: el tiempo como estructura general de los procesos; el tiempo como una magnitud más precisamente llamada “duración”, ya sea considerada como cantidad de duración sin medirla todavía, o como medida numérica de esa magnitud: la duración de los procesos y eventos; el tiempo como artificio de ubicación de los instantes, eventos y procesos a partir de mojones, relojes y números, y el tiempo como “intervalación” o para decirlo con otra espacialización implícita, la “distancia temporal” entre dos de esos mojones. Así se nota que la palabra “ubicación temporal” encierra también una disonancia, pues en latín, “ubi” significa “en dónde”, espacialmente hablando, no “cuándo”. Se debería pues hablar de “cuandicación” en vez de “ubicación temporal”.

Después de la teoría de la relatividad no se debería separar más lo espacial de lo temporal, y habría que hablar de intervalos temporoespaciales, sin olvidar que un intervalo temporoespacial lleno congela los movimientos de los cuerpos en el espacio en ciertas especies de trayectorias, lombrices o gusanos cuadrimensionales que codifican lo que para nosotros es un movimiento.

Este pensamiento temporoespacial es incorporado, corporalizado, inscrito en nuestro ser corporal y en nuestra movilidad, en los sentidos exteroceptivos e interoceptivos, especialmente en el aparato coclear, que se ha llamado “el sentido vestibular”, el cual nos indica la dirección vertical con respecto al campo gravitacional local y nos alerta sobre los cambios de velocidad. Es importante notar que el sentido vestibular no indica la ubicación espacial, ni la velocidad, sino la aceleración.

En un Programa de Bogotá para el futuro de lo que solemos llamar “geometría”, el comienzo del trabajo y el lugar y el tiempo privilegiado para la invención y la reflexión matemática debería ser siempre ese mundo corporalizado de la intuición temporoespacial, lo que completa el cuadro de la visualización con la gestualidad y la corporalización. En esa visualización-corporalización se ubica (y se cuandica) el chispazo de la conjetura, el crisol de ensaye de la conceptualización, el artificio gráfico o gestual para la expresión y la discusión entre colegas y la satisfacción estética del problema resuelto.

Al quedar tan limitada la palabra “geometría”, que con su alusión a la Tierra y a la agrimensura deja por fuera lo temporal y limita demasiado lo espacial, es necesario introducir la palabra “cronotopía” y el adjetivo “cronotópico” para señalar, como lo insinuamos arriba, con la unión raíces griegas “chronos” y “topos” los aspectos temporales y espaciales en su unidad.

Lo teórico y lo modélico

Como lo observamos de paso en el recuento histórico, la desaparición de los aspectos temporoespaciales en la geometría para reducirla a la deducción lógica de teoremas a partir de axiomas que hablan de términos primitivos no interpretados, tanto desde la logicización hilbertiana como desde la estructuralización bourbakista, contribuyó a la desaparición de la geometría en los colegios y en las universidades.

La teoría de modelos, que ha hecho avanzar la epistemología de las ciencias naturales en el sentido de Lakatos, sobre todo en el llamado “Programa estructuralista o modelo-teorético” de Stegmüller, Baltzer, Sneed y Carlos Ulises Moulines, sirve también para la epistemología de las matemáticas y en particular, de lo que se ha llamado “geometría”.

Separar claramente los modelos, que son construcciones mentales análogas, vagas, con su trasfondo y sus componentes, sus transformaciones y relaciones mentales, de las teorías que los digitalizan, los formulan en palabras u otros símbolos, es una segunda propuesta del Programa de Bogotá para la cronotopía.

Veamos un ejemplo. La geometría del Origami, que desarrolla Jorge Arce en su tesis doctoral en la Universidad del Valle, se hizo famosa hace poco con el nombramiento de Eric Demaine, de sólo 21 años de edad, como profesor del MIT en Cambridge, Massachussets.

Del modelo del doblado de papel se pasa a la existencia de dos tipos de líneas, que corresponden a las crestas y a los valles del doblado, y a unos nuevos axiomas, que no permiten extender las líneas rectas ni trazar círculos. No se pueden trazar curvas algebraicas, pero sí un muestreo de sus duales, que son las colecciones de sus tangentes. Se puede trisecar el ángulo, luego los axiomas deben ser más fuertes que los de Euclides.

La teoría se puede desligar de los modelos, pero es el vaivén entre modelos y teorías el que permite encontrar las nuevas conjeturas y orientar la búsqueda de demostraciones o de refutaciones por contraejemplo.

Sobre este tema di un curso de geometrías no euclidianas en la Segunda ELHEM de Cali en noviembre pasado, basado exclusivamente en una serie de talleres de exploración de modelos y teorías.

Lo *-lógico y lo *-métrico (la *-logía y la *-metría)

Además de la distinción clara entre modelos y teorías, ya he insinuado en el recuento histórico otra distinción clave para lo que podría ser un Programa de Bogotá para esa cronotopía que solemos llamar “geometría”. Se trata de la distinción entre los aspectos lógicos y los aspectos métricos de los modelos y teorías cronotópicos.

Los aspectos lógicos son anteriores y necesarios para los aspectos métricos, pero los métricos no son necesarios para los lógicos. Más aún, el pasar demasiado pronto a los aspectos métricos puede y suele obstaculizar el desarrollo de los aspectos lógicos, de suyo más importantes.

Uno de los problemas con la palabra “geometría” es que incluye de una vez los aspectos lógicos y los métricos en el nombre de la disciplina, tal vez porque la palabra “geología” ya está reservada para las ciencias de la Tierra.

Volvamos al ejemplo del pensamiento temporal al estilo Federici. Una cosa es el trabajo de encontrar las relaciones temporales entre dos eventos, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del tiempo, o sea “su *-logía”, en este caso “la cronología”, y otra cosa sería tratar de metrizar la duración de uno de esos eventos o la intervalación entre el final de un evento y el comienzo de otro posterior, que sería analizar aspectos métricos de la estructura del tiempo, o sea “su *-metría”, este caso “la cronometría”.

En el pensamiento espacial, una cosa es el trabajo de producir, comparar, clasificar y analizar las propiedades de las líneas y de las figuras puntuales, lineales, regionales, espaciales y ojalá temporoespaciales, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del espacio, o sea “su *-logía”, en este caso “la topología” en el nuevo sentido más amplio, y otra cosa sería tratar de metrizar la distancia entre dos de esos puntos o la longitud de una de esas líneas o el área de una de esas figuras regionales, etc., que sería analizar aspectos métricos de la estructura del espacio, o sea “su *-metría”, este caso “la topometría”. La cronotopía se desdobra pues en la cronotopología y la cronotopometría.

Lo *-lógico y las reducciones proposicional y conceptual

Proposiciones y conceptos vs. fórmulas y términos

La *-logía de la cronología y la topología en el sentido amplio en que la propongo no se refiere únicamente al estadio final de pulimento de una teoría con una axiomatización y un despliegue hipotético-deductivo, por importante que este estadio sea. La *-logía está ya desde la visualización y la corporalización de los modelos mentales e imaginados a partir de las experiencias diarias, desde la aprehensión que Raymond Duval llama “operatoria” de lo experimentado o imaginado.

Las primeras proposiciones matemáticas de Tales, Pitágoras y demás geómetras griegos antes de Euclides no pueden llamarse propiamente “teoremas”, pues no se deducían de unos axiomas o postulados formulados explícitamente. Eran relaciones matemáticas, conjeturas plausibles derivadas de distintas formas de visualización, gestualización, dibujo o construcción mecánica. No se podía pues propiamente demostrarlas, sino mostrarlas con el dibujo y el gesto, el lenguaje y la deixis. Se podían explicar, relacionar con otras y a lo más se podría argumentar a favor o en contra con razones intuitivas, de autoridad, con ejemplos e inducciones empíricas.

Paralelamente, los términos utilizados en esas proposiciones, relaciones o conjeturas no estaban definidos cuidadosamente, sino que se utilizaban tal como circulaban en los lenguajes de la construcción, la agricultura y la agrimensura, el comercio, el arte o la religión. La introducción de términos técnicos y las definiciones explícitas de los mismos tuvieron que venir mucho después.

Desde los tiempos del programa de sistematización de Euclides, que no parece haber sido el único que intentó escribir elementos de geometría en forma ordenada, este intento de sistematización tenía dos aspectos muy diferentes, uno de ellos opacado usualmente por el éxito de la axiomatización del libro primero. El aspecto de recoger, ordenar, comparar y precisar las proposiciones circulantes, seleccionar las que aparecían más frecuentemente

en las argumentaciones a favor de otras, empezar a depurar y reordenar esas argumentaciones, era el aspecto proposicional del programa de sistematización. El aspecto de recoger, ordenar, comparar y precisar los conceptos y nociones circulantes, seleccionar las que aparecían más frecuentemente en las proposiciones, empezar a depurar y reordenar esas nociones y conceptos y a elegir las palabras más apropiadas era el aspecto conceptual del programa de sistematización.

Una cosa son las proposiciones y otra sus formulaciones en frases o fórmulas sintácticamente bien formadas que las representan en el discurso oral o escrito; una cosa son las nociones y conceptos y otra las palabras o términos bien formados que las representan en el discurso oral o escrito.

A pesar de todo lo que digan los lingüistas y los partidarios de los distintos tipos de análisis del discurso, en las matemáticas -y en particular en lo que llamamos “geometría”- no se puede trabajar proposicional ni conceptualmente sin frases y palabras, o sea sin fórmulas y términos, pero el peso del trabajo mental es más bien el de encontrar esas formulaciones en frases o fórmulas para las proporciones y en palabras o términos para los conceptos y no viceversa, aunque sin esa circulación por las frases y palabras no se podría avanzar mucho en la conceptualización y en la teorización.

Distingamos pues en el programa de sistematización de lo que llamamos “geometría” el aspecto de axiomatización (para reducir las proposiciones a cadenas que terminen en axiomas, nociones comunes o postulados) y el aspecto de la definicionalización (para reducir los conceptos a cadenas que terminen en términos no definidos explícitamente).

En la sistematización proposicional el trilema de Münchhausen es inevitable: si se quiere sistematizar proposiciones deductivamente, o se sigue un proceso hacia el infinito, o se cierra un círculo vicioso, o se corta en algún punto en proposiciones no demostradas. En la sistematización conceptual sucede lo mismo: si se quiere aclarar el sentido de los conceptos, o se sigue un proceso hacia el infinito, o se cierra un círculo vicioso, o se corta el proceso en algún punto en conceptos no definidos.

El problema de los axiomas

A pesar de todas las críticas de los lógicos de Proclo a Hilbert, no puede negarse que la sistematización proposicional de Euclides que termina en los axiomas o nociones comunes y en los postulados es uno de los logros más admirables de las matemáticas.

Más que aprenderse los axiomas o nociones comunes y los postulados, el programa para la cronotopía propone hacer trabajos locales de sistematización proposicional y aprender a hacer las cadenas deductivas, a detectar los nodos y los círculos, a cortar los procesos que amenazan proliferar hacia el infinito.

Formular posibles postulados alternativos, revisar, reformular, negar, fortalecer o debilitar los ya formulados es un ejercicio de cronología, topología y cronotopología independiente de lo métrico.

Se puede así encontrar una dualidad entre el primer postulado y una forma del quinto postulado como lo formuló Euclides que lleva a la geometría proyectiva; se puede encontrar que la geometría de la esfera con circunferencias maximales como rectas sí cumple el quinto

postulado como lo formuló Euclides, en contra de todo lo que digan los libros, pero que no cumple el quinto postulado en la formulación de Playfair, en contra de la afirmación omnipresente de que ambas formas del quinto postulado son equivalentes.

El problema de las definiciones

El éxito relativo del programa de sistematización proposicional de Euclides nos permite perdonarle el relativo fracaso de su sistematización conceptual, pero no podemos pasarlo por alto.

Las definiciones no parecen cumplir los estándares mínimos de lo que consideraríamos una buena definición, ni permiten una selección clara de los términos primitivos. Parece que frontera o extremo, dimensión o extensión, recta o curva, superficie o plano, inclinación o corte, etc. pudieran ser los candidatos a términos primitivos, pero no es posible ir muy lejos en este juego definicional; con perdón de Euclides, no perderíamos gran cosa si se hubieran perdido la mayoría o aun todas sus definiciones.

Hilbert cayó en la cuenta de la necesidad de hacer el trabajo conceptual para llegar a definiciones que pudieran remplazar sucesivamente los términos encontrados en las fórmulas, hasta que no haya más remedio que cortar el proceso con el mínimo número de términos no definidos.

Hilbert llegó a punto, recta y plano, y es conocida su broma de que podrían cambiarse por mesa, silla y jarro de cerveza. Le debemos la explicitación de esas hojas del árbol definicional. Pero podría considerarse un “lapsus” de Hilbert el que él creyera que las relaciones básicas como la incidencia y la interestancia sí adquirirían contenido con los axiomas, sin caer en la cuenta de que lo mismo se podría decir de los términos no definidos. Habría que continuar el trabajo hilbertiano hasta llegar a las relaciones no definidas y a las operaciones o transformaciones no definidas.

Pero concedamos a Hilbert que el sentido, significado o contenido de las relaciones primitivas está dado por los axiomas. Todavía queda otro aspecto para un programa futuro de lo que hoy llamamos “geometría”: el análisis de la distancia y la tensión entre conceptos y palabras, tanto para los términos como para las relaciones y las operaciones.

Si la recta es un término no definido, ¿qué es una curva? ¿una línea? ¿está formada de puntos o no?

Piénsese por ejemplo en la definición de ángulo de Hilbert. ¿No es más bien la definición de un bilátero, o sea una figura formada por dos semirectas bien conectadas? Pero nadie ha definido qué significa “bien conectadas”. No se sabe cuál de los dos ángulos queda definido por el bilátero hilbertiano: ¿el más amplio o el menos amplio? ¿Se distingue el tripunto del trilátero y de la región triangular o trígono? Me parece más bien que el triángulo debería definirse como un complejo o figura compleja compuesta por esos tres tipos de figuras, la puntual, la lineal y la regional.

Si el círculo es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de uno llamado “centro”, habría que concluir que el área del círculo es cero. Si se dice que es la circunferencia lo que se define como ese lugar geométrico y que el círculo es la región encerrada por la circunferencia, volvemos a la idea de figura de Euclides, que es sólo regional y

acotada. Pero a esa región la llamamos “disco”. El círculo podría definirse como la figura compleja formada por una figura regional, el disco y otra lineal, la circunferencia.

¿Por qué un segmento no es una figura? ¿o un bilátero? ¿Es un polígono la línea quebrada o la región que encierra? ¿No es más bien el complejo formado por los vértices, los lados y la región?

He trabajado la definición de cuadrado en varias formas, para explorar por qué Euclides no prueba una proposición I.2 para levantar perpendiculares y luego una proposición I.3 para levantar cuadrados sobre un segmento dado. Saccheri y Lambert llegaron a dos cuadriláteros extraños formados por perpendiculares de la misma longitud que el segmento sobre el que se levantaban y se preguntaron por qué no se puede garantizar que al cerrarlas se produzca un cuadrado.

Desarrollé una definición minimal del cuadrado, que llamo “la definición 4-3-3”: un cuadrado es un polígono de cuatro lados, al menos tres de ellos iguales, que forman al menos dos ángulos rectos.

¿No son superfluas la mayoría de las condiciones de las definiciones usuales? ¿O será que la definición minimal supone el axioma de las paralelas, o viceversa?

En un futuro programa para lo que solemos llamar “geometría”, el trabajo de sistematización definicional puede empezar desde la educación primaria, más bien que la rutinaria enseñanza de los nombres de las formas y figuras.

Las definiciones taquigráficas y las nocionales

Para ello hay que distinguir las definiciones taquigráficas, las favoritas de Russell y Hilbert, que permiten remplazar una frase larga por una más corta o aun por una sola palabra, de las definiciones nocionales, en donde el trabajo mental trata de pasar de una noción o imagen vaga, o como diría Raymond Duval, de una aprehensión perceptual a una operatoria, para extraer un concepto de esa noción o imagen.

¿Cómo sabemos que la definición de ángulo de Hilbert es buena o no?

¿Cómo sabemos si mi definición 4-3-2 sí define bien el cuadrado o no?

El futuro programa para lo que solemos llamar “geometría” propone ese trabajo definicional que no trata las definiciones como abreviaturas taquigráficas que hay que aprender de memoria para dar respuestas correctas, sino como desafíos de expresar en palabras, frases, íconos y otros símbolos el producto de un esfuerzo de pensamiento cronotópico, que trata de ir de las nociones a los conceptos, para formular teóricamente (en forma digitalizada) los tres aspectos de los modelos mentales (analógicos): los componentales, los operatorios y los relacionales.

Habría pues que distinguir conceptos predicativos unarios o monádicos, predicativos relacionales binarios o diádicos, ternarios o triádicos, etc. y conceptos operativos o funcionales, como lo propuse en un trabajo sobre ese tema publicado en el año 2000 en el libro “Mentes Reales”, por Botero, Ramos y Rosas.

No pueden pues reducirse los conceptos a su relación con un término en el sentido estricto de la palabra como se utiliza en la lógica, sino también a los predicados n-arios y a los operadores n-arios matemáticos y a sus combinaciones con predicados y operadores lógicos

para formar otros términos moleculares a partir de términos atómicos y para construir fórmulas atómicas y luego fórmulas moleculares a partir de esas fórmulas atómicas.

En un programa para lo que ahora llamamos “geometría”, ese juego de la *-logía del cronotopo se extendería de la definición de los términos a la de los predicados y los operadores, no sólo para llegar a los primitivos no definidos sino para llegar a las distintas posibles definiciones en discursos escritos explícitamente formulados y regulados por distintos tipos de sintaxis, de semántica y de pragmática.

Lo *-métrico y el regreso de las magnitudes y la cantidades

El éxito del programa analítico de Descartes para lo que se suele llamar “geometría” se debió principalmente a la posibilidad de cerrar un cálculo de segmentos por medio de la multiplicación y la división, las cuales producían otros segmentos. Esto permitió reducir todas las magnitudes absolutas y relativas unidimensionales a la longitud de un segmento de recta. Recuérdese que en Euclides la multiplicación de segmentos producía un rectángulo y que su división producía una razón, que no era ni rectángulo, ni segmento, ni siquiera número.

La física de los siglos siguientes siguió tratando separadamente las magnitudes y las cantidades de cada magnitud, pero en las matemáticas el éxito de la geometría analítica hizo que se distrajera la atención a las distintas magnitudes y al tratamiento de las cantidades de las mismas.

Sobrevivieron sólo las distancias y las longitudes, confundidas muchas veces, y las áreas y los volúmenes, confundidas con las cabidas y las capacidades y reducidos a productos de dos o tres longitudes.

Ya a comienzos del Siglo XX Max Wertheimer investigó las nociones de área de los estudiantes de secundaria y media y encontró que no tenían dicha noción, sino que identificaban las áreas con ciertas fórmulas para calcular las áreas de triángulos, rectángulos y círculos. Cien años después podríamos encontrar exactamente la misma situación. Todavía hoy consideraríamos a un estudiante como geoméricamente competente si se sabe esas tres fórmulas de áreas, si no confunde el área con el perímetro y si puede convertir metros cuadrados a centímetros cuadrados; lo consideraríamos un genio matemático en potencia si se sabe la fórmula del área de la esfera, si no confunde el área de una bola con su volumen, y si cae en la cuenta de que no se pueden convertir metros cuadrados a centímetros cúbicos.

En un Programa de Bogotá para la cronotopía volveríamos al estudio fino de las magnitudes y las cantidades que propuso incansable e infructuosamente el Dr. Carlo Federici durante 50 años.

Empezaríamos por distinguir el objeto cronotópico de sus características metrizables; para cada una de ellas precisaríamos la magnitud apropiada, distinguiríamos entre la cantidad respectiva como objeto métrico todavía anumérico, o sea sin asignarle todavía un número como medida, y luego le asignaríamos las distintas medidas numéricas de esa cantidad según procedimientos y sistemas métricos diferentes, hasta llegar al número rotulado o

“número con letrero” que nos enseñó Carlo Federici como distinto del número natural.

Así, en las futuras cronometría y topometría se tratarán precisamente las magnitudes, sus cantidades anuméricas y sus medidas numéricas, las unidades como cantidades anuméricas a las que se les asignará el número 1 y no se confundirán los patrones de medida con las unidades; el patrón de medida es un artefacto físico que permita un procedimiento, mientras que la unidad es una cantidad construida mentalmente que no tiene materia ni forma. Por ejemplo, un centímetro cuadrado no es un cuadrado de un centímetro de lado; eso puede ser un patrón para medir áreas por yuxtaposición, pero no es una unidad. El centímetro cuadrado como unidad no tiene materialidad de papel ni de plástico ni tiene forma cuadrada. Una unidad de área (o de volumen) no tiene forma.

En mis talleres de topometría he utilizado como unidades el centímetro triangular y el centímetro circular, que se podrían realizar en patrones como triángulos equiláteros de un centímetro de lado o como círculos de un centímetro de radio. Pero las unidades respectivas no tienen forma circular, ni triangular ni cuadrada. Más aún, si se hace el ejercicio topométrico, resulta que la fórmula para el área de un triángulo equilátero de lado L resulta ser L^2 en centímetros triangulares, y la fórmula para el área de un círculo de radio R resulta ser R^2 en centímetros circulares. No es raro pues que el área de un cuadrado de lado L resulte ser L^2 en centímetros cuadrados.

En el caso de un segmento de línea recta distinguiríamos claramente entre el intervalo vacío entre sus extremos, que se trabaja como una cantidad de la magnitud *distancia*, y el intervalo lleno entre esos mismos extremos, que se trabaja como una cantidad de la magnitud *longitud*, y luego buscaríamos maneras de medir esas dos cantidades con distintos procedimientos y distintas unidades tomadas de distintos sistemas métricos.

Eso nos permitiría distinguir la magnitud *distancia* como una magnitud apropiada para los bipuntos (extendible a la distancia entre un punto y una recta y luego a la distancia entre dos rectas paralelas) de la magnitud *longitud*, que es una magnitud acumulativa o integral apropiada para los caminos o trayectorias, indefinibles sin una intuición temporoespacial corporalizada. Esta distinción es precisamente la que permite definir lo que es un camino o trayectoria recta y curva. Sería recta si la cantidad de la magnitud longitud del segmento de línea es igual a la cantidad de magnitud distancia correspondiente al bipunto formado por sus extremos.

Una segmento de recta no es pues “la distancia más corta entre dos puntos” como se suele decir, sino la trayectoria “más corta” que liga los dos puntos del bipunto de su frontera, en donde “más corta” significa que la longitud del segmento o intervalo lleno es igual a la distancia entre los dos puntos del respectivo intervalo vacío. En el caso de dimensión uno contamos con la garantía de que dos puntos cualesquiera siempre son colineales. Tres puntos cualesquiera siempre son coplanares, pero no toda frontera de una región bidimensional tiene todos sus puntos coplanares. Por eso tenemos que proceder con cuidado para las dimensiones mayores que uno: antes de definir qué significa que una región es plana, tenemos que definir independientemente que una línea alabeada en el espacio es coplanar (o que yace en un plano) si al elegir tres puntos cualesquiera sobre esa línea, todos definen el mismo plano.

El paralelo para las regiones acotadas de una superficie comienza por las siguientes consideraciones: una región acotada tiene un área, que es su 2-volumen; su área es una cantidad de la magnitud integral relacionada con el 2-intervalo lleno consituído por la región entre todos dos puntos de la línea que constituye su frontera; esa misma frontera, si yace en un plano, tiene una cabida, que es su 2-capacidad y es una cantidad de la magnitud relacionada con el 2-intervalo vacío que define.

Si la región tiene una frontera coplanar, o tiene subregiones que tengan frontera coplanar, podríamos decir que esa región es plana si el área de la región misma o de cualquier subregión incluida en ella que tenga una frontera coplanar es igual a la cabida de su frontera. Para ello podríamos escoger únicamente subregiones circulares o discos suficientemente pequeños para estar contenidos en ella, de tal manera que sus circunferencias sean 1-esferas coplanares, o buscar intersecciones de la superficie dada con distintos planos, o cortar la región con 2-esferas que produzcan esas subregiones de frontera coplanar.

El paralelo para las regiones acotadas de un espacio podría ser el siguiente: una 3-región acotada del 3-espacio tiene un volumen, que es su 3-volumen y es una cantidad de la magnitud integral relacionada con el 3-intervalo lleno entre la 2-superficie que constituye su frontera, y esa misma 2-frontera, si es 3-coplanar, tiene una capacidad, que es su 3-capacidad y es una cantidad de la magnitud relacionada con el 3-intervalo vacío que define.

Si la 3-región tiene una 2-frontera 3-coplanar, o tiene subregiones que tengan 2-frontera 3-coplanar, podríamos decir que es 3-plana si el 3-volumen de la 3-región misma o de cualquier subregión incluida en ella que tenga 2-frontera 3-coplanar es igual a la 3-capacidad de cualquier 2-frontera 3-coplanar de cualquier 3-subregión incluida en ella. Para ello podríamos escoger únicamente subregiones esféricas o 3-bolas suficientemente pequeñas para estar contenidas en ella, de tal manera que su frontera sea una 2-esfera que sea 3-coplanar o buscar intersecciones de la 3-región dada con distintos 3-hiperplanos, o cortar la 3-región con 3-esferas que produzcan esas subregiones de 2-frontera 3-coplanar. Así, el 3-volumen es el volumen, el 2-volumen es el área y el 1-volumen es la longitud. La 3-capacidad es la capacidad, la 2-capacidad es la cabida y la 1-capacidad es la distancia. Una 1-región es una línea, y es 1-plana si es recta; una 2-región es una región, y es 2-plana si es plana. Una 3-región es una 3-región y es 3-plana si es 3-plana. Nuestra terminología se agota allí, porque nuestro pensamiento espacial deja de ayudarnos, y necesitamos un proceso de digitalización para formular la terminología intuitiva y desarrollar una terminología técnica que parte del pensamiento temporoespacial pero llega a superarlo. Pero hablar de 3-hiperplanos o n -hiperplanos deja de tener sentido sin ir y volver a las dimensiones inferiores que en las que todavía podemos echar mano de los modelos mentales analógicos temporoespaciales.

Allí se ve claramente que las magnitudes relacionadas con lo lleno son distintas de las relacionadas con lo vacío. Sólo así podemos entender qué es una región curvada del espacio, una curva en el tiempo o una región cronotópica curvada, y así podríamos extender las definiciones respectivas para n -regiones n -curvas con $(n - 1)$ -fronteras n -hiperplanares en $(n + 1)$ -hiperplanos, etc.

Pero no sólo se trata de asegurar un punto de partida para la comprensión de las teorías que superan los modelos mentales crontópicos, ni un refugio seguro para regresar periódicamente de los viajes hiperespaciales a los que nos lleva la teoría digitalizada. Se trata también de salvaguardar la fuente de las conjeturas intuitivas, de los “insights” o chispazos iniciales de los que parten las ideas peregrinas, las relaciones insólitas o las transformaciones descabelladas que podrán luego matematizarse en formas nuevas. Sólo así podremos crear también en Bogotá y en Colombia nuevas matemáticas y desarrollar las existentes por nuevos caminos.

Más allá de la teoría de grupos

Ya hemos visto las múltiples maneras en las que la teoría de grupos se cruza con la llamada “geometría”: los grupos del Programa de Erlangen son sólo una de esas maneras. Los grupos de transformaciones de las figuras o grupos cristalográficos planos, sólidos o hipsólidos, los grupos de Lie, los grupos de homotopía, los grupos de homología y cohomología son otras. Los grupos de Galois también sirvieron para estudiar los cuerpos numéricos y hoy día se consideran también grupos de Galois generalizados en la geometría algebraica hasta llegar al programa geométrico de Langlands.

Pero también es necesario ir más allá de los grupos o más acá de ellos; más acá, a veces bastan los semigrupos, los grupoides, los lazos, los cuasigrupos o los pseudogrupos. Más allá también se consideran los anillos, los cuerpos, los espacios vectoriales y las álgebras, no sólo las conmutativas ni las asociativas. Las álgebras de Lie no son conmutativas: son anticonmutativas, y las álgebras de Cayley y las de Jordan no son asociativas.

El haberse atrevido a ir más allá de las estructuras algebraicas usuales hacia los pre-haces, los haces y, en particular, los topos, los esquemas y otras refinadas construcciones permitió extender el análisis complejo a varias variables y a cuerpos diferentes de los de característica cero, ligando así lo que llamamos “geometría” con el álgebra abstracta, la geometría algebraica, la topología algebraica, la geometría diferencial, la teoría de números y otras ramas de las matemáticas.

Las precategorias y las categorías permitieron extender las conceptualizaciones y las herramientas matemáticas mucho más allá de lo que se podía imaginar en el Siglo XIX. Hoy día podemos decir que un programa para la cronotopía se extiende a explorar modelos y teorías con todas las herramientas precategoriales o categoriales a nuestra disposición, por medio de la proyección functorial de macrosistemas compuestos a su vez por cualquier clase de sistemas matemáticos que se quiera estudiar y sus morfismos respectivos, en otros macrosistemas compuestos por otros tipos de sistemas mejor conocidos hasta ese momento, con los morfismos apropiados. Este es una especie de “principio de functorialidad generalizado” que llevó a la topología algebraica y que luego fue también uno de los principios rectores del Programa de Langlands, sobre el cual han versado dos de los últimos “Premios Nobel de Matemáticas”: las medallas Fields de 1998 y de 2002 adjudicadas a Vladimir Drinfeld y a Laurent Lafforgue.

Así se han logrado las correspondencias más iluminadoras, los grandes teoremas de dualidad y la extensión de los sistemas a otros que no eran imaginables cuando Klein proclamó su Programa de Erlangen.

Pongamos sólo un ejemplo, que podríamos llamar “el Pequeño Teorema de Joe Harris”, tomado del programa de relacionar los grupos de Lie con la geometría algebraica. Se trata de una proposición que aparece como una mera observación de pasada dentro de una serie de ejercicios en la p. 160 del libro de William Fulton y Joe Harris “Representation theory: A first course” (Graduate Texts in Mathematics-Readings in Mathematics GTM RIM 129, New York, Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1991).

Recordemos que en geometría algebraica la cúbica retorcida es la cúbica normal racional en el espacio proyectivo \mathbf{P}^3 , y tiene su variedad desarrollable tangencial, que resulta de cuarto grado en \mathbf{P}^3 . La variedad cordal de la cuártica normal racional en el espacio proyectivo \mathbf{P}^4 resulta ser de tercer grado en \mathbf{P}^4 . Eso parecía una coincidencia. Pero después de explicar la reciprocidad hermitiana, Joe Harris pide al lector probar el isomorfismo de los grupos de representaciones de simetrizaciones iteradas de ciertos productos tensoriales, y dice así: “El hecho de que las representaciones $Sym^3(Sym^4 V)$ y $Sym^4(Sym^3 V)$ contienen ambas una representación trivial corresponde al hecho de que la variedad desarrollable tangencial de la cúbica retorcida en \mathbf{P}^3 tiene grado 4, mientras que la variedad cordal de la cuártica normal racional en \mathbf{P}^4 tiene grado 3.”

(“The fact that the representations $Sym^3(Sym^4 V)$ and $Sym^4(Sym^3 V)$ both contain a trivial representation corresponds to the fact that the tangential developable of the twisted cubic in \mathbf{P}^3 has degree 4, while the chordal variety of the rational normal quartic in \mathbf{P}^4 has degree 3.”).

No trato de aparentar que ya comprendo toda la profundidad de esa observación, sobre la cual he trabajado varios años, sino que mi propósito al referirla es insistir en que no podemos comprender a fondo este tipo de proposiciones altamente abstractas sin ir y volver desde y hacia las representaciones temporoespaciales de las curvas en el espacio, de las superficies generadas por las tangentes a esa curva, sin pensar en las cuerdas de un círculo y las variedades generadas por las cuerdas de una curva en el espacio, y sin restringir las afirmaciones sobre los espacios proyectivos \mathbf{P}^n a la línea al plano proyectivo real y al 3-espacio proyectivo real, a su vez considerados como espacios formados por haces de líneas y por cortes de esferas a esos haces. Para decirlo de otra manera, sin partir de la geometría algebraica intuitiva al estilo de la escuela italiana, y sin ir y volver a ella después de los periplos más abstractos, no se están comprendiendo a fondo las fórmulas que se escriben, no se están controlando los resultados de las teorías en modelos mentales, ni se están encontrando las nuevas conjeturas que se generalizarán y se demostrarán más tarde con las herramientas más abstractas.

Las limitaciones del programa de Erlangen

Podemos ya resumir las principales limitaciones que tenía el Programa de Erlangen, reconociendo -por supuesto- que fue un hito admirable en la geometría de los siglos XIX y XX y que no se le podía exigir a Félix Klein que superara esas restricciones en el momento histórico en que lo formuló.

Su clasificación de las geometrías no incluye la descomposición de figuras en subfiguras para armar rompecabezas con las mismas piezas, por no tratarse de transformaciones

continuas. El tangram o la extensión del Origami clásico al que permite cortar el papel o armar figuras con piezas sueltas, la conservación del área por esos cambios de lugar de las piezas y la misma exploración iniciada por Hilbert sobre equi-descomponibilidad y equi-arealidad de figuras, tan cara a Carlo Federici, quedarían por fuera de esta clasificación.

Ya vimos que ni siquiera las geometrías derivadas del Origami clásico, sólo con doblado de papel y sin introducir cortes, estarían comprendidas en las geometrías de la escala de Erlangen.

Este programa tampoco incluía las geometrías finitas en las cuales no hay una noción de continuidad o de metrización.

No incluía el estudio del tiempo, ni por la cronología ni por la cronometría, y no se aplicaría propiamente al cronotopo relativista ni a sus extensiones.

No podía prever la explosión matemática derivada de los programas gráficos de computación.

No hacía explícitamente la distinción entre teorías y modelos, ni entre los aspectos lógicos y los aspectos métricos de cada modelo.

No incluía las posibles clasificaciones derivadas de otras estructuras matemáticas más fuertes o más débiles que los grupos, ni el estudio de los espacios por medio de la proyección de unas precategorias o categorías a otras con otros tipos de sistemas como objetos y con los morfismos apropiados.

La cronotopía en la física

La cronotopía relativista ya no puede llamarse “geometría”, pues desborda la Tierra y pretende abarcar el universo, incluída la dimensión temporal.

El intento de Dirac de introducir sus matrices de spin para superar el tratamiento no relativista del electrón con la ecuación de Schrödinger ha llevado a tratar de aplicar a la física cuántica y a la relativista el análisis cuaterniónico como teoría de las funciones de variable cuaterniónica, o el análisis hipercomplejo como teoría de las funciones de dos variables complejas.

El álgebra geométrica o álgebra del espacio-tiempo de Hestenes produce un tratamiento unificado para todas las ramas de la física, que incluye los cuaternios y las álgebras de Clifford, las matrices de Dirac y las notaciones de operadores diferenciales libres de coordenadas, convirtiéndose así una notación apropiada para un programa para la cronotopía. Conceptualmente hablando, la cronotopía permite concebir directamente las vecindades cronotópicas del aparato detector y el fenómeno detectado con dimensiones temporoespaciales suficientemente amplias para albergar espacialmente tanto al dispositivo como al fenómeno, y lo suficientemente duraderas temporalmente para permitir un acoplamiento metaestable que permita producir una lectura. Allí viven las relaciones de incertidumbre de Heisenberg.

Ese es el mundo cronotópico que vislumbró Einstein cuando imaginaba que viajaba montado en la parte delantera de una locomotora que iba acelerando más allá de la velocidad del sonido, cuando ya él dejaría de oír el silbato de la locomotora, hasta llegar a la ve-

locidad de la luz. Allí se hizo la pregunta crucial que transformaría la física del Siglo XX: ¿Qué pasaba con el chorro de luz que emitía el faro delantero de la locomotora?

La reinterpretación del experimento de Michelson-Morley y de las transformaciones de Lorenz creó un nuevo mundo cronotópico y dejó atrás las concepciones del éter del Siglo XIX. Pero ese mismo pensamiento cronotópico puede reconstruir las condensaciones y rarefacciones del campo como un nuevo tipo de fluido al que no afectan las objeciones de la concepción mecanicista del éter, el protilo, y aplicar la dinámica generalizada de fluidos en espacios de n-dimensiones para producir modelos de las partículas elementales y sus interacciones. Ese programa cronotópico, que comenzó calladamente en algún rincón del edificio de química de la Universidad Nacional de Colombia, puede explicar el éxito de los modelos de supercuerdas, aun conjeturando que las 10 dimensiones apropiadas para esos modelos son simplemente la dimensión de las matrices simétricas 4×4 . También aparecen las 10 dimensiones si se estudian las matrices casi antisimétricas, que son antisimétricas excepto por la diagonal no necesariamente nula, con las cuales se pueden modelar en el caso 2×2 el campo complejo y en el caso 4×4 el campo cuaterniónico y la dinámica generalizada de fluidos.

Ya la cuantización llevó a reencontrar en la física del continuo los aspectos granulares o discretos de la aritmética. Así, los aspectos lógicos y métricos se vuelven a encontrar en una cronotopía integral, volviendo a una especie de programa de la aritmogeometría pitagórica.

Para completar esta inclusión de la física del programa aritmogeométrico pitagórico, un futuro programa para la cronotopía requerirá el desarrollo de una interpretación granular o cuantizada de los números reales y racionales, que se va imponiendo como una necesidad de la computación electrónica.

En un computador, por grande y poderoso que sea, hay que limitar el número de bits que se pueden asignar a un número en punto flotante. Supongamos que se le asignan 64 bits; eso quiere decir que la granularidad del sistema numérico que puede manejarse está limitada por $2^{(-64)}$, aproximadamente $10^{(-19)}$, y según las unidades que se manejen para el tiempo y el espacio, por ejemplo los segundos y los metros, eso permitiría fijar la granularidad de las dimensiones de una vecindad cronotópica computable.

Así, un número computable ya no representará un punto en la recta real, sino un intervalo de diámetro igual a la granularidad del sistema de cómputo, sin poder ubicar computablemente su centro. No habrá pues singularidades puntuales, así como no hay posibilidad de tomar una fotografía de grano más fino que lo que permitan los pixeles de la cámara digital ni de presentarla en pantalla de manera más fina que lo que permita la densidad en pixeles por pulgada cuadrada que tenga la pantalla.

Esta concepción granular de los números requerirá un tipo de análisis granular que se vio ya forzado por las limitaciones de la computación electrónica, pero que apenas está en desarrollo con los aportes del análisis constructivo de Errett Bishop, al que han contribuido Paul Lorenzen y Douglas Bridges, rescatando muchas ideas del intuicionismo de Brouwer.

La cronotopía en la computación y en la robótica

El poder de la computación electrónica y las capacidades graficadoras, combinadas con la velocidad de procesamiento numérico y simbólico, han requerido un tratamiento nuevo para simular la tercera dimensión en las pantallas. Para ello, de nuevo los cuaternios de Hamilton renacieron cien años después de su creación para facilitar los cálculos de gráficas tridimensionales pasándolos a la cuarta dimensión, y las álgebras de Clifford y las de Hestenes permiten tratar directamente la visualización de muchos aspectos lógicos y métricos de la cronotopía de manera impensable hace 20 años.

En una fructífera interacción entre la visualización-corporalización, la ciencia, la tecnología y las matemáticas más abstractas, la reflexión sobre la corporalidad de las nociones temporoespaciales y físicas ha contribuido también a la robótica, y los progresos de la robótica han contribuido a la reconceptualización de la física y a lo que se suele llamar “geometría”.

Vuelve la posibilidad de explorar en la topología y la topometría proyectivas, con la utilización y la generalización de la razón cruzada. Renacen las propuestas de Desargues y la razón anarmónica de Monge, Poncelet y Chasles.

Herramientas tan potentes como la proyección estereográfica y toda una serie de proyecciones que antes requerían meses de trabajo de expertos dibujantes pueden materializarse en una pantalla a color en segundos, con sombras y brillos que simulan la tercera dimensión.

La razón cruzada extendida a los números complejos permitió a Klein obtener métricas precisas para los discos de Klein y Poincaré y la equivalencia de esos modelos puede verse en pocos segundos de computación, lo que permite inventar otros nuevos.

La visualización y la corporalización jugarán un papel cada vez mayor en el futuro programa para la cronotopía, con una interacción estrecha entre los progresos tecnológicos en la graficación computacional y la robótica y los progresos conceptuales en la cronotopía.

La cronotopía en la educación y en la investigación matemáticas

William Clifford, el creador de las álgebras que ahora llevan su nombre, que configuran los sistemas básicos para comprender los grupos de Lie y han evolucionado hacia un posible lenguaje universal para las ciencias naturales, dijo un día a sus estudiantes una frase que encontré en la página web dedicada al Cálculo Geométrico de David Hestenes y que traduzco así:

“.,, porque la geometría, como ustedes saben, es la puerta de entrada a la ciencia, y esa puerta es tan baja y estrecha que uno sólo puede entrar por ella como un niño pequeño.”

William K. Clifford (1845-1879).

La alusión al evangelio es evidente. Los tres sinópticos traen en distintas variantes el conocido dicho de Jesús de Nazareth (Mateo 18, 3; Marcos 10, 15; Lucas 18, 17). La versión de Mateo se suele traducir así: “En verdad, en verdad os digo, que si no os hacéis como niños, no entraréis en el reino de los cielos.”

Pero hay también una alusión clara al igualmente famoso dicho de Galileo sobre el gran libro del universo, “que no puede entenderse a menos que uno aprenda primero a comprender el lenguaje y a leer el alfabeto en el que está compuesto. Está escrito en el lenguaje de las matemáticas.”

Pero Galileo precisa en seguida cuál es el lenguaje de las matemáticas y su alfabeto. A diferencia de lo que nos hacen creer los profesores de álgebra y de cálculo, no se puede tratar de esos lenguajes, pues Galileo no los conocía. No se trata pues de lo que hoy llamamos “álgebra”, ni su alfabeto está formado por números, letras y otros símbolos como nos lo han hecho creer, Sigamos leyendo a Galileo: se trata del lenguaje de las matemáticas, “cuyos caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra” de ese gran libro.

Ese gran libro del universo está pues escrito con las figuras, íconos y diagramas tan vilipendiados por la mal llamada “Matemática Moderna” o “Nueva Matemática”, y sin la percepción activa y operatoria de esos productos de nuestra imaginación temporoespacial no podemos comprenderlo.

En la educación matemática el programa para la cronotopía indica la necesidad de superar la enseñanza puramente aritmética de la educación primaria, en la que lo que llamamos “geometría” se reduce al reconocimiento de figuras, para iniciar desde el comienzo con la cronotopía sintónica con el cuerpo de niños y niñas, con la visualización y el cultivo de la imaginación temporoespacial y los juegos cronológicos y topológicos de las definiciones nocionales y la exploración de relaciones y transformaciones, y para avanzar en los juegos cronométricos y topométricos con las cantidades anuméricas de magnitudes diferentes hasta llegar a los números rotulados o con letrero.

Los niveles de los esposos van Hiele para el progreso en la comprensión de lo que llamamos “geometría” reviven también con este programa, pues ahora se puede precisar el paso de los primeros niveles de van Hiele a la deducción y al rigor, y aprovechar la exploración libre y guiada, la generación y puesta a prueba de conjeturas y aun la invención o reinención de conceptos y relaciones cronotópicas y cronológicas con la ayuda de los programas de computación electrónica.

En la secundaria se invertiría la relación entre el álgebra y lo que llamamos “geometría”, pues ahora serían las conjeturas y problemas de la cronotopía los que exigirían aprender o inventar notaciones que se compararían con el álgebra de las hojas electrónicas computacionales y con el álgebra usual del bachillerato, ya no como disciplina de las matemáticas conceptuales sino como una herramienta más para la expresión, la comunicación, la exploración y la puesta a prueba de las conjeturas originadas en la visualización-corporalización crontópica y la solución de sus problemas lógicos y métricos. La argumentación a favor o en contra de las conjeturas, las demostraciones y los contraejemplos y la argumentación a favor o en contra de los argumentos dados remplazarían los procedimientos rígidos de tratamiento simbólico en el tablero o el cuaderno. Los ejercicios de álgebra se dejarían como entretenimiento para aprender a manejar los sistemas de tratamiento simbólico de fórmulas y no como objeto directo de enseñanza de procedimientos y algoritmos sin sentido. Más bien que seguir redactando y proponiendo problemas como ejercicios, los

profesores y estudiantes produciríamos problemas como acertijos y desafíos intrínsecos a la cronotopía, o relacionados con las demás áreas curriculares dentro del trabajo por proyectos integrados de varias áreas.

En la educación media y posmedia, sea técnica, tecnológica, profesional o académica, la geometría analítica, la trigonometría y el cálculo dejarían de ser el filtro y la tortura para expulsar estudiantes del sistema educativo, para animarlos más bien a continuar el ciclo de explorar, conceptualizar, conjeturar, poner a prueba las conjeturas, argumentar a favor o en contra, producir, visualizar, corporalizar y comprobar soluciones a problemas cronotópicos relacionados con la producción, la profesión o la disciplina académica escogida. En la investigación matemática no se procedería de manera diferente a la que se iniciaría desde la primaria, la secundaria, la media y la universitaria. Es el mismo ciclo que parte de la visualización-corporalización cronotópica, que sigue el proceso de exploración, conceptualización, generación y puesta a prueba de conjeturas, argumentación y comprobación y termina con la vuelta a la visualización-corporalización de las soluciones. La diferencia estaría en el rigor de la argumentación, en la densidad de la conceptualización y en el formalismo de la expresión. Pero si queremos crear matemáticas nuevas en Bogotá, en Colombia, en Latinoamérica, no podemos esperar a comenzar a hacerlo en los posgrados, sino que tenemos que comenzar desde niños y volver a hacernos niños para iniciar y concluir esos ciclos de investigación matemática.

El Programa de Bogotá para la que se suele llamar “geometría” parte pues de achicarnos como niños para poder pasar por esa humilde puerta de entrada al universo de las ciencias, las artes y las matemáticas que es nuestra imaginación temporoespacial, corporalizada en nuestros nervios, músculos y huesos (o tal vez sólo en nuestro sistema nervioso central), para ejercitar el pensamiento cronotópico al comienzo de cualquier aventurado viaje matemático, y nos propone regresar repetidamente a ese lugar privilegiado después de todos y cada uno de los periplos teóricos más abstractos y refinados, para encontrar allí y la satisfacción profunda del “insight”, ese “chispazo” o “bombillazo” que nos da la intuición cronotópica de la coincidencia de un modelo con una teoría y para encontrar también allí la fuente de las nuevas conjeturas y el punto de partida para otro emocionante periplo matemático.

Nuestra puerta de entrada al universo es ciertamente pequeña: es un ínfimo gusanito cuadridimensional cuyo hipervolumen es, a lo más, el medio metro cúbico de nuestro cuerpo (y tal vez sólo la milésima de metro cúbico de nuestro cerebro) multiplicado por la breve duración de nuestra vida.

En una frase en la que resuena la voz de García Márquez, el Programa de Bogotá para lo que solemos llamar “geometría” nos propone no desperdiciar ni una sola de las continuas oportunidades de vivir esa maravillosa experiencia del pensamiento cronotópico desde la cuna hasta la tumba.